Površi u prostoru

Predstavljanje i interpolacija površi

Predstavljanje površi u prostoru

- Površi u prostoru, baš kao i drugi objekti, postoje nezavisno od načina na koji ih formalno (matematički) predstavljamo.
- Poželjno je da se pri predstavljanju površi izbegne zavisnost reprezentacije od svojstava koordinatnog sistema, ali to nije moguće u potpunosti ostvariti.
- Postoje različiti načini prikazivanja površi, ali je svaki u nekom smislu ograničavajući – ne omogućava predstavljanje svih površi, ili je komplikovan za upotrebu, ili ima neki drugi nedostatak.

- Predstavljanje površi u prostoru zahteva **dve nezavisne promenljive**.

Predstavljanje površi u prostoru

- Površ predstavljena u **eksplicitnoj** formi: $z = f(x,y)$
  - Ovaj oblik omogućava jednostavnu evaluaciju (i druge operacije).
  - Međutim, postoje mnoge površi koje ne možemo predstaviti u ovom obliku. To su sve površi koje nisu grafici eksplicitno zadatih funkcija.
  - Jedan tipičan primer je sfera. Sferu moramo predstaviti kao uniju dve eksplicitno date površi.

Predstavljanje površi u prostoru

- Površ predstavljena **implicitno**: $F(x,y,z)=0$
  - Ovakva jednačina predstavlja neku vrstu "testa pripadnosti" – deli skup tačaka posmatranog prostora na one koje zadovoljavaju jednačinu i pripadaju površi, i one koje ne zadovoljavaju jednačinu i ne pripadaju površi.
  - Primer: $ax+by+cz+d=0$ je implicitna jednačina ravni.

    (Ovu jednačinu lako možemo izraziti i eksolicitno.)
  - Još karakterističnih primera: površi drugog reda (algebarske površi).

    Implicitna jednačina sfere je $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
  - Ovaj oblik, međutim, nije uvek pogodan za predstavljanje krivih u prostoru.
  - Još jedan nedostatak je i to što se generisanje skupa tačaka koje pripadaju površi (koje zadovoljavaju implicitnu jednačinu) svodi na rešavanje jednačine, što u opštem slučaju može biti veoma teško.

Predstavljanje površi u prostoru

- Površ predstavljena **parametarski** zahteva tri jednačine sa dve promenljive (parametra):

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

  - Vrednosti parametara *u,v* biramo iz nekog skupa – domena.
  - Vrednosti koordinata *x,y,z* tačake T_0 površi izračunavamo uvrštavanjem vrednosti (u_0,v_0) parametara u tri navedene jednačine.
  - Matrični zapis ovako predstavljene površi je

$$p(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

  - Parametarski oblik površi je najfleksibilniji i najpogodniji za korišćenje u oblasti računarske grafike, a **polinomne parametarske površi** su najčešće korišćene u interpolaciji i aproksimaciji površi u prostoru.

Predstavljanje površi u prostoru - parametarske polinomne površi

- Polinomne parametarske površi su oblika:

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}c_{ij}u^{i}v^{j}$$

- Određene su vrednostima *3(n+1)(m+1)* koeficijenata *cij.*

  (Podsetimo se: za svaki koordinatu koristimo jednu parametarsku jednačinu.)
- Birajući n=m=3, generišemo tzv. bi-kubne (polinomne) površi, koje uglavnom koristimo u interpolaciji i aproksimaciji.
- Takođe, ograničavajući vrednosti parametara tako da *0≤u,v≤1* generišemo tzv. "**surface patch**" – segment/parče površi ("zakrpu").

- Uočimo: svaki segment površi može se posmatrati kao granični slučaj kolekcije krivih koje dobijamo kada fiksiramo vrednost jednog od parametara (*u* ili *v*), a drugi menjamo u zadatom intervalu.

Predstavljanje površi - Kriterijumi

- Najčešće korišćeni kriterijumi za izbor reprezentacije (krivih i) površi za primene u računarskoj grafici i animaciji su:
  - Mogućnost lokalne kontrole – svaki segment se određuje na osnovu malog broja ulaznih podataka u njegovoj blizini.
  - Neprekidnost funkcije i izvoda (glatke krive i površi); s obzirom da se površi najčešće generišu spajanjem segmenata, obraća se posebna pažnja na osobine funkcije u tačkama nadovezivanja.
  - Stabilnost (mala promena ulaznih veličina uzrokuje malu promenu na izlazu).
  - Mogućnost efikasnog (brzog, jednostavnog) grafičkog predstavljanja površi na osnovu matematičke reprezentacije.

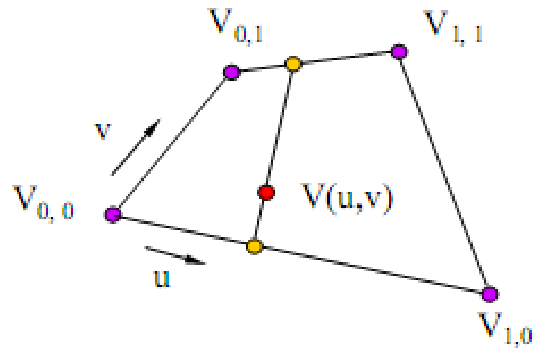
- Parametarske polinomne površi se pokazuju kao dobar izbor u svetlu svih navedenih kriterijuma.

Interpolacija površi
Bi-linearna interpolacija

Pretpostavimo da su nam poznate vrednosti funkcije *p=p(u,v)* u četiri tačke, a da želimo da odredimo približnu vrednost funkcije u nekoj tački “u blizini” poznatih vrednosti.
S obzirom da ne znamo analitički izraz funkcije, koristimo interpolaciju – traženu vrednost određujemo na osnovu datih vrednosti.

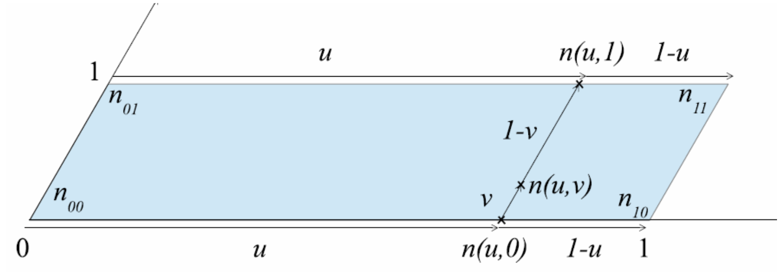
Jedan od najjednostavnijih pristupa je da koristimo **bi-linearnu** interpolaciju.

Pretpostavićemo da raspolažemo vrednostima
$V_{0,0} = p(0,0)$,
$V_{1,0} = p(1,0)$,
$V_{0,1} = p(0,1)$,
$V_{1,1} = p(1,1)$.
Tražimo vrednost $V_{u,v} = p(u,v)$, *za vrednosti* $0<u,v<1$.



Ideja bi-linearne interpolacije je da se prvo primeni linearna interpolacija po jednoj promenljivoj, dok druga uzima vrednosti 0, odnosno 1, a zatim se linearno interpolira po drugoj promenljivoj, za odgovarajuću vrednost prvog parametra.

Bi-linearna interpolacija



Konkretno, uz navedene oznake, dobijamo:

1. Linearna interpolacija između tačaka $V_{0,0}$ i $V_{1,0}$, (*v=0*)
   a zatim linearna interpolacija između tačaka $V_{0,1}$ i $V_{1,1}$ (*v=1*):

$$p(u,0) = (1-u)\cdot p(0,0) + u\cdot p(1,0)$$
$$p(u,1) = (1-u)\cdot p(0,1) + u\cdot p(1,1)$$

2. Linearna interpolacija po parametru *v,* između tačaka *p(u,0) i p(u,1)* (za fiksirano *u*)*:*

$$\begin{aligned} p(u,v) &= (1-v)\cdot p(u,0) + v\cdot p(u,1) \\ &= (1-v)\cdot((1-u)\cdot p(0,0) + u\cdot p(1,0)) + v\cdot((1-u)\cdot p(0,1) + u\cdot p(1,1)) \end{aligned}$$

3. Konačno, vrednost funkcije u tački *Vu,v=p(u,v)* je

$$V_{u,v} = p(u,v) = (1-u)(1-v)V_{0,0} + u(1-v)V_{1,0} + (1+u)vV_{0,1} + uvV_{1,1}$$

ili, u matričnom obliku

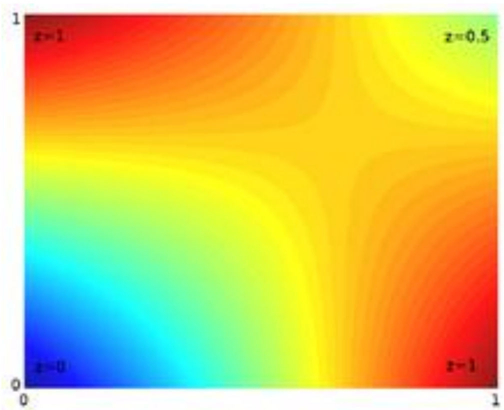
$$p(u,v) = \begin{bmatrix}1-u & u\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{0,0} & V_{0,1}\\ V_{1,0} & V_{1,1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{0,0} & V_{0,1}\\ V_{1,0} & V_{1,1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}v\\ 1\end{bmatrix}$$

Bi-linearna interpolacija

Uočimo:
Bilinearna interpolacija nije linearna – generisana površ nije ravan (dobijeni polinom sadrži član *uv*). Dobijena funkcija je proizvod dve linearne funkcije.

Prikazan je rezultat bilinearne interpolacije na jediničnom kvadratu, za tačke

$V_{0,0} = p(0,0) = 0,$
$V_{1,0} = p(1,0) = 1,$
$V_{0,1} = p(0,1) = 1,$
$V_{1,1} = p(1,1) = 0.5.$



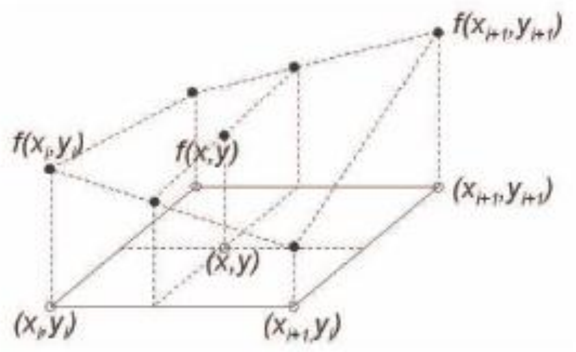
Različite boje odgovaraju različitim vrednostima funkcije, i ukazuju na “sedlast” oblik rezultujuće površi.

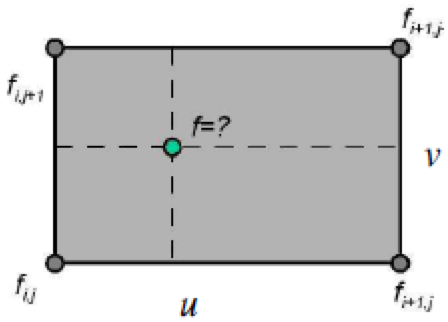
Bi-linearna interpolacija

Ukoliko posmatramo eksplicitno zadatu funkciju, z=f(x,y) i četiri tačke koje odgovaraju proizvoljnim vrednostima promenljivih, a ne obavezno temenima jedničnog kvadrata (kao što smo pretpostavili za parametrizovani segment površi), možemo razmatranja svesti na već opisana, uvođenjem odgovarajuće smene.

Dakle, za tačke $f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad f_{i+1,j} = f(x_{i+1}, y_j), \quad f_{i,j+1} = f(x_i, y_{j+1}), \quad f_{i+1,j+1} = f(x_{i+1}, y_{j+1})$

kao što je prikazano na slici





možemo napisati

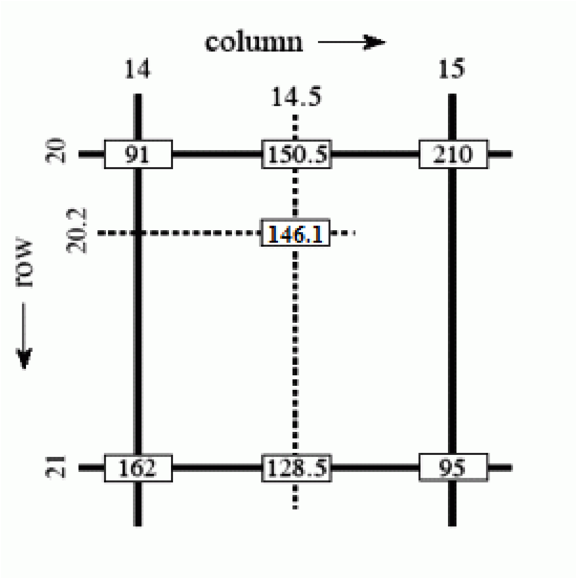
$$u = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad v = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i}$$

a zatim koristiti već navedenu formulu za bilinearnu interpolaciju.

Bi-linearna interpolacija - primer

Pretpostavimo da su nam poznate vrednosti (intenzitet) piksela u tačkama
(14,20), (14, 21), (15, 20) i (15, 21) (kao na slici)
i da treba da aproksimiramo vrednost u tački (14.5, 20.2), koristeći bilinearnu interpolaciju.

Uočimo da su navedene tačke traženu tačku 4 najbliže tačke celobrojne mreže, odnosno skupa tačaka u kojima znamo vrednost posmatrane funkcije.



Sada je, prema navedenim formulama, *u=0.5, v=0.2* i

$$p(u,0) = p(0.5,0) = 0.5 \cdot 91 + 0.5 \cdot 210 = 150.5$$

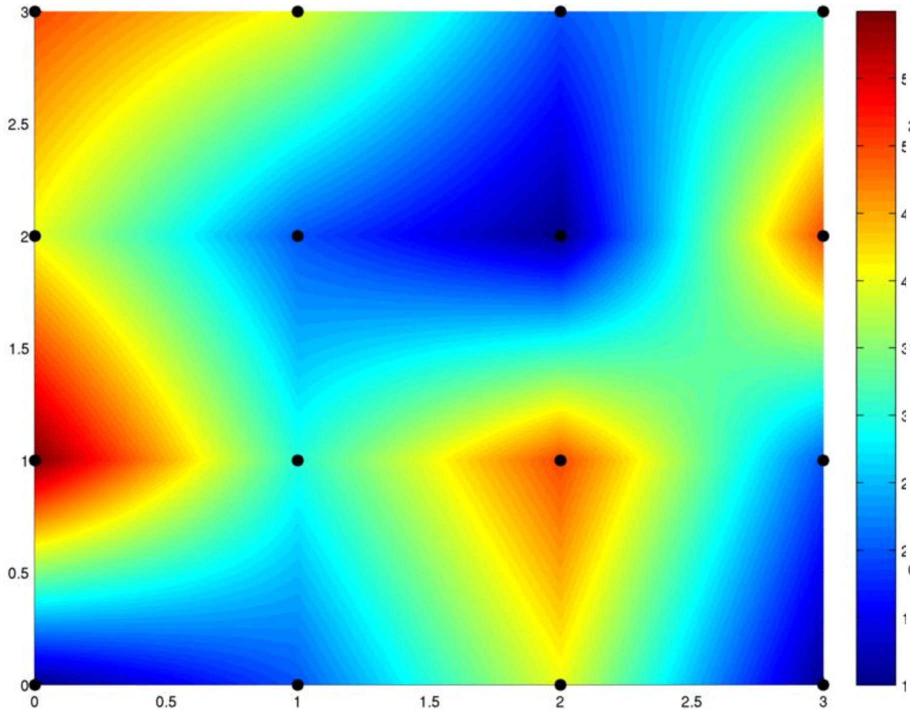
$$p(u,1) = p(0.5,1) = 0.5 \cdot 162 + 0.5 \cdot 95 = 128.5$$

i konačno, tražena vrednost je

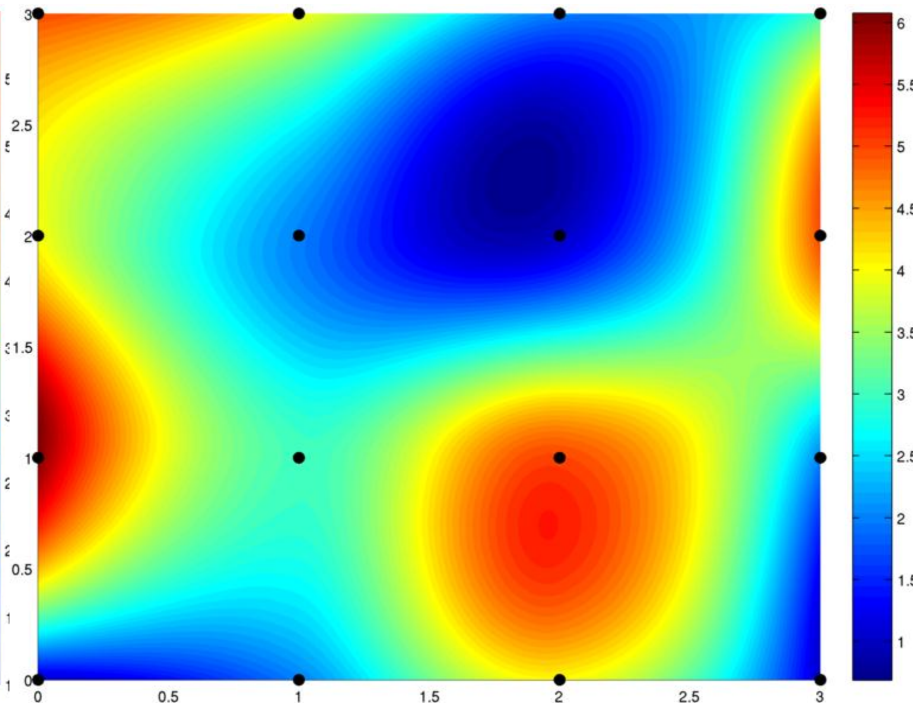
$$p(u,v) = p(0.5,0.2) = 0.8 \cdot 150.5 + 0.2 \cdot 128.5 = 146.1$$

Bi-kubna interpolacija

Bilinearna interpolacija se realizuje korišćenjem vrednosti funkcije u odabranim tačkama – čvorovima interpolacije. Ukoliko interpoliramo “deo po deo” površi, naknadno povezivanje jediničnih segmenata će biti neprekidno, ali ne i glatko.



Bilinearna interpolacija



Bikubna interpolacija

Posmatra se 9 segmenata nad jediničnim kvadratima; vrednosti korišćene u interpolaciji su u crnim tačkama.

Bi-kubna interpolacija

- Da bi se postigla neprekidnost izvoda rezultujućih interpolirajućih površi potrebno je koristiti interpolacione segmente površi koji dopuštaju veću fleksibilnost od bi-linearnih.
- Analogno kao kod interpolacije krivih, zaključujemo da interpolacioni segmenti (“patches”) koji uključuju polinome trećeg stepena omogućavaju postavljanje uslova jednakosti funkcija, kao i njihovih prvih i drugih izvoda u tačkama rubnih krivih.
- Bi-linearna interpolacija se realizuje funkcijom koja je proizvod dva polinoma prvog stepena; analogno, **bi-kubna interpolacija** se realizuje funkcijom koja je **proizvod dva polinoma trećeg stepena**.

Bi-kubna interpolacija

Proizvod dva polinoma trećeg stepena je polinom koji ima 16 koeficijenata. Može se napisati u obliku

$$p(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}c_{ij}u^{i}v^{j}$$

Za određivanje ovih koeficijenata potrebno je formulisati 16 jednačina (uslova). Postavljanjem odgovarajućih uslova postižemo da segment površi prolazi kroz 16 datih tačaka ili, alternativno, da (parcijalni) izvodi funkcije imaju neke željene vrednosti na rubovima segmenta (ovim, dalje, možemo postići neprekidnost funkcije i izvoda na rubovima segmenata).

Uočimo da se za svaku parametarsku jednačinu površi u prostoru (ima ih 3) generiše po jedna (bi-kubna) interpolaciona površ, odnosno, da se postupak u opštem slučaju radi tri puta. U nastavku ćemo posmatrati samo jednu funkciju dve promenljive (dva parametra) i notaciju prilagođavamo tome.

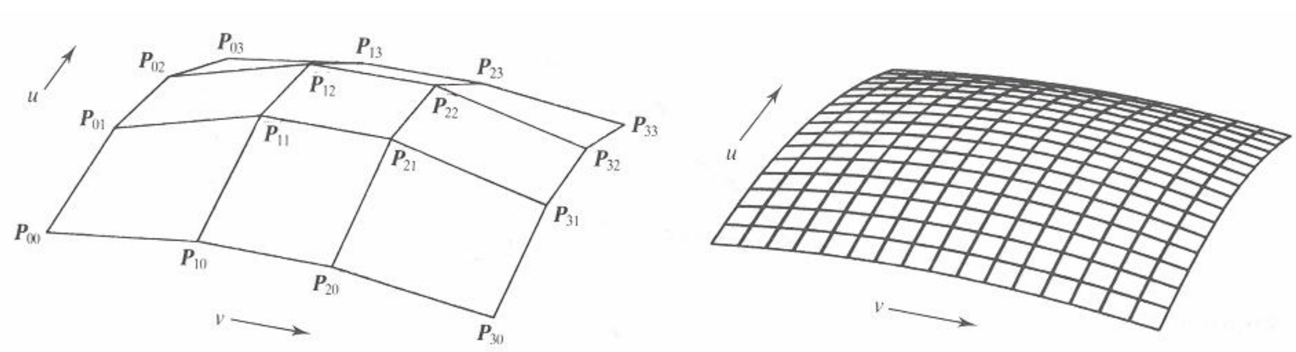
Bi-kubna interpolacija

16 koeficijenata posmatranog bi-kubnog polinoma *p(u,v)* možemo predstaviti matricom

$$\mathbf{C} = \lfloor c_{ij} \rfloor_{4\times 4}$$

a zatim važi da je $$p(u,v) = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{v}$$ gde je $$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

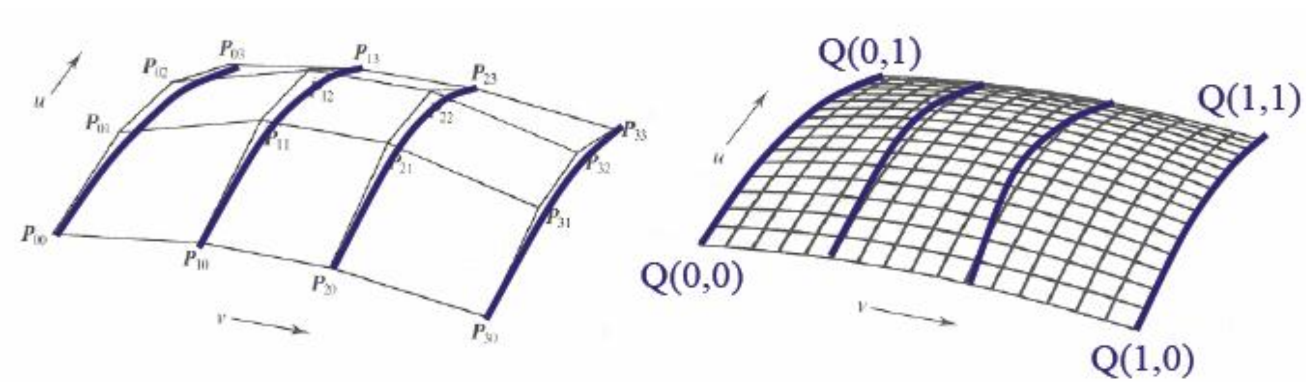
Dalje, pretpostavimo da raspolažemo sa 16 tačaka, P_{00}, P_{01}, ... P_{23}, P_{33},
koje su interpolacioni čvorovi, ili kontrolne tačke, površi.



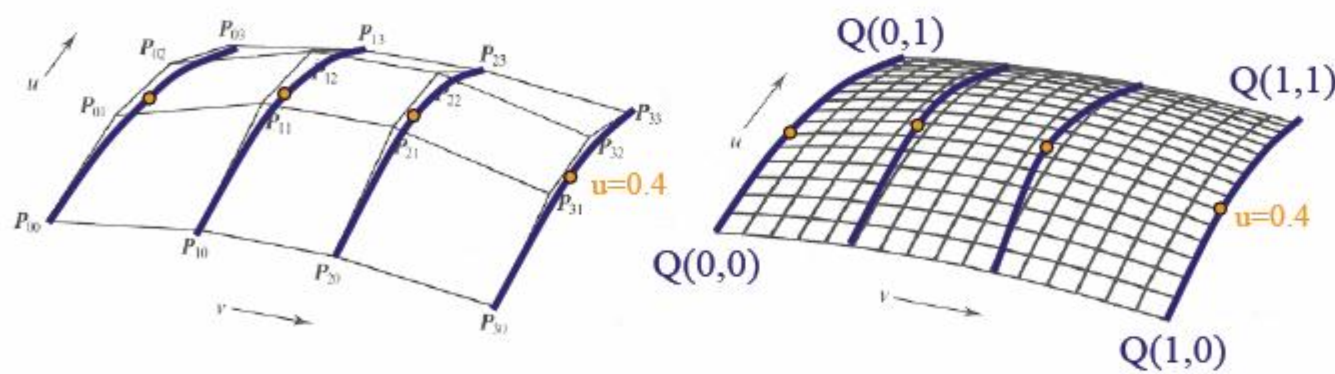
16 tačaka koje određuju 4X4 segmenta površi (levo) i rezultujuća (Bezier-ova) površ (desno).

Bi-kubna interpolacija

Tačke P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{03} nalaze se na krivoj (ili kontrolišu krivu) koja se dobija za u=0, a za 0≤v≤1. Početna tačka je P_{00} =Q(0,0), a krajnja P_{03} =Q(0,1).



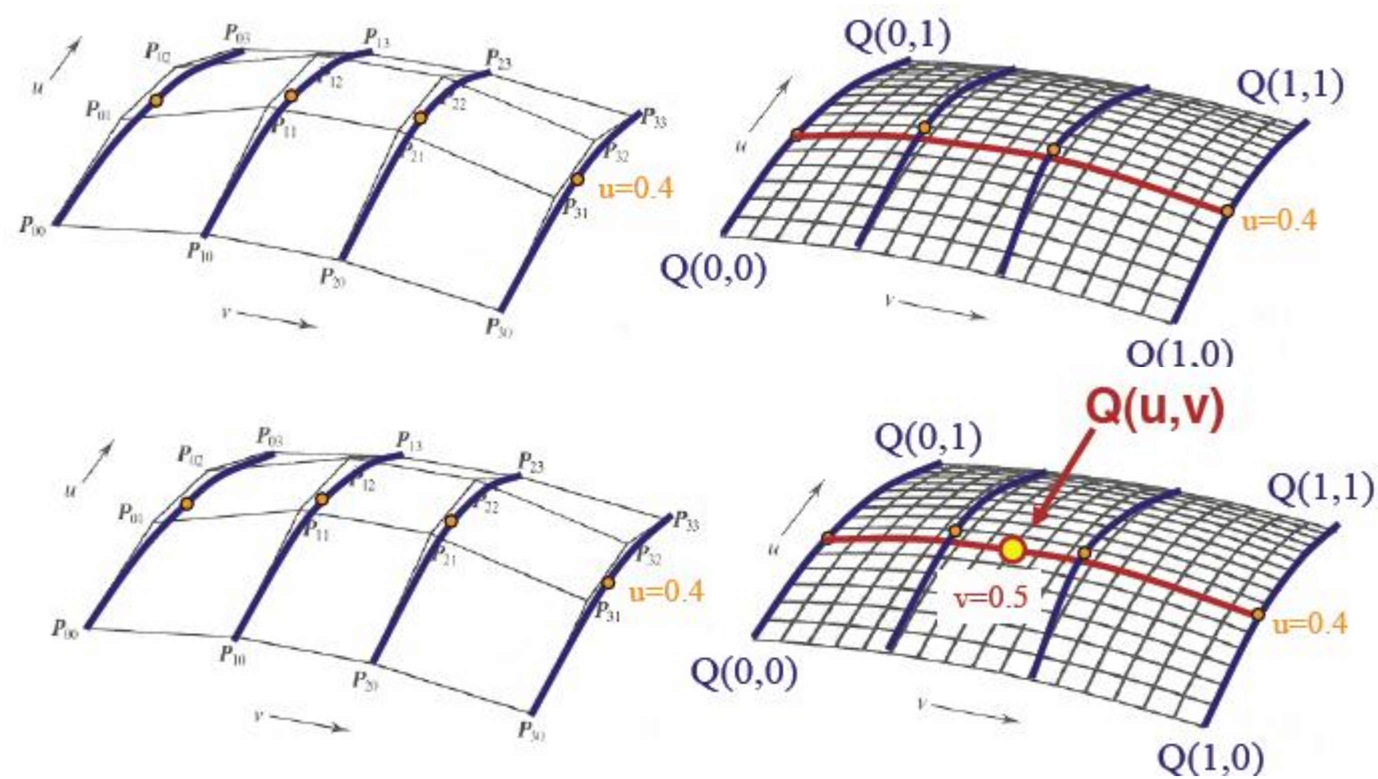
Fiksirajući vrednost parametra *u* , generišemo krive koje su određene tačkama P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13} ; P_{20}, P_{21}, P_{22}, P_{23} ; P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33} (u=1)



Birajući vrednost parametra *v* (recimo, v=0.4) generišemo po jednu kontrolnu tačku na svakoj od generisanih krivih.

Bi-kubna interpolacija

Dobijene četiri tačke koristimo da generišemo odgovarajući polinom trećeg stepena, sada po promenljivoj *u* (za fiksirano *v*). Na rezultujućoj krivoj, za odgovarajuću vrednost parametra *u*, nalazi se (približno) tačka *Q(u,v)* (za svako *0≤u,v≤1*).



Bi-kubna interpolacija

Rezultujuća interpolaciona površ je bi-kubna; fiksiranjem vrednosti jednog parametra određen je polinom trećeg stepena po drugom parametru.

Pogodan način da zapišemo ovako generisanu površ je korišćenjem matrica:

$$p(u,v) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}^T \cdot \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}$$

gde je

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$$

M je matrica koja je karakteristična za vrstu interpolacije (krive) koju smo generisali (npr. Lagrange-ov polinom , Bezier-ova kriva, Hermite-ova kriva, itd.)

a matrica $[P_{ij}]$ sadrži kontrolne tačke (ili interpolacione čvorove) segmenta.

Bi-kubna interpolacija

Očigledno, poredeći sa zapisom $p(u,v) = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{v}$

zaključujemo da je $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}$

Zapažamo:

- Interpolacionu površ možemo smatrati uopštenjem interpolacione krive, a jednačinu površi možemo izvesti koristeći jednačine interpolacionih krivih.
- Navedeni zapis omogućava da izrazimo površ u funkciji datih tačaka, sadržanih u matrici **P.**
- Proizvod **Mv** predstavlja odgovarajuću polinomnu bazu (Lagrange-ovu, Hermite-ovu, Bernstein-ovu, ...) koju direktno koristimo u formuli

$$p(u,v) = \sum_{í=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} b_i(u) b_j(v) P_{ij}$$

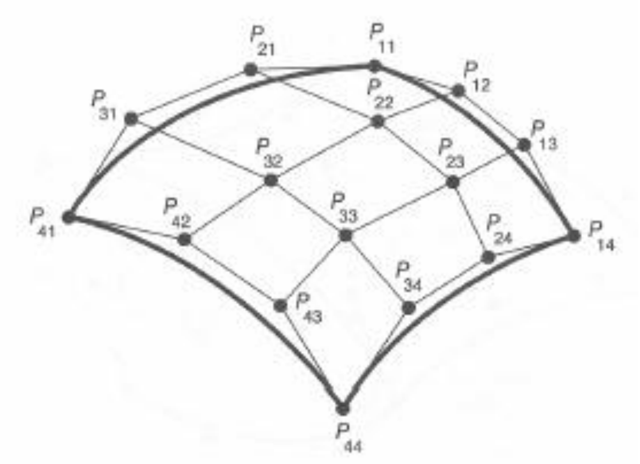
Bezier-ove površi

Bezier-ovu površ sa 16 kontrolnih tačaka sadržanih u matrici P možemo napisati u obliku

$$p(u,v) = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}_B{}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{v}$$

gde je

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



odnosno,

$$p(u,v) = \sum_{í=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} b_i(u) b_j(v) P_{ij}$$

gde je

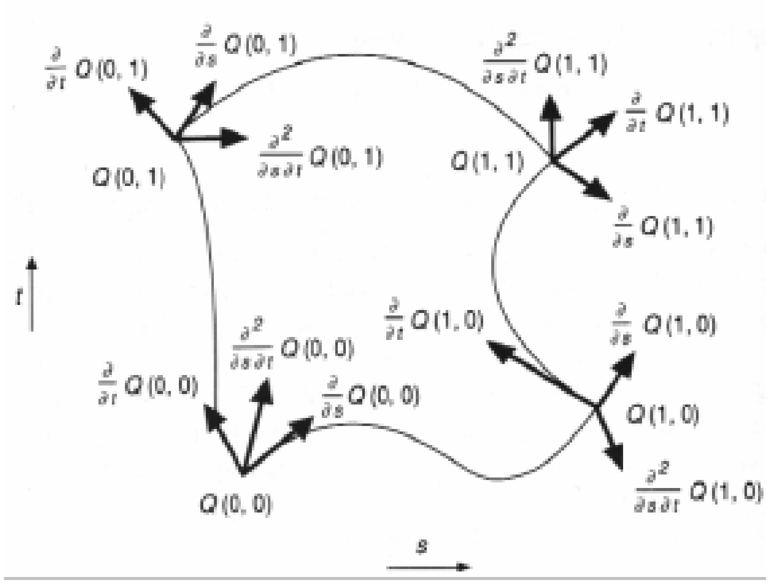
$$\mathbf{b}(v) = \mathbf{M}_B \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} b_0(v) \\ b_1(v) \\ b_2(v) \\ b_3(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Bernstein-ova baza.

Hermite-ove površi

Hermite-ove površi generišemo postavljajući uslov da u tačkama rubnih krivih funkcije imaju vrednosti prvih i drugih parcijalnih izvoda jednake nekim zadatim vrednostima.

Zahtevajući jednakost parcijalnih izvoda duž rubnih krivih susednih segmenata, obezbeđujemo glatkost površi – neprekidnost izvodnih funkcija.



Odgovarajuća matrica **P** u ovom slučaju sadrži četiri tačke koje su temena kvadratnog segmenta, dva puta po četiri vrednosti koje odgovaraju vrednostima parcijalnih izvoda prvog reda funkcije po svakoj od promenljivih, u temenima kvadratnog segmenta, kao i četiri vrednosti mešovitih parcijalnih izvoda drugog reda u temenima segmenta.
Matrica M je matrica karakteristična za Hermite-ovu formu (interpolacioni polinom).

B-splajn segmenti

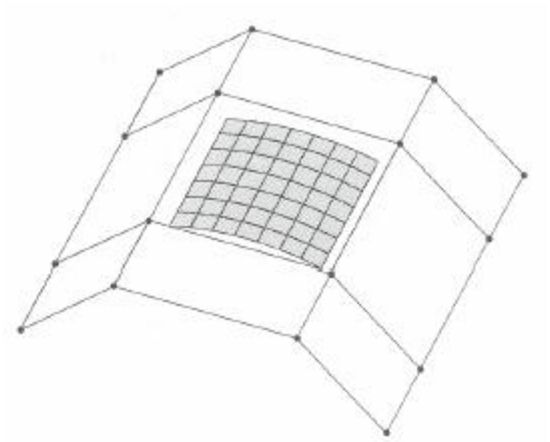
Analogno, korišćenjem matrice

$$\mathbf{M}_{\mathbf{B-Spline}} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \end{bmatrix}$$

u izrazu

$$p(u,v) = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}_{B-splajn}{}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}_{B-splajn} \cdot \mathbf{v}$$

dobijamo jednačinu B-segmenta Bezier-ovog splajna.



$\mathbf{M}_{B\text{-}splajn}\,\mathbf{v}$ generiše odgovarajuće bazne splajnove.