B-splajnovi

Splajn – po delovima Bezier-ova kriva trećeg stepena

Povezivanje Bezier-ovih krivih u splajn

Podestimo se: Bezier-ov polinom trećeg stepena, sa kontrolnim tačkama P_0, P_1, P_2, P_3, je

$$p(t) = P_0 + t(3P_1 - 3P_0) + t^2(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) + t^3(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

$$p'(t) = (3P_1 - 3P_0) + 2t(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) + 3t^2(-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

$$p''(t) = 2(3P_0 - 6P_1 + 3P_2) + 6t\ (-P_0 + 3P_1 - 3P_2 + P_3)$$

Pri tome je $p(0) = P_0$ $\quad p'(0) = 3(P_1 - P_0)$ $\quad p''(0) = 6(P_0 - 2P_1 + P_2)$

$p(1) = P_3$ $\quad p'(1) = 3(P_3 - P_2)$ $\quad p''(1) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3)$

Povezivanje Bezier-ovih krivih u splajn Granični uslovi

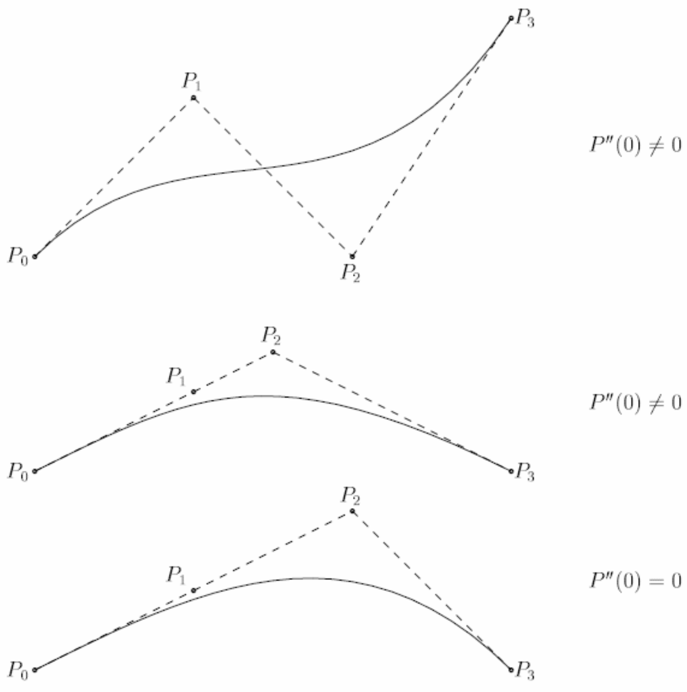
Uslov da je p’’(0) =p’’(1) = 0 je uslov kojim generišemo **prirodni** splajn.
U slučaju kada splajn formiramo nadovezivanjem Bezier-ovih krivih, taj uslov se svodi na

$$p''(0) = 6(P_0 - 2P_1 + P_2) = 0$$

$$p''(1) = 6(P_1 - 2P_2 + P_3) = 0$$

$$P_1 = \frac{1}{2}\left(P_0 + P_2\right)$$

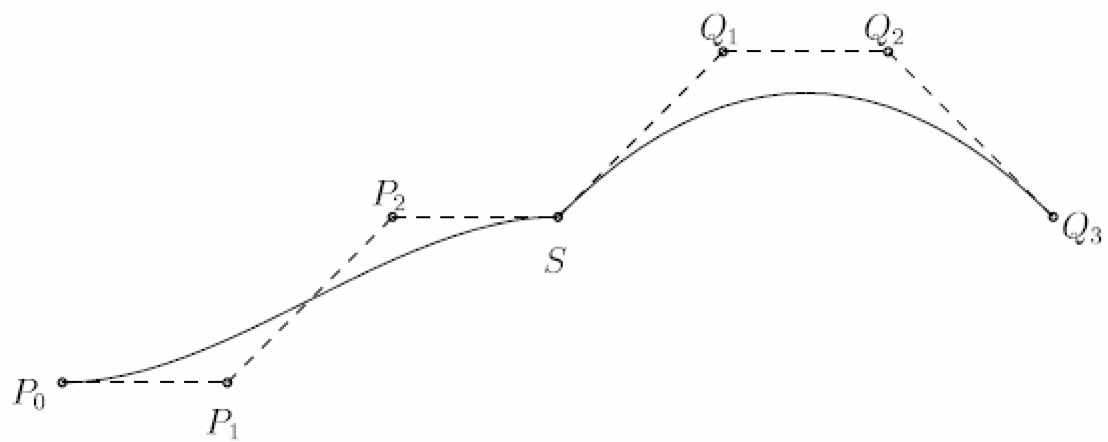
$$P_2 = \frac{1}{2}\left(P_1 + P_3\right)$$



Drugim rečima, navedeni uslov o vrednosti drugog izvoda implicira da je tačka P_1 na sredini duži određene tačkama P_0 i P_2, a tačka P_2 je na sradini duži određene tačkama P_1 i P_3.

Povezivanje Bezier-ovih krivih u splajn
Neprekidnost krive

Pretpostavimo da povezujemo dve Bezier-ove krive, sa kontrolnim tačkama P_0, P_1, P_2, P_3 i Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, u splajn, i da je tačka spajanja $P_3 = Q_0 = S$.
Ovakvo povezivanje, bez dodatnih uslova, obezbeđuje neprekidnost rezultujuće krive, ali ne i Neprekidnost prvog izvoda u tački S. Ulazni pravac tangente u tački S različit je od izlaznog.

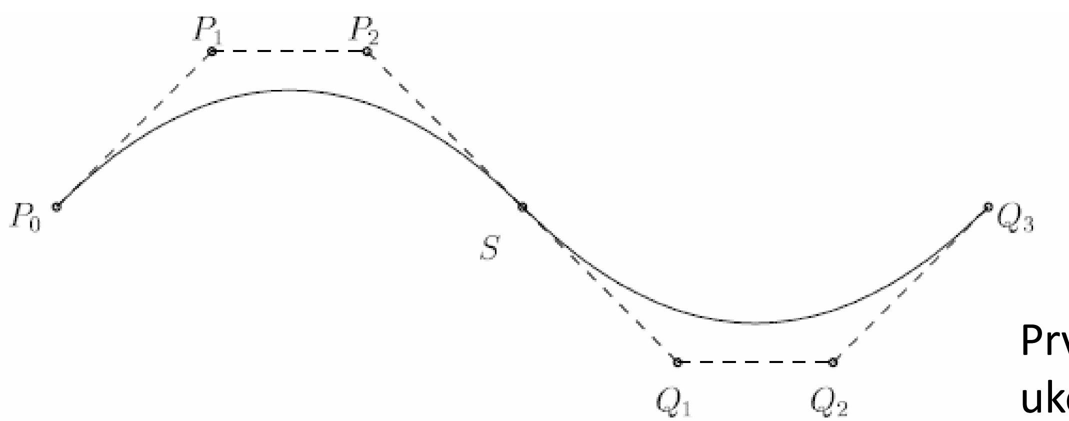


Povezivanje Bezier-ovih krivih u splajn Neprekidnost krive i prvog izvoda

U tački S vrednosti prvog izvoda (tangenti) dveju Bezier-ovih krivih treba da budu jednake. To znači da treba da važi da su jednake vrednosti

$$p'(0) = 3(Q_1 - S) \qquad p'(1) = 3(S - P_2)$$

Dakle, $Q_1 - S = S - P_2$ odnosno, $S = \frac{1}{2}(P_2 + Q_1)$



Prvi izvod u tački S je neprekidan ukoliko je tačka S središte duži P_2Q_1.

Povezivanje Bezier-ovih krivih u splajn Neprekidnost krive, prvog i drugog izvoda

Ukoliko želimo da i drugi izvod rezultujućeg splajna bude neprekidna funkcija u tački S, potrebno je da bude zadovoljeno da su jednaki izrazi

$$p''(0) = 6(S - 2Q_1 + Q_2)$$

$$p''(1) = 6(P_1 - 2P_2 + S)$$

odnosno,

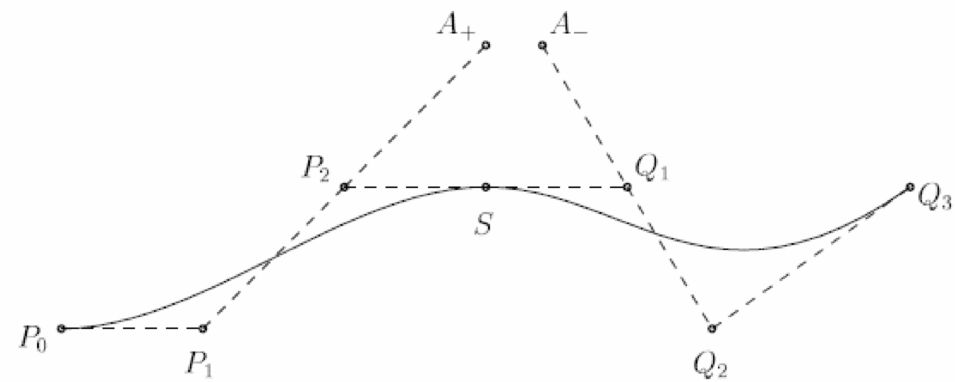
$$Q_1 + (Q_1 - Q_2) = P_2 + (P_2 - P_1)$$

Ovo kraće zapisujemo u obliku

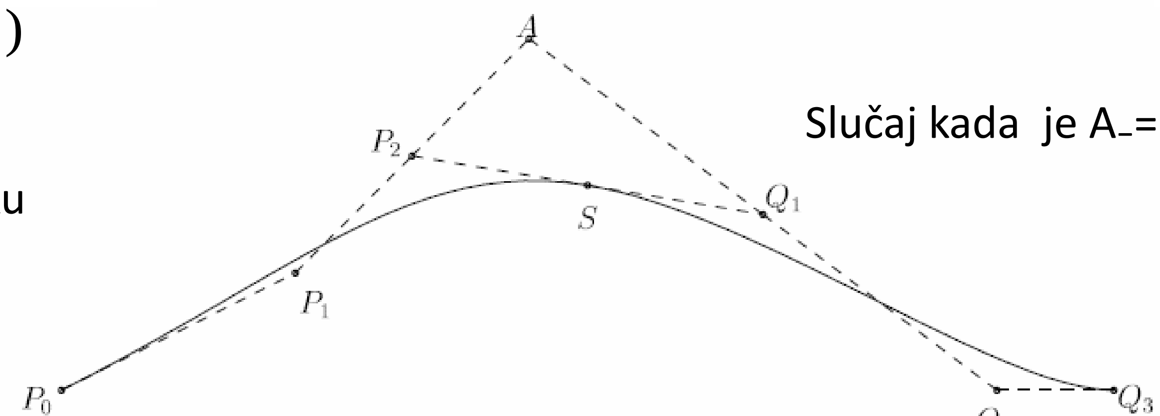
$$A_- = 2Q_1 - Q_2$$

$$A_+ = 2P_2 - P_1$$

Slučaj kada $A_- \neq A_+$

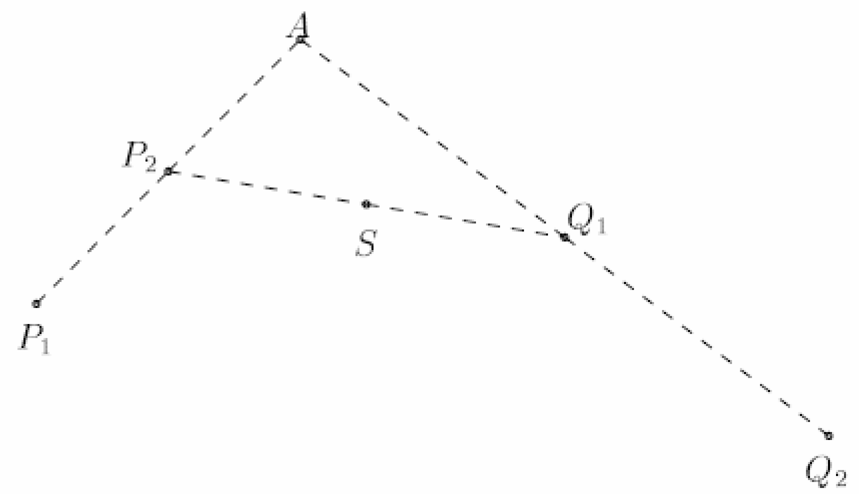


Slučaj kada je $A_- = A_+$



A-frame konfiguracija i Bezier-ov splajn

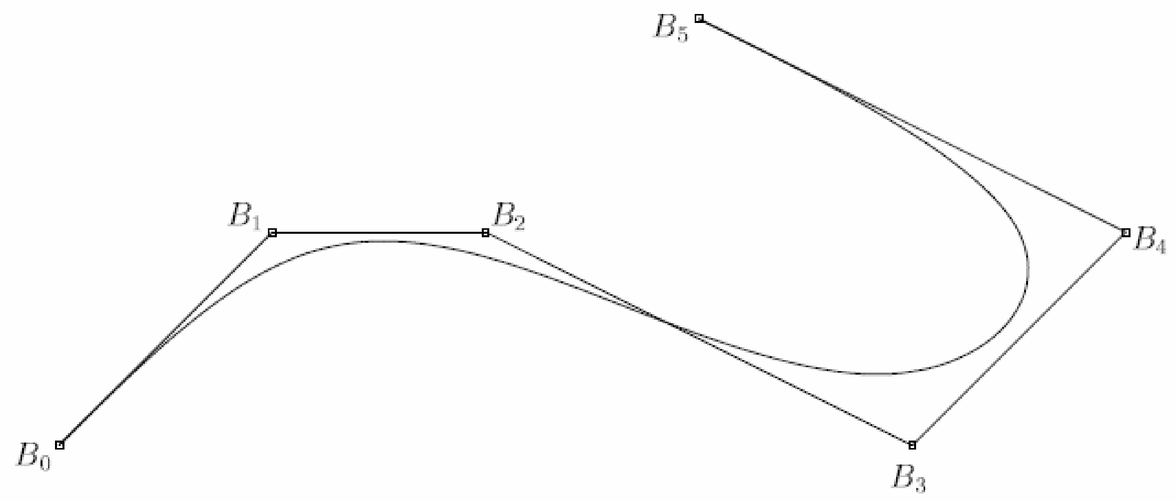
A- frame konfiguracija tačaka P_1, P_2, A, S, Q_1, i Q_2 ispunjava uslov da je
P_2 središte duži P_1 i A,
Q_1 središte duži A i Q_2,
S središte duži P_2 i Q_1.



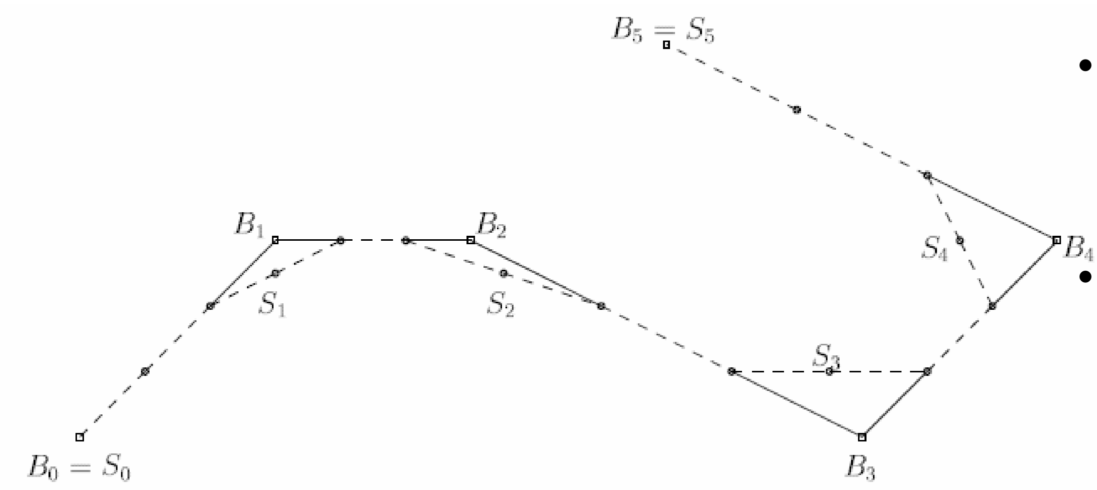
Ukoliko se dve Bezier-ove krive
nadovezuju u tački S, tako da su u toj tački njihovi prvi i drugi izvodi jednaki,
onda kontrolne tačke ovih krivih obrazuju A-frame konfiguraciju (i obrnuto).

Konstrukcija Bezier-ovog splajna za date kontrolne tačke

Za date (kontrolne) tačke B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 konstruisati B-splajn kao na slici (splajn koji je po delovima Bezier-ova kriva, klase C^2).

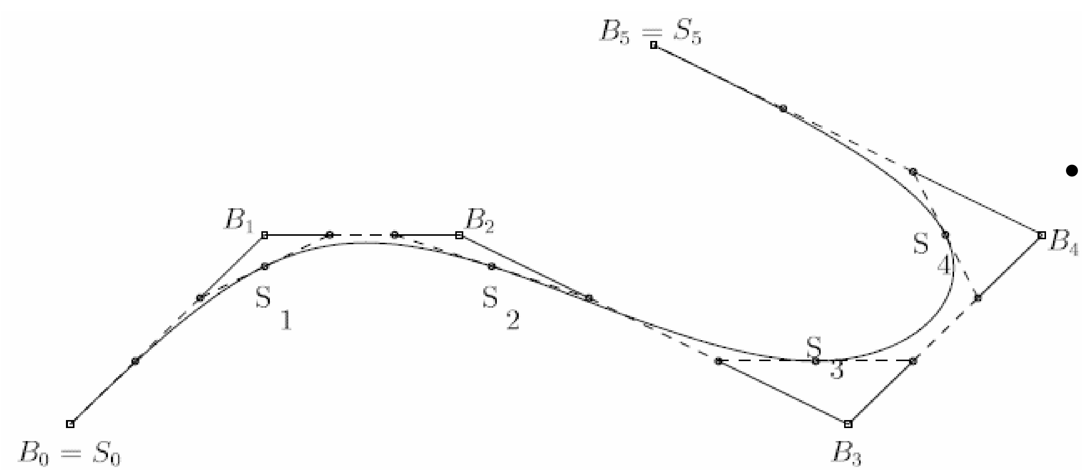


Konstrukcija Bezier-ovog splajna za date kontrolne tačke



- Podeliti svaku duž određenu datim tačkama na tri dela.
- Označiti da je $S_0=B_0$ i $S_n=B_n$.

- Za ostale tačke B_i
  - spojiti dve susedne generisane deobne tačke.
  - sredina svake tako generisane duži je tačka S_i koja pripada traženom splajnu.



- Kontrolne tačke svake Bezier-ove krive na segmentu su S_{i-1}, dve generisane deobne tačke i tačka S_i.

Konstrukcija Bezier-ovog splajna za date kontrolne tačke

- Na osnovu konstrukcije kontrolnih tačaka delova splajna očigledno je da su zadovoljeni uslovi neprekidnosti i neprekidnosti prvog i drugog izvoda (uočavamo konstruisane A-frame konfiguracije).
- Na osnovu konstrukcije jasno je da smo generisali prirodni splajn.
- Opisanim postupkom generišemo kontrolne tačke Bezier-ovih krivih na svakom segmentu, u funkciji datih kontrolnih tačaka splajna.

Konstrukcija Bezier-ovog splajna za date kontrolne tačke

$$S_i = \underbrace{\tfrac{1}{2}\underbrace{(\tfrac{1}{3}B_{i-1} + \tfrac{2}{3}B_i)}_{\text{Deobna tačka susedna tački } B_i \text{, na segmentu } B_{i-1}B_i} + \tfrac{1}{2}\underbrace{(\tfrac{2}{3}B_i + \tfrac{1}{3}B_{i+1})}_{\text{Deobna tačka susedna tački } B_i \text{, na segmentu } B_i B_{i+1}}}_{\text{Tačka Si kao sredina duži određene navedenim deobnim tačkama}} = \tfrac{1}{6}B_{i-1} + \tfrac{2}{3}B_i + \tfrac{1}{6}B_{i+1},$$

$$i = 1, \ldots, n-1,$$

$$S_0 = B_0,\ S_n = B_n$$

Kontrolne tačke i-te Bezier-ove krive su

$$S_{i-1},\ \tfrac{2}{3}B_{i-1} + \tfrac{1}{3}B_i,\ \tfrac{1}{3}B_{i-1} + \tfrac{2}{3}B_i,\ \ S_i$$

Konstrukcija Bezier-ovog splajna za date kontrolne tačke

Ako je *pi(t)* za *0≤t≤1* Bezier-ova kriva nad segmentom *i, i=1,2,...,n,*
onda je (uniformni prirodni) splajn P(t) za *0≤t≤n* definisan na sledeći način:

$$P(t) = p_1(t) \quad 0 \leq t \leq 1,$$

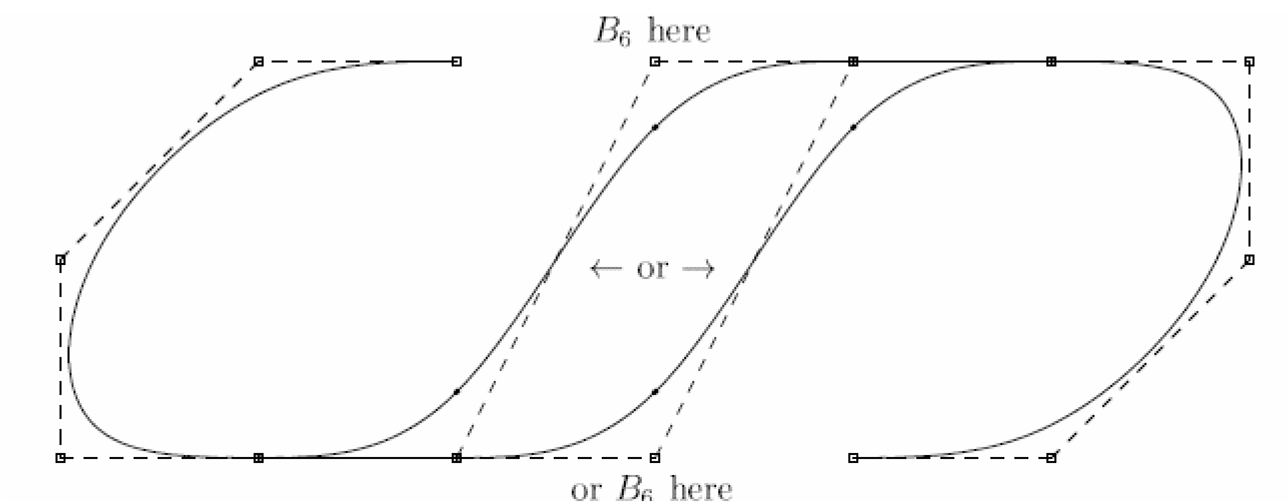
$$P(t) = p_2(t-1) \quad 1 \leq t \leq 2,$$

$$P(t) = p_i(t-(i-1)) \quad i-1 \leq t \leq i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Lokalna kontrola Bezier-ovog splajna

Svaka kontrolna tačka *i*-te Bezier-ove krive određuje se korišćenjem 4 date kontrolne tačke splajna*, Bi-2, Bi-1, Bi, Bi+1*.

Svaka data kontrolna tačka *Bi* splajna utiče na 4 Bezier-ove krive:
dve koje se nadovezuju u tački *Si* i dve njima susedne.



Interpolacija prirodnim kubnim splajnom

Pretpostavimo da rešavamo standardan problem interpolacije:
Za date tačke S_i odrediti prirodni kubni splajn koji kroz njih prolazi.

Problem možemo rešiti konstruišući odgovarajuće Bezier-ove krive čije su krajnje kontrolne tačke upravo date tačke S_i.
Postupak podrazumeva da prvo odredimo kontrolne tačke Bezier-ovog splajna, a zatim kontrolne tačke pojedinačnih Bezier-ovih krivih.

Koristimo već formulisane veze između tačaka S_i i B_i. Može se izvesti i rešiti sledeći matrični zapis sistema jednačina po B_i:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6S_1 - S_0) \\ 6S_2 \\ 6S_3 \\ (6S_4 - S_5) \end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{6}B_{i-1} + \tfrac{2}{3}B_i + \tfrac{1}{6}B_{i+1} = S_i.$$

$$1 \cdot B_{i-1} + 4 \cdot B_i + 1 \cdot B_{i+1} = 6 \cdot S_i.$$

$$B_0 + 4B_1 + B_2 = 6S_1 \qquad B_0 = S_0$$

Primena splajnova u animaciji

- Pretpostavimo da imamo niz kadrova (key-frames) koji prikazuju položaj animiranog lika u momentima t=0,1,2,...,n.
- Želimo da generišemo među-kadrove koji odgovaraju položajima posmatranog lika tokom kretanja od jedne zadate pozicije do druge, pri čemu je putanja kretanja glatka kriva.
- Pretpostavimo da je animirani lik u svakom kadru prikazan određenim brojem tačaka u ravni. Neka je broj tih tačaka, recimo, 15. Svaka tačka opisana je dvema vrednostima (koordinatama). Dakle, svaki kadar sadrzi reprezentaciju lika u obliku tačke sa 30 koordinata.
- Možemo reći i da je svaki kadar tačka (element) posmatranog 30-todimenzionalnog prostora.
- Ključni korak je definisanje interpolacione krive koja je određena datim čvorovima –uređenim tridesetorkama koje predstavljaju kadrove.
- Za svaku od 30 koordinata generišemo parametarsku interpolacionu krivu (Bezier-ovu, ili neku drugu).
- Za određenu vrednost parametra t određujemo vrednost interpolacionog splajna određujući vrednost svake od 30 koordinata.

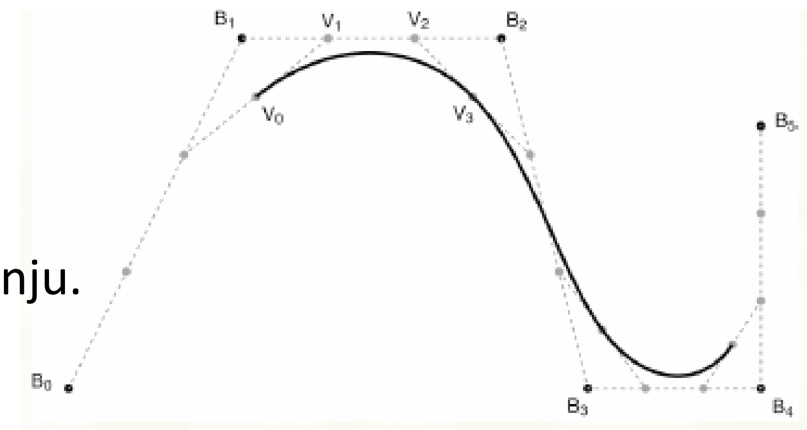
Interpolacija krivih: Splajnovi

B-splajnovi

Splajn kao linearna kombinacija B-splajnova

Splajn kao linearna kombinacija B(aznih)-splajnova

Kontrolne tačke splajna na prikazanoj slici su B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5.
To su, u opštem slučaju, tačke kojima raspolažemo (koje su zadate).



Splajn, međutim, ne prolazi ni kroz jednu od kontrolnih tačaka.

Bezier-ove krive trećeg stepena imaju 4 kontrolne tačke. Kriva prolazi kroz prvu i poslednju.

Uočimo da su kontrolne tačke svakog Bezier-ovog segmenta različite od kontrolnih tačaka splajna. Na slici, to su, recimo, tačke V_0, V_1, V_2, V_3. Pri tome, Bezier-ov segment (a samim tim i rezultujući splajn) prolazi kroz tačke V_0, V_3.

Znamo da se Bezier-ov segment može analitički izraziti u funkciji svojih kontrolnih tačaka V_0, V_1, V_2, V_3.
Želimo, takođe, da ga izrazimo u funkciji kontrolnih tačaka splajna, B_0, B_1, B_2, B_3.

Splajn kao linearna kombinacija B(aznih)-splajnova

Polazimo od ranije izvedenog rezultata da je Bezier-ov polinom trećeg stepena, sa kontrolnim tačkama V_0, V_1, V_2, V_3 oblika

$$p(t) = (1-t)^3 V_0 + 3t(1-t)^2 V_1 + 3t^2(1-t)V_2 + t^3 V_3$$

i da za kontrolne tačke V_0, V_1, V_2, V_3 važi da se mogu izraziti kao

$$V_0 = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{3}B_0) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{3}B_2) = \frac{1}{6}B_0 + \frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{6}B_2$$

$$V_1 = \frac{2}{3}B_1 + \frac{1}{3}B_2$$

$$V_2 = \frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{3}B_1$$

$$V_3 = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{3}B_1) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{3}B_3) = \frac{1}{6}B_1 + \frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{6}B_3$$

Splajn kao linearna kombinacija B(aznih)-splajnova

Uvrštavanjem i odgovarajućim grupisanjem, uz izmenu oznaka u kojoj sada kontrolne tačke splajna označavamo sa P_0, P_1, P_2, P_3 (radi usklađivanja sa dalje korišćenom standardnom notacijom), dobijamo

$$p(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1)P_0 + \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)P_1 + \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)P_2 + \frac{1}{6}t^3 P_3$$

što je izraz za (jedan) Bezier-ov segment splajna u obliku linearne kombinacije **b(aznih)-splajnova**, a sa koeficijentima koji su jednaki kontrolnim tačkama splajna koje kontrolišu posmatrani segment.

Dakle,

$$p(t) = B_{0,4}P_0 + B_{1,4}P_1 + B_{2,4}P_2 + B_{3,4}P_3$$

pri čemu je

$$B_{0,4}(t) = \frac{1}{6}(-t^3 + 3t^2 - 3t + 1), \qquad B_{1,4}(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4)$$

$$B_{2,4}(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \qquad B_{3,4}(t) = \frac{1}{6}t^3$$

Splajn kao linearna kombinacija B(aznih)-splajnova

Matrični zapis izraza

$$p(t)=\frac{1}{6}(-t^3+3t^2-3t+1)P_0+\frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4)P_1+\frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1)P_2+\frac{1}{6}t^3P_3$$

je

$$p(t)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}P_0 & P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 0 & 4\\ -3 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^3\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}$$

(Napomena: navedena matrična forma se nekad navodi u transponovanom obliku.)

Splajn
kao linearna kombinacija B-splajnova

Do izraza za bazne funkcije (b-splajnove) došli smo geometrijski, i to za kubni splajn. Uopštenje ovog pristupa, i generisanje baznih splajnova proizvoljnog reda moguće je korišćenjem rekurentnih formula:

$$B_{k,1}(t) = \begin{cases} 1 & t_k \le t \le t_{k+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{k,d}(t) = \left(\frac{t - t_k}{t_{k+d-1} - t_k} \right) B_{k,d-1}(t) + \left(\frac{t_{k+d} - t}{t_{k+d} - t_{k+1}} \right) B_{k+1,d-1}(t)$$

- Rekurentna veza počinje B-splajnovima prvog reda (*d=1*) i gradi splajnove višeg reda.
- Splajn 4-reda je linearna kombinacija polinoma trećeg stepena. Ovaj splajn (reda d=4) nam je najinteresantniji.
- Ovaj algoritam poznat je kao **Cox - de Boor** algoritam.

Uniformni kubni B-splajnovi

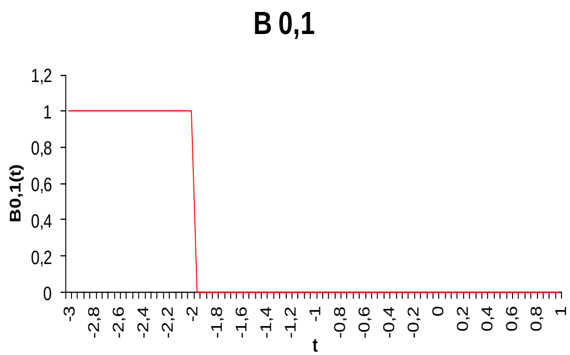
- Čvorovi uniformnog kubnog B-splajna su na jednakom međusobnom rastojanju – uzimamo da su

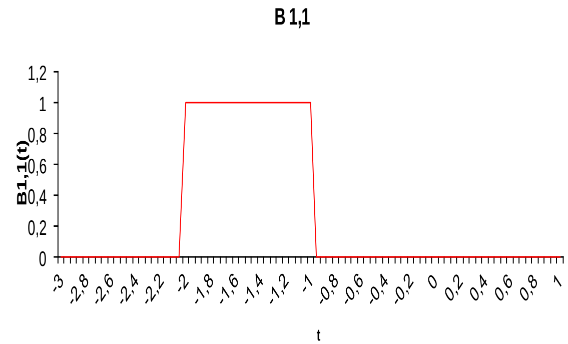
$$(-3,-2,-1,0,1,\ldots,n+1)$$

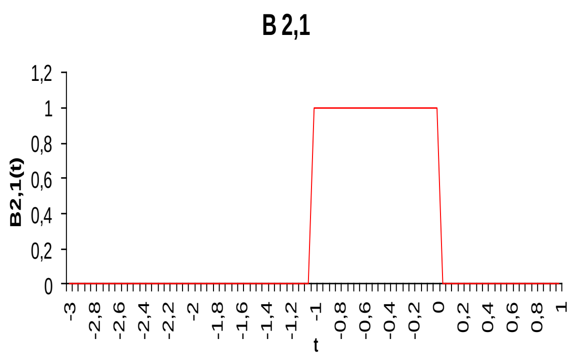
- Svaka bazna funkcija (B-splajn) je različita od nule za vrednost parametra t u intervalu dužine d (d je red splajna).
- Bazna funkcija kubnog splajna je različita od nule na intervalu dužine 4; svaka zavisi od vrednosti 4 čvora.
- Važna osobina baznih funkcija istog reda je da se jedna od druge mogu dobiti translacijom:

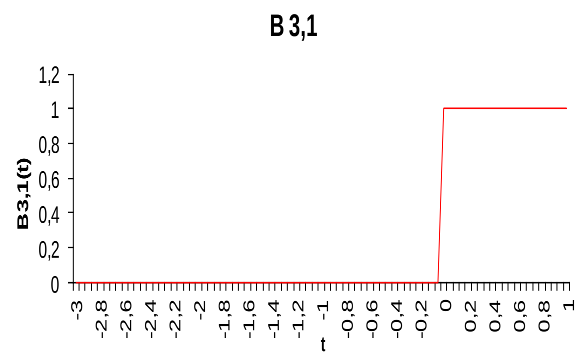
$$B_{k,d}(t)=B_{k+1,d}(t+1)$$

$B_{k,1}$ grafički prikaz b-splajnova prvog reda

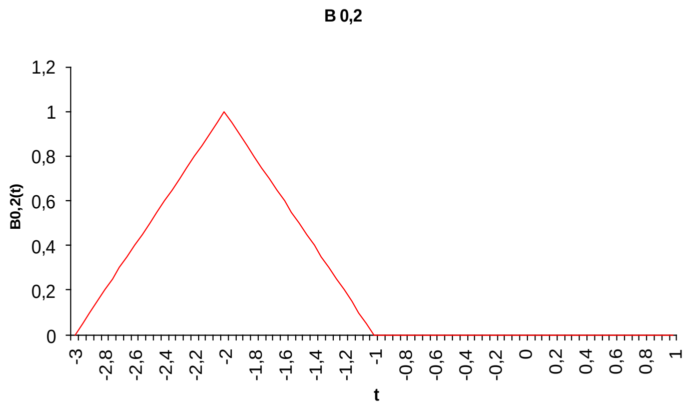


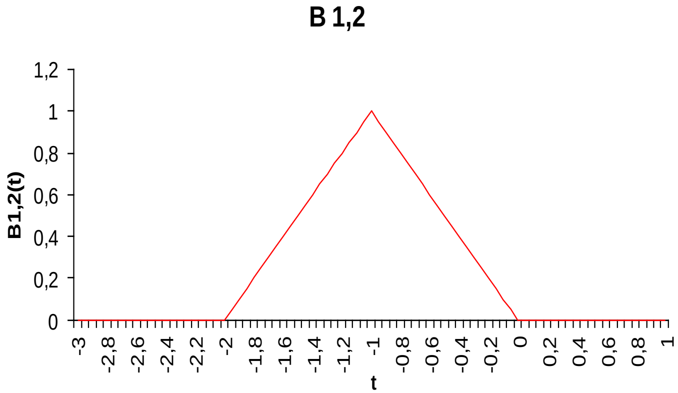


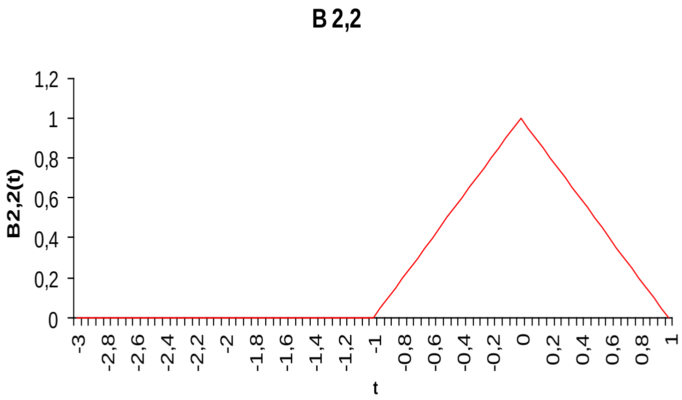




$B_{k,2}$ grafički prikaz b-splajnova drugog reda







$$B_{0,2}(t) = \begin{cases} t+3 & -3 \le t < -2 \\ -1-t & -2 \le t < -1 \end{cases}$$

$B_{k,1}$ analitički izraz b-splajnova prvog reda

$$B_{0,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_0 \le u < t_1 \text{, implying } 0 \le u < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{1,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_1 \le u < t_2 \text{, implying } 1 \le u < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{2,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_2 \le u < t_3 \text{, implying } 2 \le u < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{3,1}(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } t_3 \le u < t_4 \text{, implying } 3 \le u < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$B_{k,2}$ analitički izraz b-splajnova drugog reda

$$B_{0,2}(u) = \frac{u-t_0}{t_1-t_0}B_{0,1}(u) + \frac{t_2-u}{t_2-t_1}B_{1,1}(u)$$
$$= uB_{0,1}(u) + (2-u)B_{1,1}(u)$$

$$B_{1,2}(u) = \frac{u-t_1}{t_2-t_1}B_{1,1}(u) + \frac{t_3-u}{t_3-t_2}B_{2,1}(u)$$
$$= (u-1)B_{1,1}(u) + (3-u)B_{2,1}(u)$$

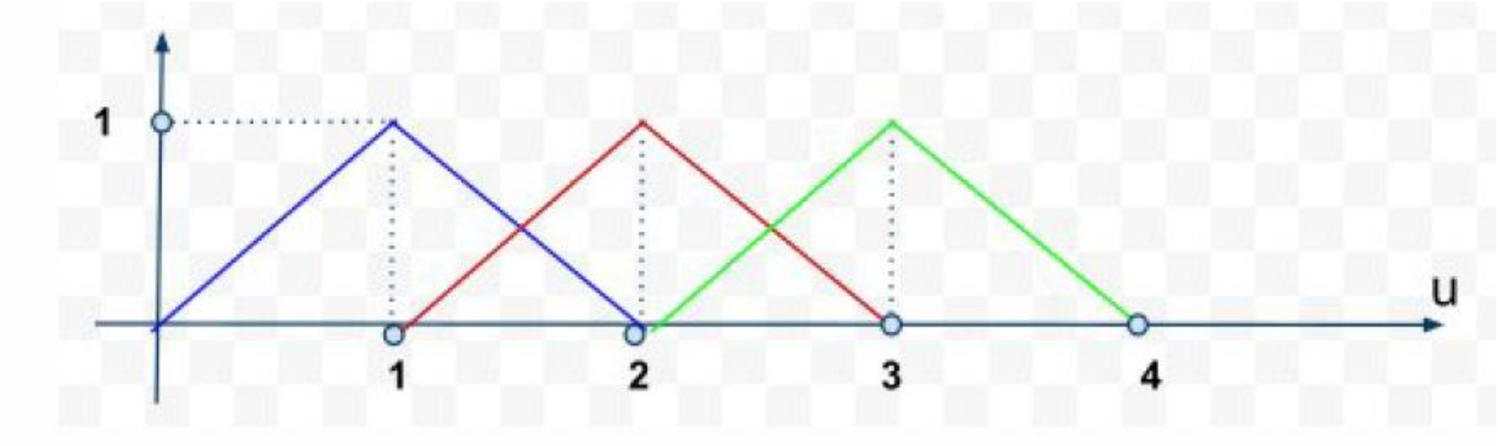
$$B_{2,2}(u) = \frac{u-t_2}{t_3-t_2}B_{2,1}(u) + \frac{t_4-u}{t_4-t_3}B_{3,1}(u)$$
$$= (u-2)B_{2,1}(u) + (4-u)B_{3,1}(u)$$

$B_{k,2}$ analitički izraz b-splajnova drugog reda

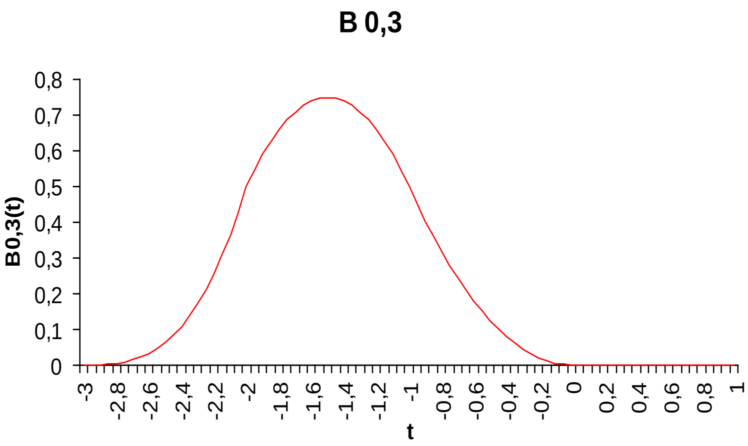
$$B_{0,2}(u) = u1_{(0\leq u<1)} + (2-u)1_{(1\leq u<2)}$$

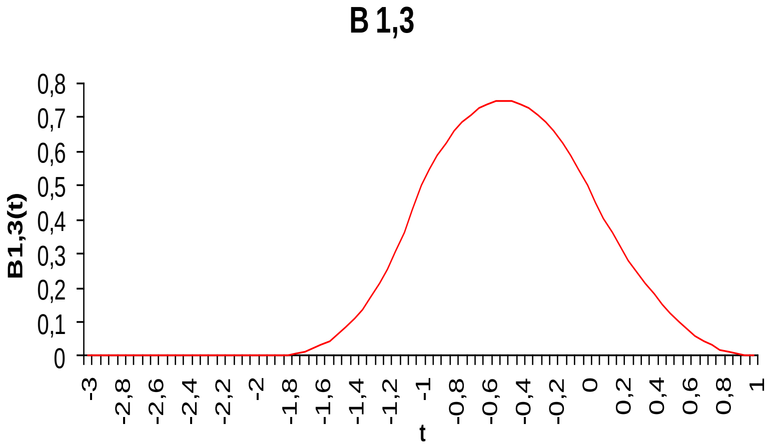
$$B_{1,2}(u) = (u-1)1_{(1\leq u<2)} + (3-u)1_{(2\leq u<3)}$$

$$B_{2,2}(u) = (u-2)1_{(2\leq u<3)} + (4-u)1_{(3\leq u<4)}$$



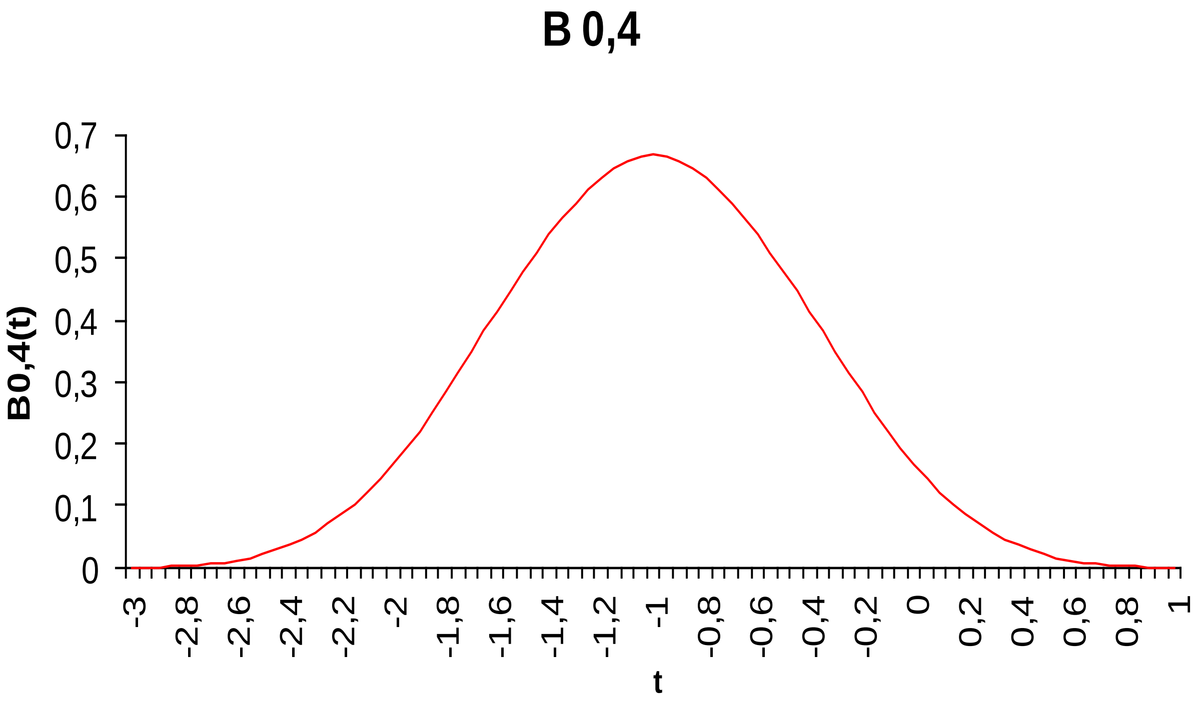
$B_{k,3}$ grafički prikaz b-splajnova trećeg reda





$$B_{0,3}(t)=\frac{1}{2}\begin{cases}(t+3)^2 & -3\le t<-2\\ -2t^2-6t-3 & -2\le t<-1\\ t^2 & -1\le t<0\end{cases}$$

$B_{0,4}$ grafički prikaz b-splajna četvrtog reda

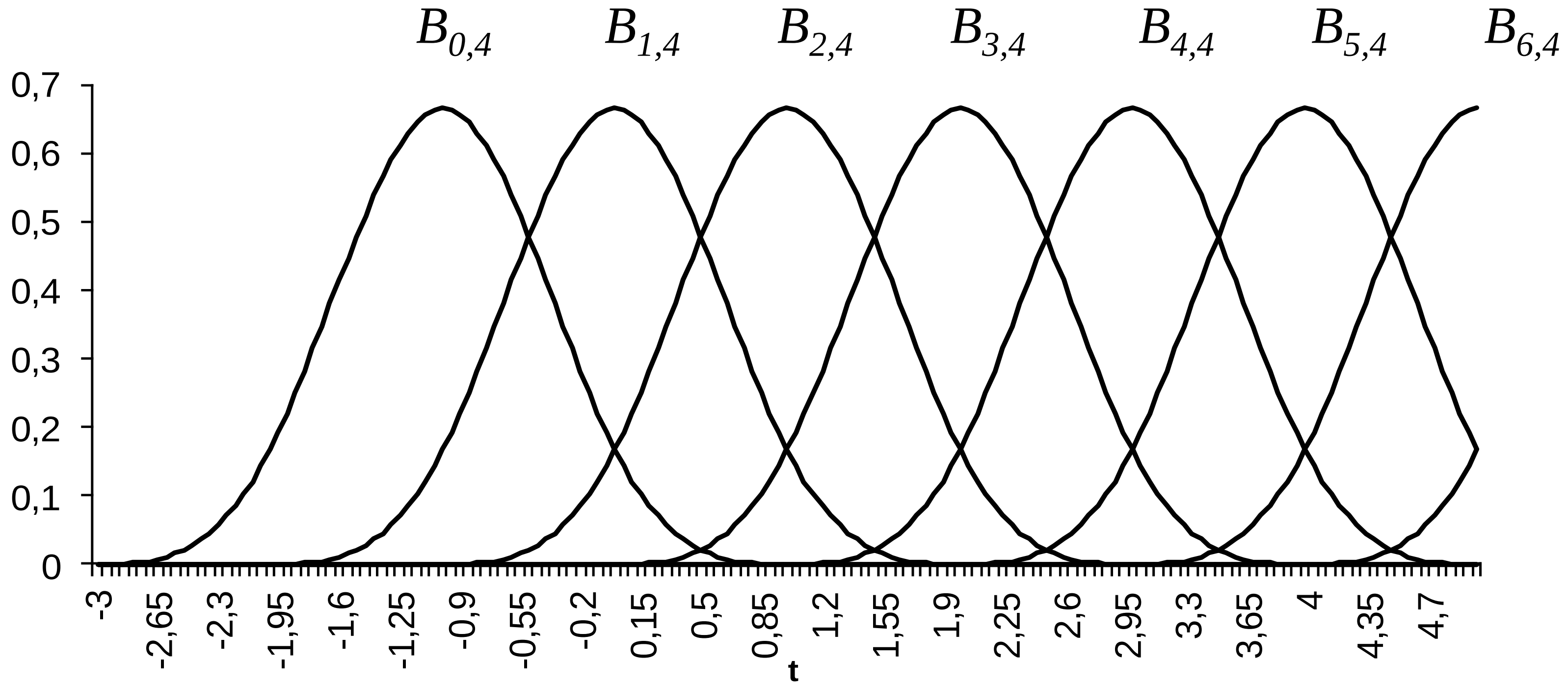


$B_{0,4}$ analitički izraz b-splajna četvrtog reda

$$B_{0,4}(t) = \frac{1}{6}\begin{cases} (t+3)^3 & -3 \le t < -2 \\ -3t^3 - 15t^2 - 21t - 5 & -2 \le t < -1 \\ 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & -1 \le t < 0 \\ (1-t)^3 & 0 \le t < 1 \end{cases}$$

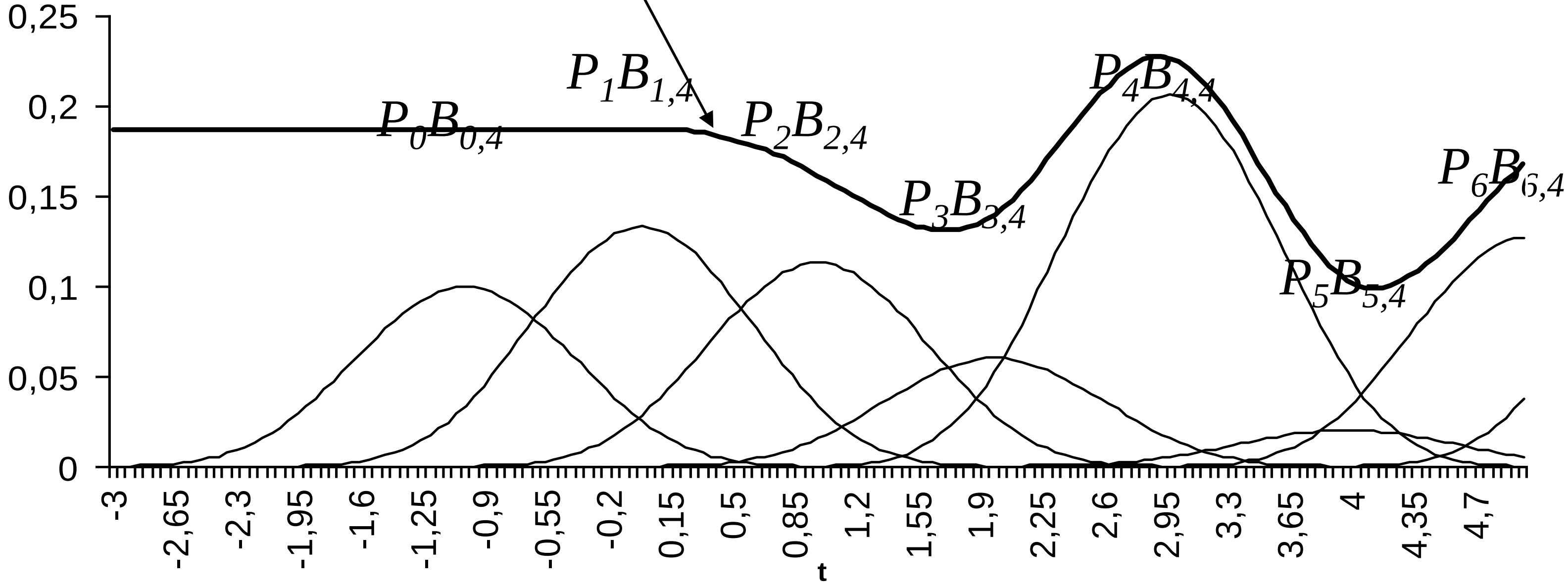
(Podsetimo se: ovde su posmatrani čvorovi -3, -2, -1, 0.)

Uniformni B-splajnovi četvrtog reda (trećeg stepena)



Kriva kao linearna kombinacija B-splajnova

$$X(t)=\sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,4}(t)$$

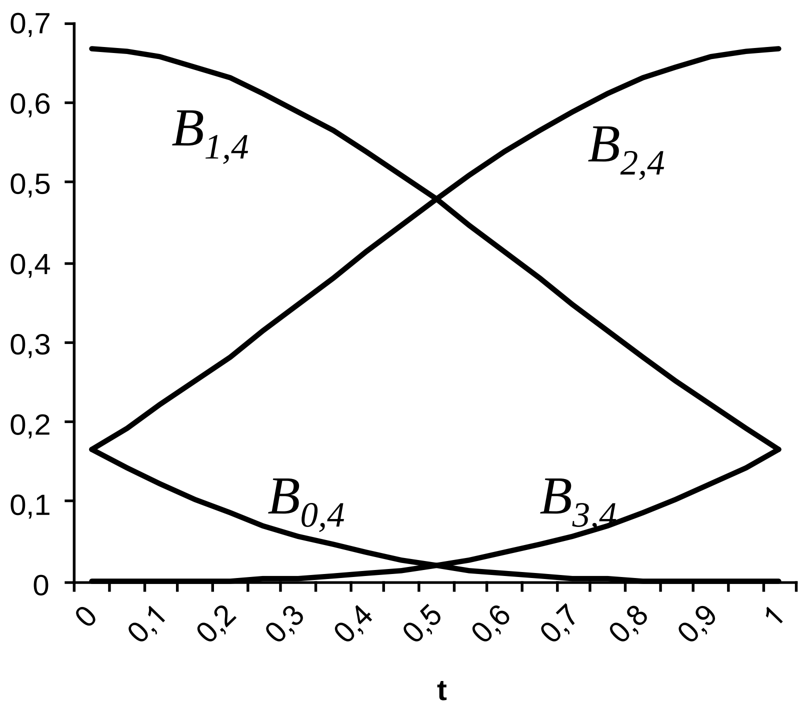


Da bismo predstavili vrednosti proizvoljne splajn funkcije,
bazne splajn-funkcije množimo vrednostima datih kontrolnih tačaka i sabiramo.

Uniformni B-splajnovi četvrtog reda

- U svakoj tački *t* postoje 4 ne-nula bazne funkcije (B-splajna).
- Svaka od tih funkcija je translirana verzija funkcije $B_{0,4}$
- Na intervalu $0 \leq t < 1$
  - Uzimamo četvrti podsegment krive $B_{0,4}$
  - Uzimamo treći podsegment krive $B_{1,4}$
  - Uzimamo drugi podsegment krive $B_{2,4}$
  - Uzimamo prvi podsegment krive $B_{3,4}$

Bazne funkcije na intervalu [0,1]



$$x(t) = P_0 B_{0,4}(t) + P_1 B_{1,4}(t) + P_2 B_{2,4}(t) + P_3 B_{3,4}(t)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} P_0\left(1 - 3t + 3t^2 - t^3\right) \\ + P_1\left(4 - 6t^2 + 3t^3\right) \\ + P_2\left(1 + 3t + 3t^2 - 3t^3\right) \\ + P_3\left(t^3\right) \end{bmatrix}$$

(Navedeni polinomi su nam poznati,
izveli smo ih koristeći geometrijski pristup!)

Uniformni B-splajn na [0,1)

- Četiri kontrolne tačke su potrebne da bismo definisali krivu na intervalu $0 \le t < 1$
- Vrednosti baznih funkcija su u zbiru jednake 1 za svaku vrednost t, i sve su pozitivne.
  - Kriva je sadržana u konveksnom omotaču datih kontrolnih tačaka.

- Matrična forma (koju smo takođe već naveli u vezi sa geometrijskim izvođenjem) rezultujućeg splajna je

$$x(t) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uniformni B-splajn na proizvoljnom intervalu

- Interval *[i,i+1)* posmatramo isto kao i interval *[0,1)*
  - Vrednost parametra pomeramo za *i*
  - Koristimo odgovarajući skup kontrolnih tačaka.
- Da bismo izračunali vrednost uniformnog kubnog B-splajna u proizvoljnoj vrednosti parametra *t*:
  - Odredimo najveći ceo broj *i* koji je manji ili jednak sa *t*
  - Izračunamo:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{3} P_{i+k} B_{k,4}(t-i)$$

- Dozvoljene vrednosti parametra t su $0 \le t < n-3$, gde je *n* broj kontrolnih tačaka.