Några användbara matematiska samband

Aritmetiska serier

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Mer allmänt, om $a_i = a_{i-1} + c$ där c är en konstant, så gäller

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{2}$$

Geometriska serier

Om kvoten $k \neq 1$ så gäller

$$\sum_{i=0}^{n-1} k^i = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k - 1} \tag{3}$$

Om $|k| < 1$ så gäller

$$\sum_{i=0}^{\infty} k^i = 1 + k + k^2 + \ldots = \frac{1}{1-k} \tag{4}$$

Kvadratsumma

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{5}$$

Specialsumma

Om $\alpha \neq 1$ så gäller

$$\sum_{i=1}^{k} i\alpha^i = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} - k\alpha^k\right] \tag{6}$$

Harmonisk serie

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n = \log n + \gamma + O(\frac{1}{n}) \tag{7}$$

där $\gamma = 0.5772\ldots$ är Eulers konstant.

Logaritmlagar

$$y = \log_a x \iff a^y = x \tag{8}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{9}$$

$$\log xy = \log x + \log y \tag{10}$$

$$\log x^n = n \log x \tag{11}$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y \tag{12}$$

$$x^{\log y} = y^{\log x} \tag{13}$$

Fibonaccital

Om

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_i &= F_{i-1} + F_{i-2} \end{aligned}$$

så gäller att

$$F_i = \frac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}} \tag{14}$$

där $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ och $\hat{\phi} = (1 - \sqrt{5})/2$