Interpolacija krivih: Splajnovi

Interpolacioni kubni splajnovi

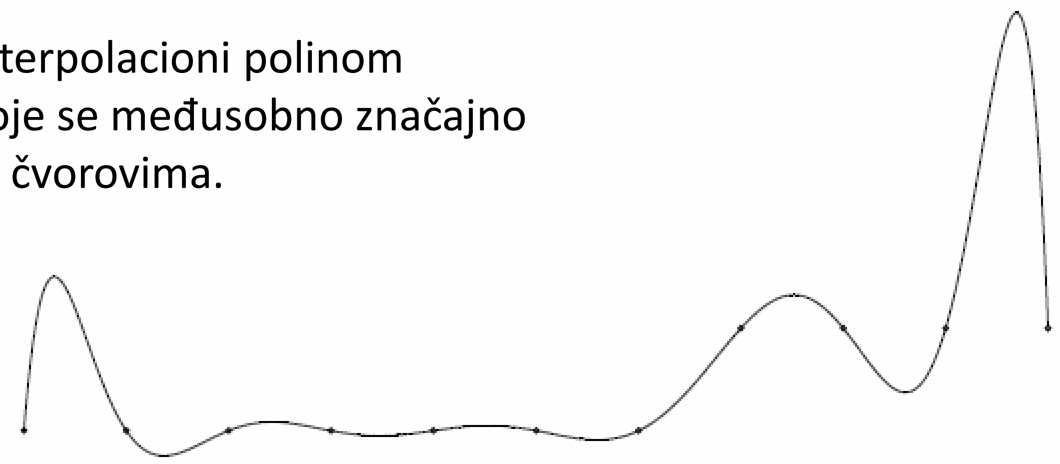
Interpolacija – veći broj čvorova

- Interpolacioni (i Bezier-ov) polinom trećeg stepena konstruišemo znajući 4 kontrolne tačke (čvora).
- **Šta ukoliko je dat veći broj tačaka koje treba da pripadaju interpolacionoj krivoj?**
- Konstrukcija interpolacionog polinoma višeg stepena.

- Nedostaci interpolacije polinomom višeg stepena:
  - Velike “oscilacije” – Runge-ov fenomen;
  - Globalna kontrola – svaki čvor utiče na oblik cele krive;
  - Velika “osetljivost” na male promene vrednosti.

Polinom ili ... splajn?

Za datih 11 čvorova interpolacije interpolacioni polinom
10-tog stepena postiže vrednosti koje se međusobno značajno
razlikuju od vrednosti u (susednim) čvorovima.
Ovo ponašanje je nepoželjno.



Bilo bi pogodno odrediti interpolacionu krivu koja
manje osciluje u odnosu na zadate čvorove. Primer
poželjnog rešenja je prikazan na slici.

Interpolacioni kubni splajn

Za date tačke (čvorove interpolacije)

$$\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$$

određujemo **po delovima polinomnu** interpolacionu krivu.

Uslov **neprekidnosti** možemo ispuniti po delovima **linearnom** interpolacijom.
Uslov **neprekidnosti prvog izvoda** možemo ispuniti po delovima **kvadratnom** interpolacijom.
Uslov **neprekidnosti drugog izvoda** možemo ispuniti po delovima **kubnom** interpolacijom.

Polinom trećeg stepena je oblika

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Za određivanje njegovih koeficijenata potrebne su 4 jednačine.
Ovakav polinom ispunjava željene uslove neprekidnosti (funkcije i izvoda do drugog reda) na posmatranim podintervalima. Potrebno je obezbediti neprekidnost u čvorovima.

Interpolacioni kubni splajn

Za skup čvorova $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$

konstruišemo kubni splajn S tako da budu zadovoljeni sledeći uslovi:

- **S** je polinom trećeg stepena **Sj** na podintervalima $[x_j, x_{j+1}]$, za j=0,1,...,n-1;
- $S(x_j) = f(x_j)$ za j=0,1,...,n-2;
- $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ za j=0,1,...,n-2;
- $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ za j=0,1,...,n-2;

- Zadovoljen je **granični uslov**

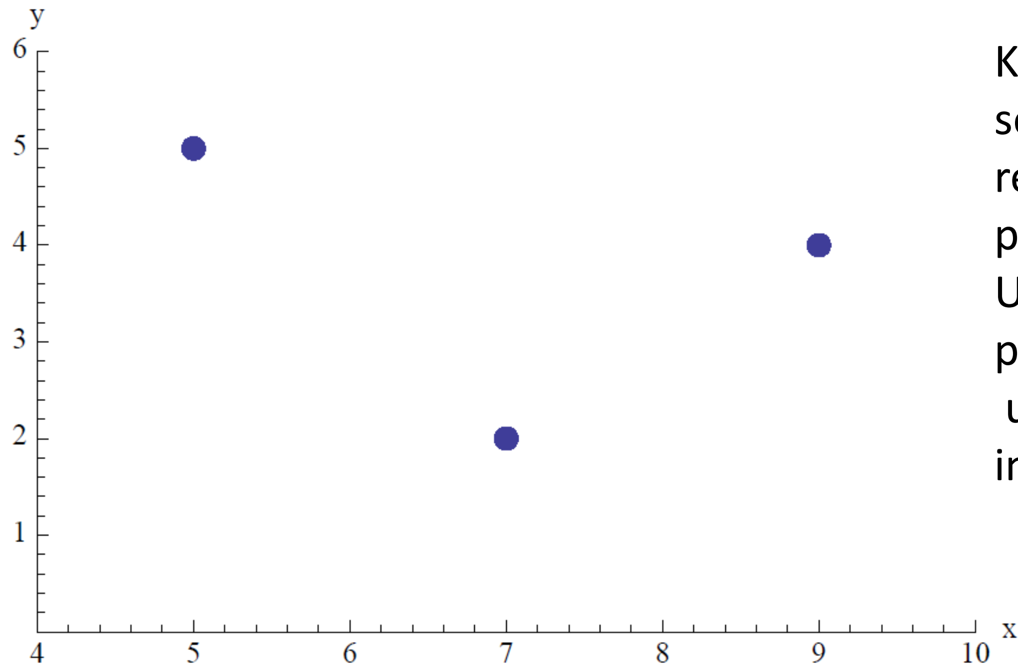
$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$ (za prirodni splajn)

Ili

$$S'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{i} \quad S'(x_n) = f'(x_n)$$ (za potpuni splajn)

Interpolacioni kubni splajn - primer

Konstruisaćemo prirodni kubni splajn za čvorove $\{(5,5),\ (7,2),\ (9,4)\}$



Kako tri data čvora određuju dva segmenta, jasno je da će se rezultujući splajn sastojati od dva polinima trećeg stepena.
Uslov da je rezultujući splajn prirodni nameće uslove na drugi izvod u rubnim tačkama posmatranog intervala.

Interpolacioni kubni splajn - primer

Dakle, odredićemo 8 nepoznatih koeficijenata za 2 polinoma trećeg stepena:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x-5) + c_0(x-5)^2 + d_0(x-5)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x-7) + c_1(x-7)^2 + d_1(x-7)^3$$

Uslovi koji treba da budu zadovoljeni su:

Neprekidnost u čvorovima:

$$\begin{aligned} 5 &= S_0(5) = a_0 \\ 2 &= S_0(7) = a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 \\ 2 &= S_1(7) = a_1 \\ 4 &= S_1(9) = a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 \end{aligned}$$

Neprekidnost prvog i drugog izvoda za *x=7*

$$\begin{aligned} S_0'(7) = b_0 + 4c_0 + 12d_0 &= b_1 = S_1'(7) \\ S_0''(7) = 2c_0 + 12d_0 = 2c_1 &= S_1''(7) \end{aligned}$$

Granični uslovi prirodnog splajna:

$$\begin{aligned} S_0''(5) &= 0 = 2c_0 \\ S_1''(9) &= 0 = 2c_1 + 12d_1 \end{aligned}$$

Interpolacioni kubni splajn - primer

Odgovarajući sistem 8 linearnih jednačina
sa 8 nepoznatih je

$$
\begin{aligned}
5 &= a_0 \\
2 &= a_0 + 2b_0 + 4c_0 + 8d_0 \\
2 &= a_1 \\
4 &= a_1 + 2b_1 + 4c_1 + 8d_1 \\
0 &= b_0 + 4c_0 + 12d_0 - b_1 \\
0 &= 2c_0 + 12d_0 - 2c_1 \\
0 &= 2c_0 \\
0 &= 2c_1 + 12d_1
\end{aligned}
$$

a njegovo rešenje je

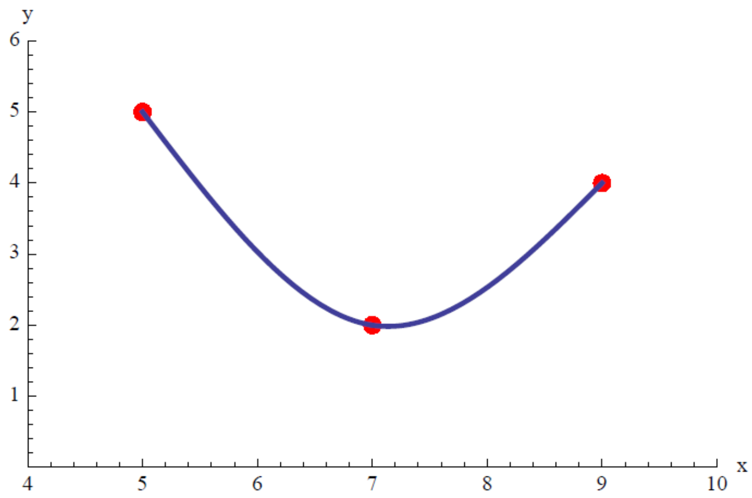
i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	5	$-\frac{17}{8}$	0	$\frac{5}{32}$
1	2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{15}{16}$	$-\frac{5}{32}$

Interpolacioni kubni splajn - primer

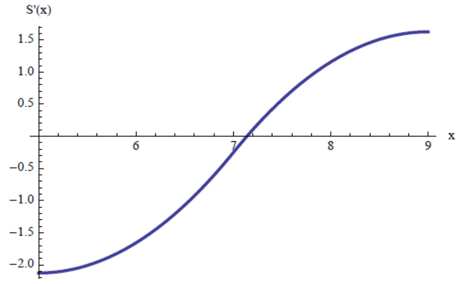
Traženi splajn je, dakle,

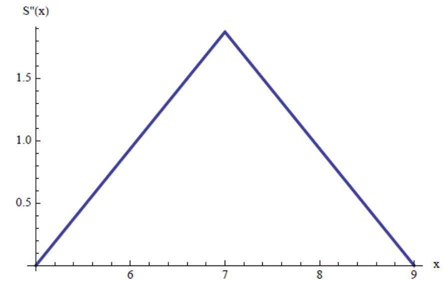
$$S(x) = \begin{cases} 5 - \frac{17}{8}(x-5) + \frac{5}{32}(x-5)^3 & \text{if } 5 \le x \le 7 \\ 2 - \frac{1}{4}(x-7) + \frac{15}{16}(x-7)^2 - \frac{5}{32}(x-7)^3 & \text{if } 7 \le x \le 9 \end{cases}$$

a njegov grafik je



Grafici prvog i drugog izvoda dobijenog splajna potvrđuju neprekidnost ovih funkcija





Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Za *n+1* dati čvor interpolacije $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$

određujemo *n* polinoma trećeg stepena

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

koji imaju *4n* nepoznatih koeficijenata a_j, b_j, c_j, d_j.

Označimo $h_j = x_{j+1} - x_j$

Tada je

$$\begin{aligned} S_j(x_j) &= a_j = f(x_j) \\ S_{j+1}(x_{j+1}) &= a_{j+1} = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \end{aligned}$$

Uočimo da smo do sada odredili *n* (od *4n*) nepoznatih.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Polazeći od toga da je **prvi izvod** posmatranih polinoma

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

dobijamo uslove kojima obezbeđujemo **neprekidnost prvog izvoda** (jednakost levog i desnog izvoda u čvorovima):

$$\begin{aligned} S_j'(x_j) &= b_j \\ S_{j+1}'(x_{j+1}) &= b_{j+1} = S_j'(x_{j+1}) = b_j + 2c_jh_j + 3d_jh_j^2 \end{aligned}$$

Ovim smo definisali *2n* jednačina sa preostalih *3n* nepoznatih.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Drugi izvod posmatranih polinoma je

$$S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j) \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

a odatle **neprekidnost drugog izvoda** splajna u čvorovima (jednakost levog i desnog izvoda) postižemo uslovima

$$\begin{aligned} S_j''(x_j) &= 2c_j \\ S_{j+1}''(x_{j+1}) &= 2c_{j+1} = S_j''(x_{j+1}) = 2c_j + 6d_j h_j \end{aligned}$$

Ovim smo definisali ukupno *3n* jednačina za *3n* nepoznatih.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Dakle, sistem *3n* jednačina za koji smo definisali je, za $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$
\begin{aligned}
a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \\
b_{j+1} &= b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 \\
c_{j+1} &= c_j + 3d_j h_j .
\end{aligned}
$$

Možemo ga rešiti tako što ćemo iz treće jednačine izraziti

$$\boxed{d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}}$$

i ovaj izraz uvrstiti u prethodne dve.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} a_{j+1} &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + \left(\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}\right) h_j^3 \\ &= a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \\ b_{j+1} &= b_j + 2c_j h_j + 3\left(\frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}\right) h_j^2 \\ &= b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \end{aligned}$$

Rešavanjem prve po *bj* dobijamo

$$\boxed{b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})}$$

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Reindeksiranjem prethodno dobijenog izraza dobijamo

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j)$$

a istim reindeksiranjem relacije $b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1})$

dobijamo

$$b_j = b_{j-1} + h_{j-1}(c_{j-1} + c_j)$$

Izraze za *bj-1* i *bj* sada možemo uvrstiti u preostalu jednačinu polaznog sistema.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Tada je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{h_j}{3}(2c_j+c_{j+1})\\
&= \quad \frac{1}{h_{j-1}}(a_j-a_{j-1})-\frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1}+c_j)+h_{j-1}(c_{j-1}+c_j)
\end{aligned}$$

Odnosno, odgovarajućim grupisanjem,

$$h_{j-1}c_{j-1}+2c_j(h_{j-1}+h_j)+h_jc_{j+1}=\frac{3}{h_j}(a_{j+1}-a_j)-\frac{3}{h_{j-1}}(a_j-a_{j-1})$$

$$j=1,2,\ldots,n-1$$

Ovim smo definisali *n-1* jednačinu sa *n+1* nepoznatom c_j.
Uočimo da su vrednosti a_j i h_j poznate (i određene samo vrednostima čvorova).

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Preostale dve potrebne jednačine su, za prirodni splajn,

$$S''(x_0) = S_0''(x_0) = 2c_0 = 0$$

odakle je $c_0 = 0$

i $$S''(x_n) = S_{n-1}''(x_n) = 2c_n = 0$$

odakle je $c_n = 0$.

Može se pokazati da definisani sistem od n+1 jednačine sa n+1 nepoznatom (koeficijentima splajna) ima jedinstveno rešenje, odnosno da važi da je, za dati skup od n+1 čvorova prirodni interpolirajući kubni splajn jednoznačno određen.

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Ako uvedemo oznaku

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Onda je matrični zapis sistema jednačina kojima određujemo *n+1* nepoznatu c_j

$$A \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Ukoliko konstruišemo **potpuni** splajn, definisaćemo odgovarajuće granične uslove, i prilagoditi opisani postupak.

Uslovi $S'(a) = S_0'(a) = f'(a) = b_0$ i $S'(b) = S_n'(b) = f'(b) = b_n$

generišu jednačine

$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1)$ odnosno, $\boxed{h_0(2c_0 + c_1) = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a)}$

i
$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{1}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{1}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n) \end{aligned}$$

odnosno,
$$\boxed{h_{n-1}(c_{n-1} + 2c_n) = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1})}$$

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Odgovarajuća matrica je sada

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix}$$

a sistem jednačina u matričnom obliku

$$A \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Interpolacioni kubni splajn, opšti slučaj

Konačno, znajući vrednosti *aj*, za *j=0,1,...,n*,
rešavamo definisani sistem jednačina po *cj*, za *j=0,1,...,n*,
a zatim izračunavamo preostale nepoznate

$$
\begin{aligned}
b_j &= \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(c_{j+1} + 2c_j) \\
d_j &= \frac{1}{3h_j}(c_{j+1} - c_j) \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

Interpolacioni kubni splajn, primer

Pretpostavimo da su čvorovi interpolacije za koje želimo da odredimo prirodni kubni Splajn navedeni u tabeli:

x	$f(x)$
-1.0	0.86199480
-0.5	0.95802009
0.0	1.0986123
0.5	1.2943767

Direktno čitamo da je:

$$n = 3$$

$$h_0 = h_1 = h_2 = 0.5$$

i

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.86199480,\ a_1 = 0.95802009, \\ a_2 &= 1.0986123,\ a_3 = 1.2943767. \end{aligned}$$

Matrična forma sistema kojim određujemo vrednosti koeficijenata c_j je

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 2.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 2.0 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.267402 \\ 0.331034 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

Interpolacioni kubni splajn, primer

Rešavajući matričnu jednačinu, a zatim uvrštavajući dobijene vrednosti c_j u izraze za d_j i b_j, dobijamo

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.861995	0.175638	0.0	0.0656509
1	0.95802	0.224876	0.0984763	0.028281
2	1.09861	0.344563	0.140898	−0.093918

Traženi splajn je, dakle,

$$S(x) = \begin{cases} 0.861995 + 0.175638(x+1) & \text{if } -1 \le x \le -0.5 \\ \quad + 0.0656509(x+1)^2 & \\ 0.95802 + 0.224876(x+0.5) & \\ \quad + 0.0984763(x+0.5)^2 & \text{if } -0.5 \le x \le 0 \\ \quad + 0.028281(x+0.5)^3 & \\ 1.09861 + 0.344563x & \text{if } 0 \le x \le 0.5 \\ \quad + 0.140898x^2 - 0.093918x^3 & \end{cases}$$

Poređenje različitih vrsta interpolacije

- Za dati skup čvorova interpolacije možemo konstruisati:
  - Interpolacioni polinom (Lagrange-ov, Hermite-ov, Bezier-ov)
  - Splajn
    - linearni, kvadratni, kubni...stepen krive na segmentu
    - prirodni, potpuni, not-a-knot rubni uslovi
    - Kvazi-Hermite-ov (Catmull-Rom) lokalna vs. globalna kontrola
    - Interpolacioni, Bezier-ov interpolaicija vs. aproksimacija
- Različite metode (početni uslovi, ulazni podaci) rezultuju krivama sa različitim sobinama.

Poređenje interpolacionih krivih

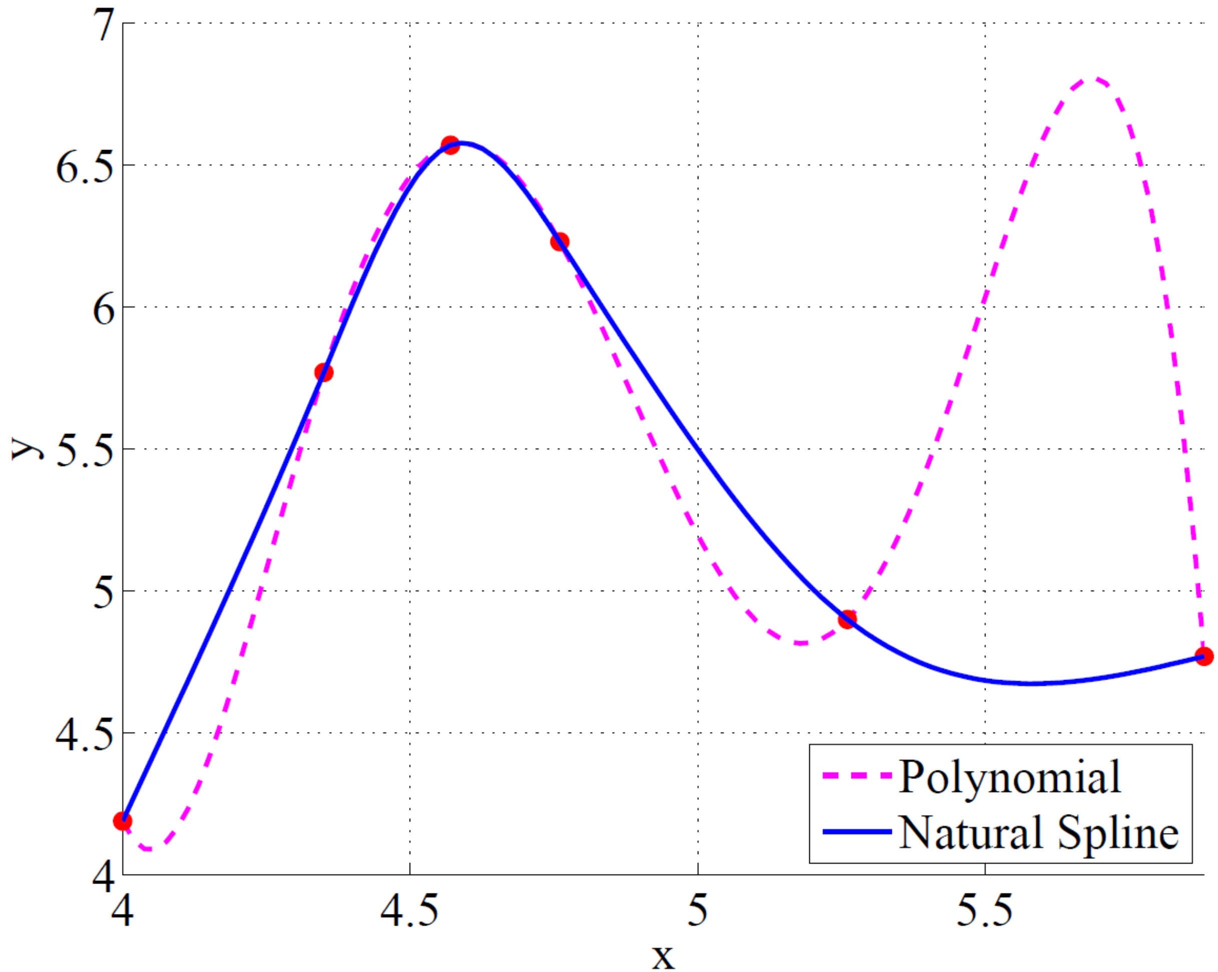
Ulazni podaci

x_i	4.00	4.35	4.57	4.76	5.26	5.88
y_i	4.19	5.77	6.57	6.23	4.90	4.77
h_i	0.35	0.22	0.19	0.50	0.62	

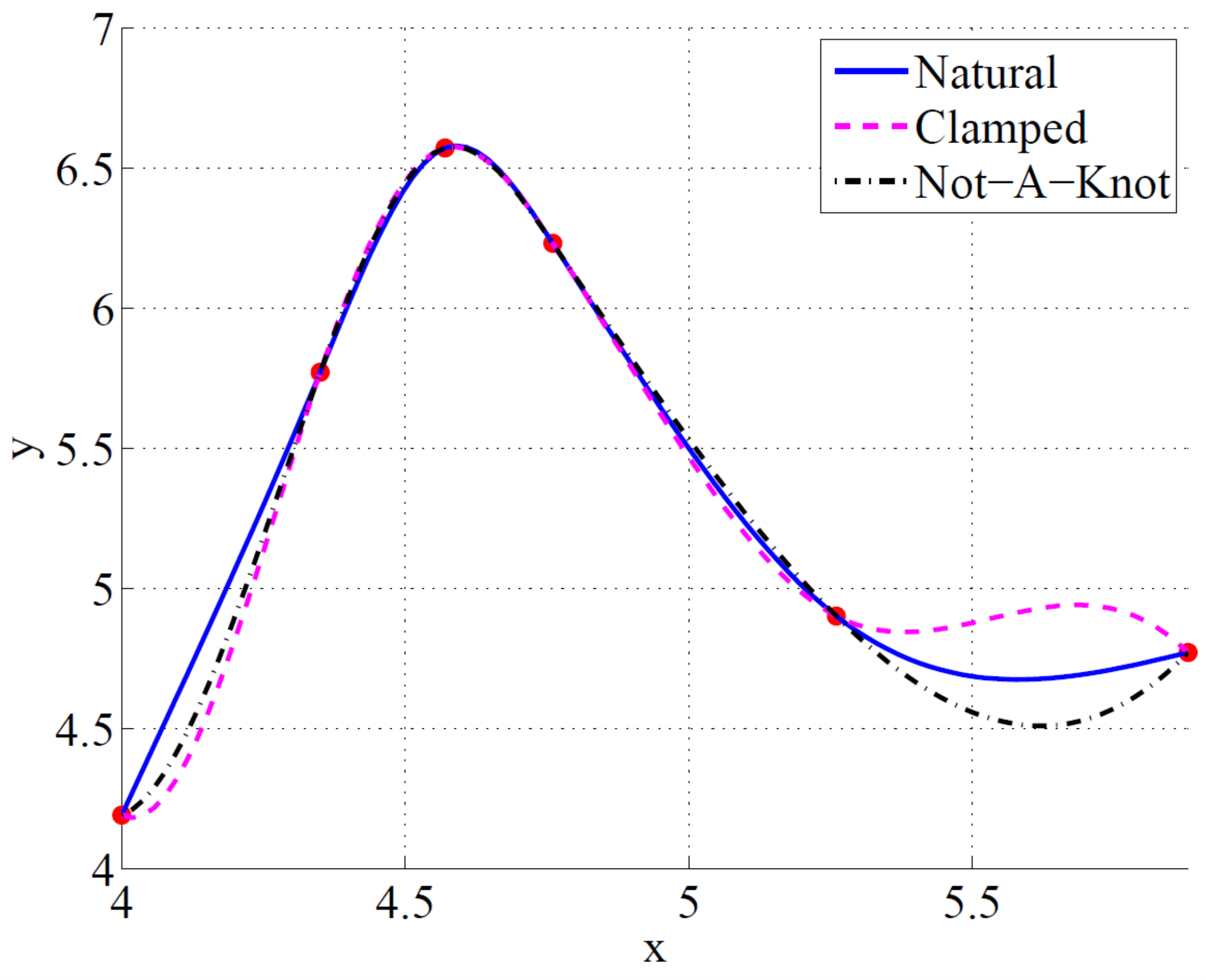
Poredimo

1. Interpolacioni polinom i prirodni splajn
2. Kubne splajnove sa različitim rubnim uslovima:
    - Prirodni (drugi izvod u rubnim tačkama jednak nuli – slobodni krajevi)
    - Potpuni (prvi izvod u rubnim tačkama poznat)
    - Not-a-knot (treći izvod u rubnim tačkama jednak trećem izvodu u susednim tačkama, prva dva polinoma jednaka, poslednja dva jednaka).

Interpolacioni polinom vs. splajn



Različiti granični uslovi

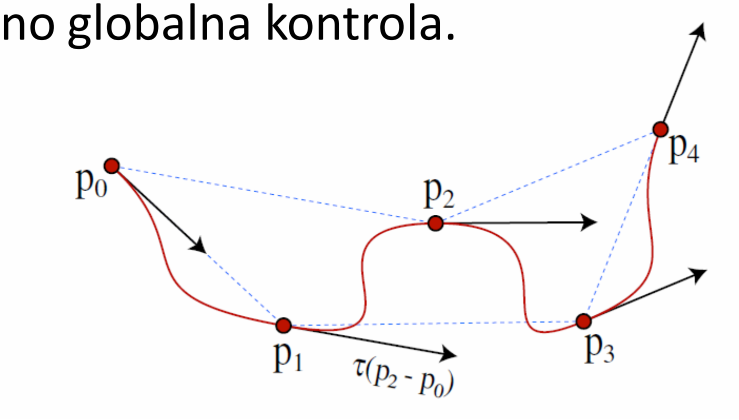


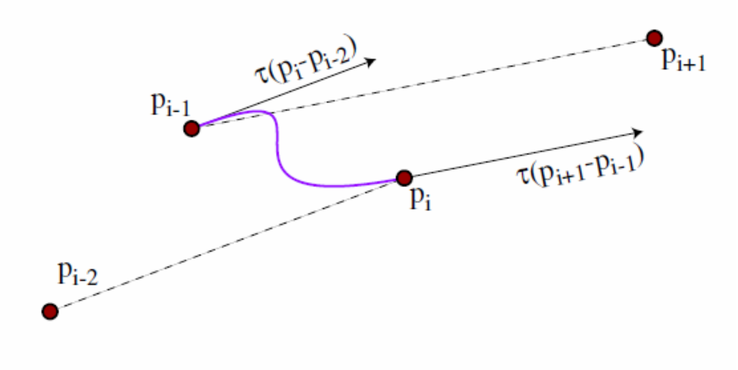
Lokalna kontrola splajna: Catmull-Rom metod

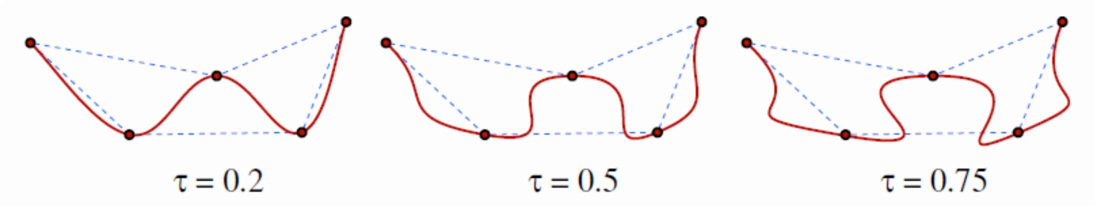
Splajn dobijen Catmull Rom metodom je:

1. interpolirajući;
2. C^1 neprekidan;
3. sa lokalnom kontrolom.

Vrednost izvoda u čvoru se određuje na osnovu položaja dva susedna čvora.
Time je izbegnuta međusobna zavisnost svih delova splajna,
odnosno globalna kontrola.







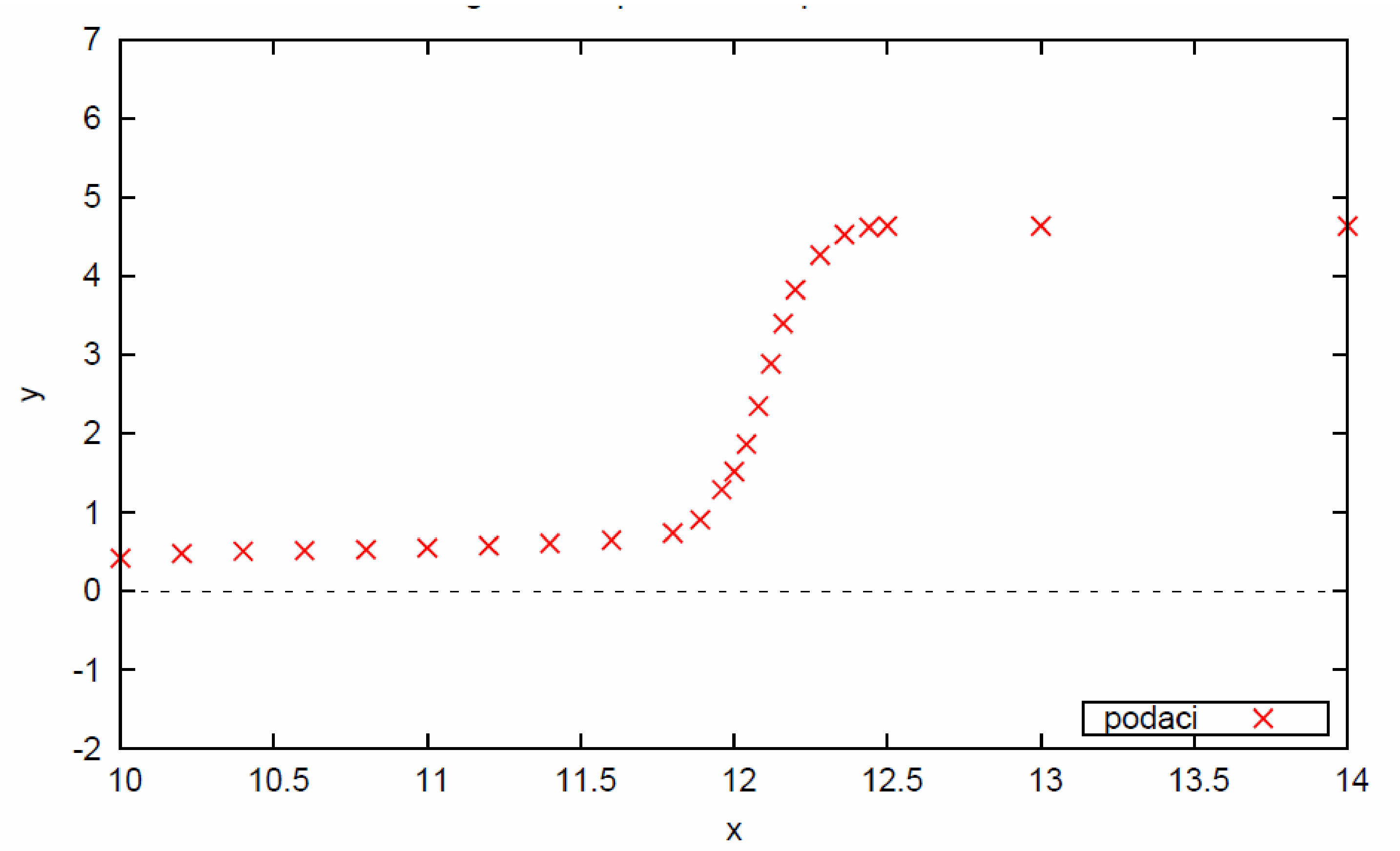
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Raspolažemo ulaznim podacima koji predstavljaju 24 tačke.

k	x_k	y_k	k	x_k	y_k	k	x_k	y_k
1	10.00	0.42	9	11.60	0.65	17	12.16	3.40
2	10.20	0.48	10	11.80	0.74	18	12.20	3.83
3	10.40	0.51	11	11.89	0.91	19	12.28	4.27
4	10.60	0.52	12	11.96	1.29	20	12.36	4.53
5	10.80	0.53	13	12.00	1.52	21	12.44	4.62
6	11.00	0.55	14	12.04	1.87	22	12.50	4.64
7	11.20	0.58	15	12.08	2.35	23	13.00	4.64
8	11.40	0.61	16	12.12	2.89	24	14.00	4.64

Poređenje različitih vrsta interpolacije

Ulazni podaci – grafički prikaz.

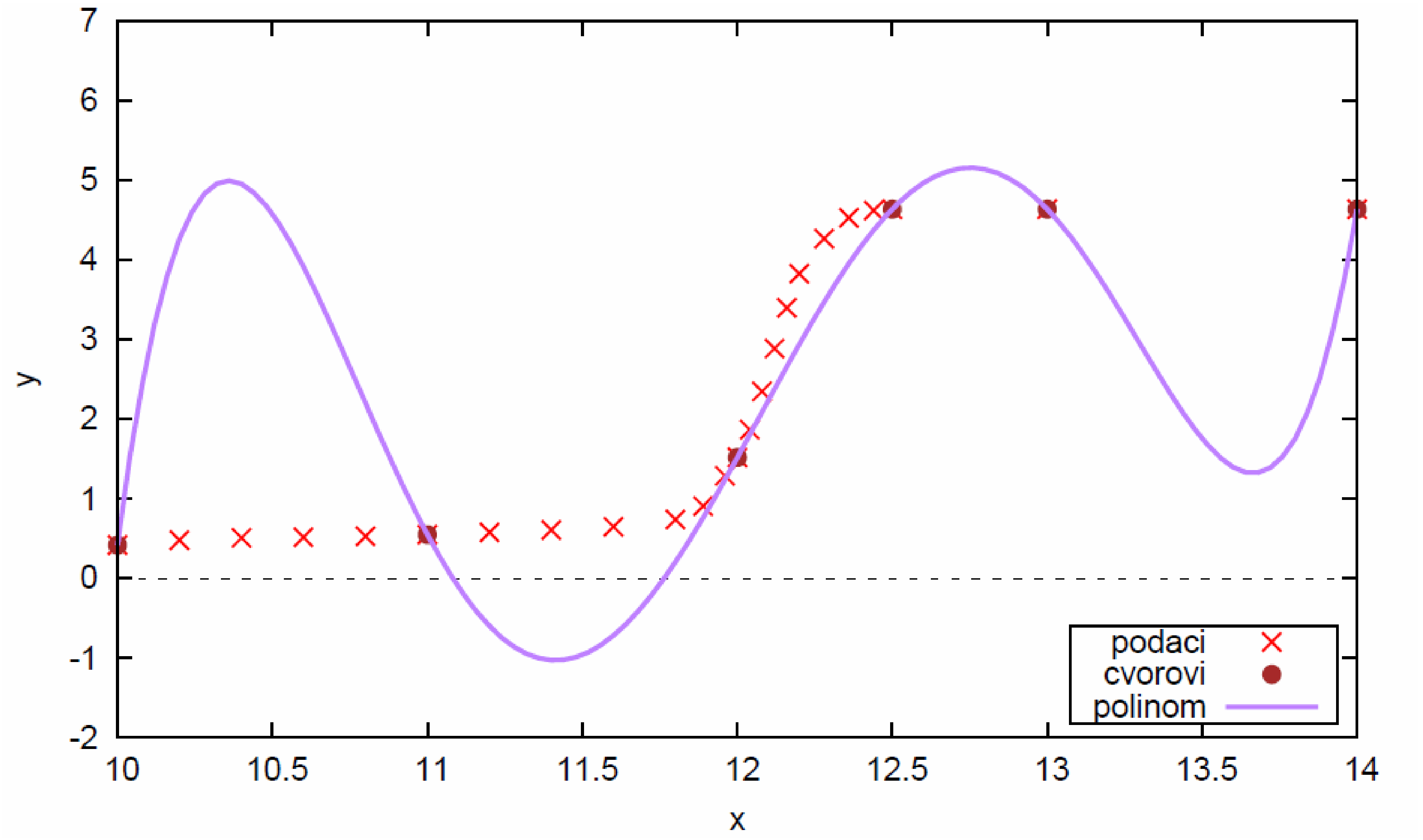


Poređenje različitih vrsta interpolacije

- Za odabrani niz od *n* čvorova, za *n*=6,9,13, posmatramo
  - **Interpolacioni polinom**;
  - **Kvazi-Hermite-ov kubni splajn** (prvi izvod u čvorovima određen je na osnovu vrednosti funkcije u susednim čvorovima);
  - **Kubni splajn sa rubnim uslovima tipa "not-a-knot"** (u početnom i krajnjem čvoru postavljaju se uslovi na treći izvod i postiže da prva dva kubna polinoma budu jednaka, kao i da poslednja dva budu jednaka).

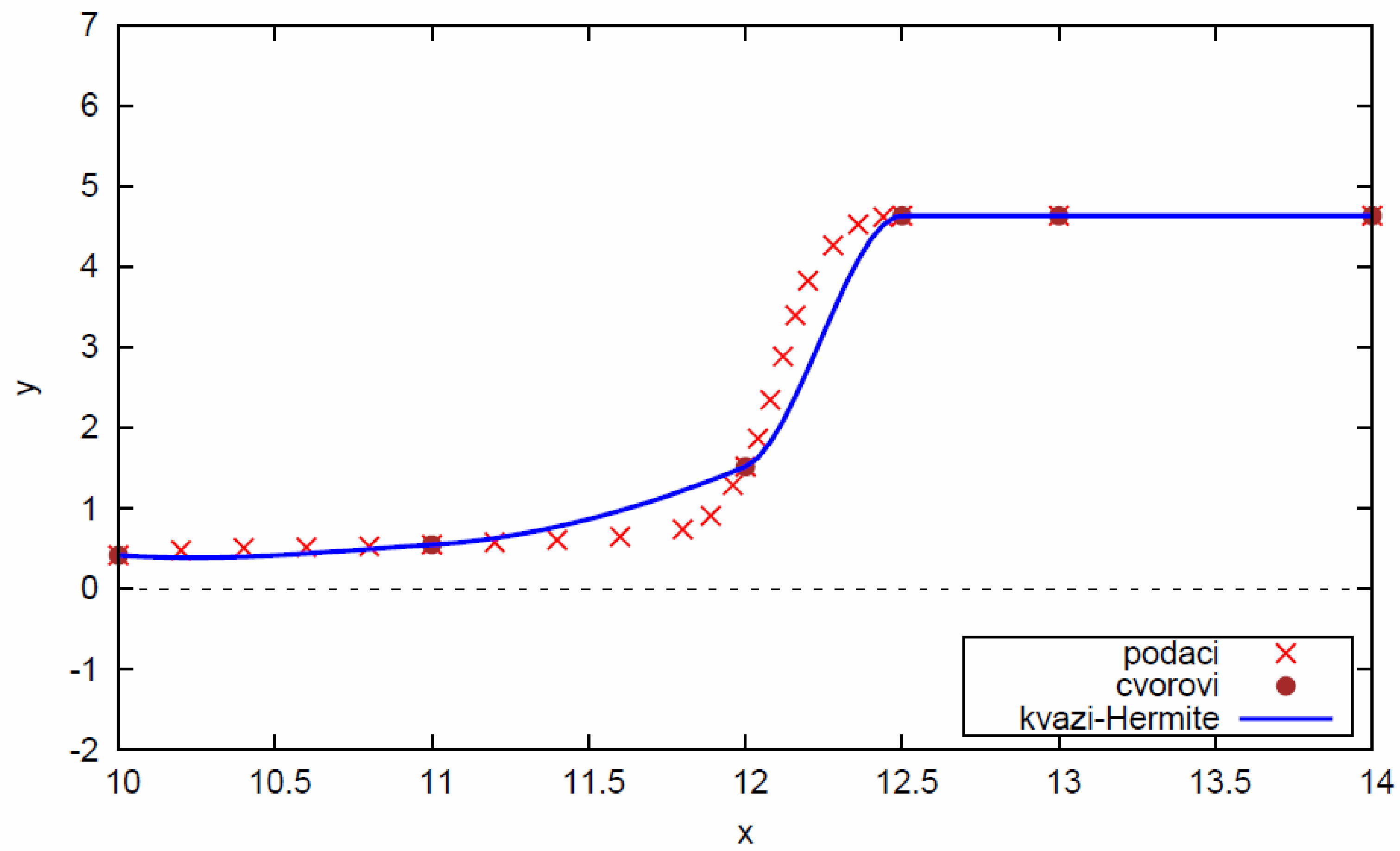
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Interpolacioni polinom – 6 čvorova interpolacije.



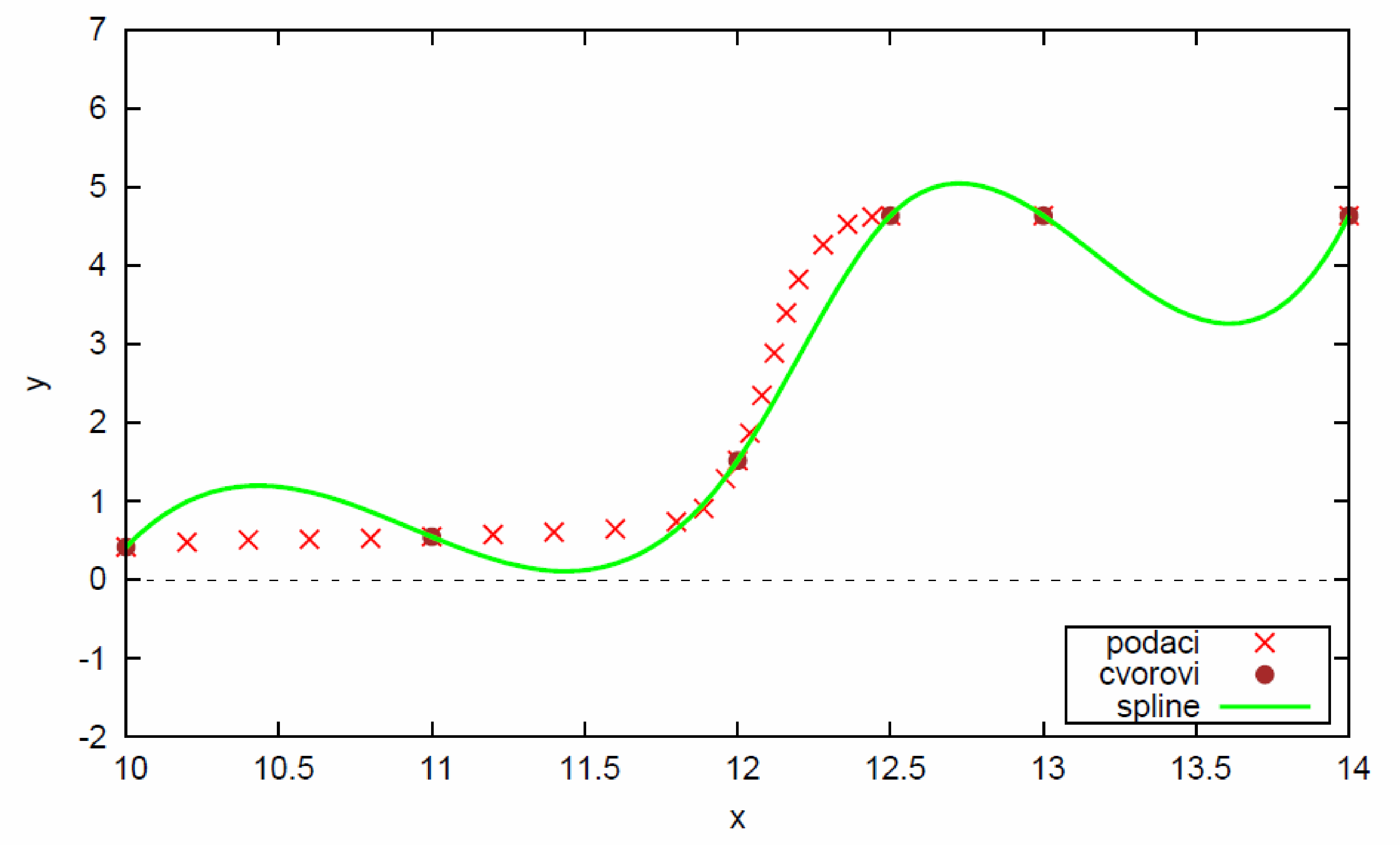
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Kvazi-Hermite-ova interpolacija – 6 čvorova.



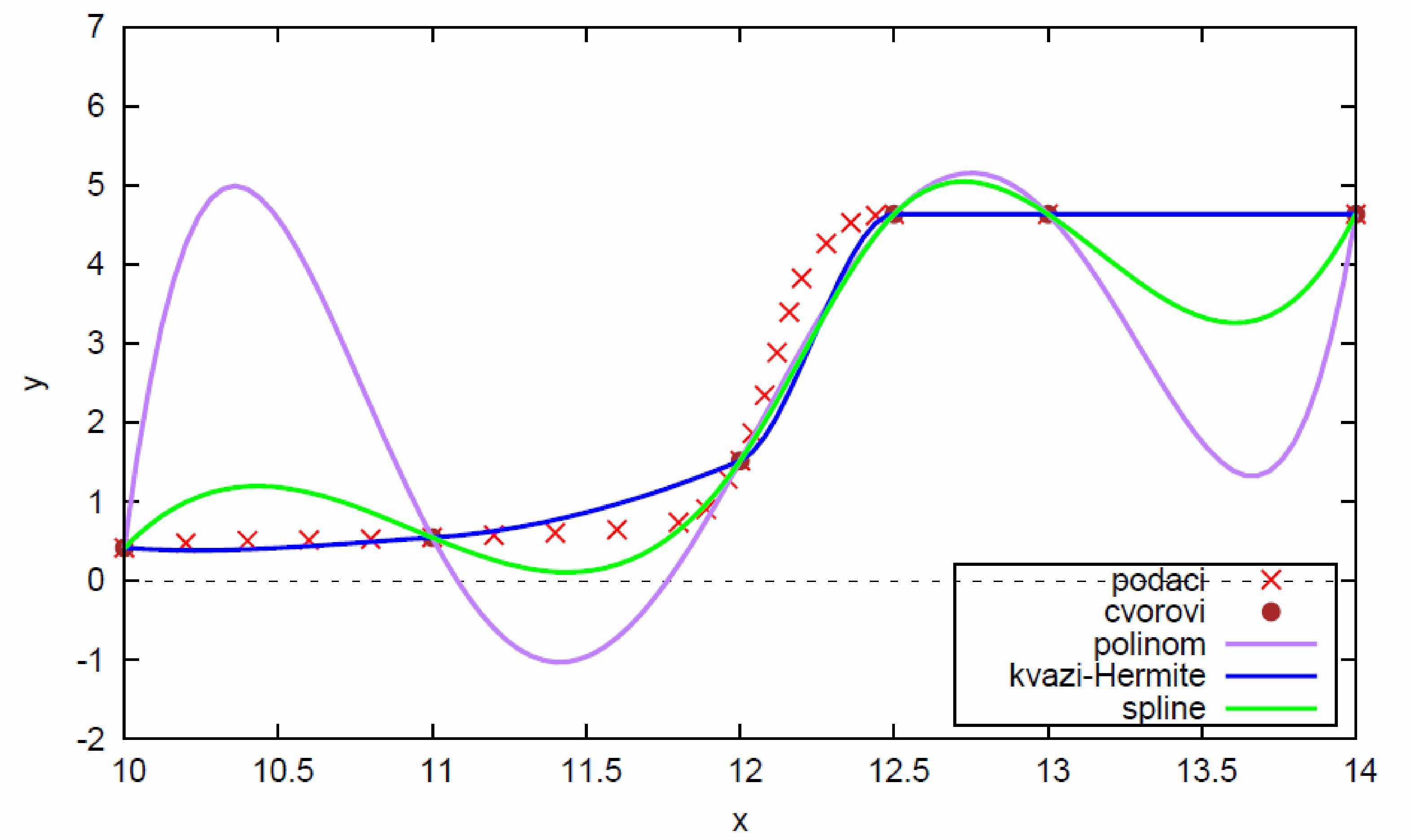
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Interpolacija kubnim splajnom (Not-a-Knot) – 6 čvorova.



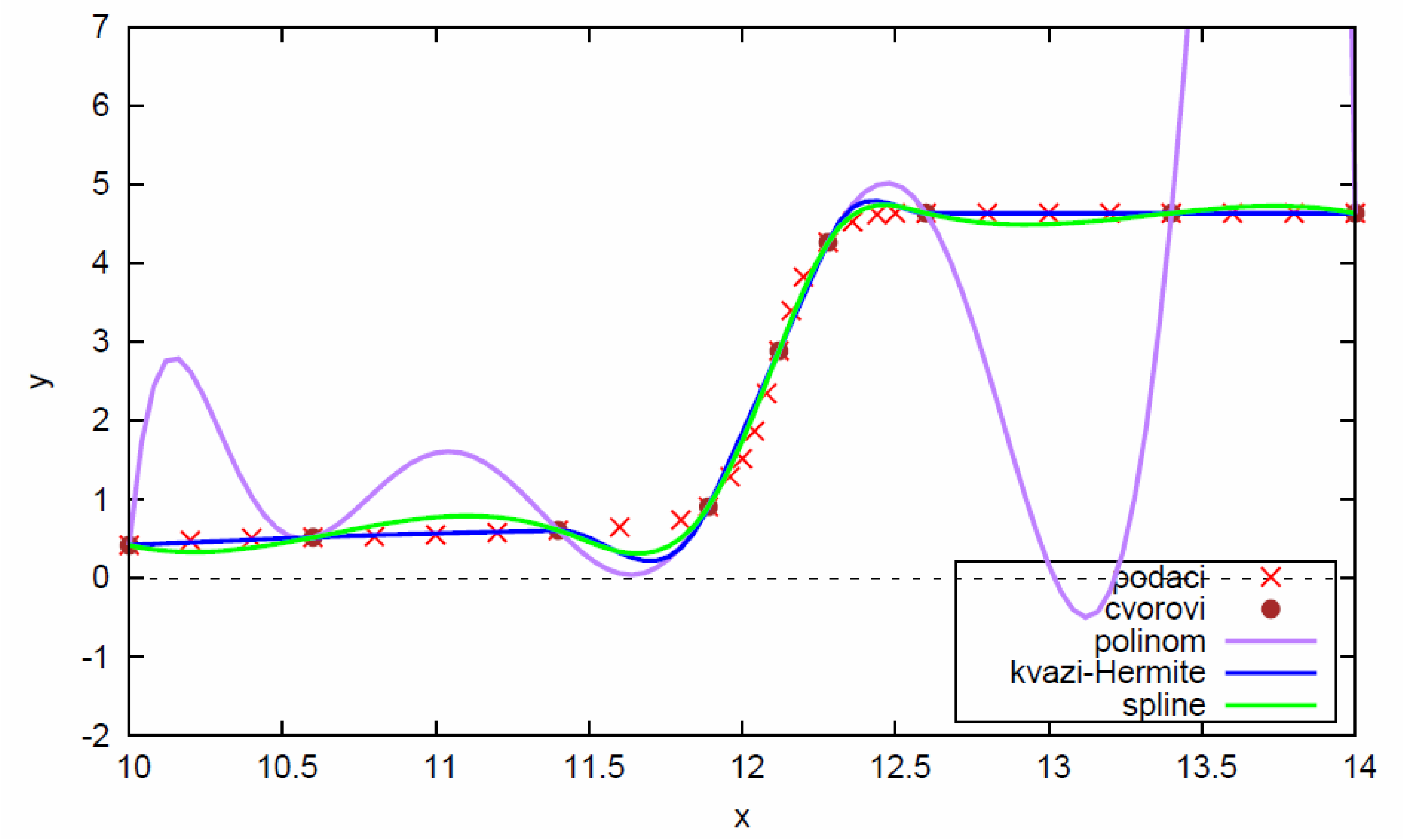
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Tri metode interpolacije – 6 čvorova.



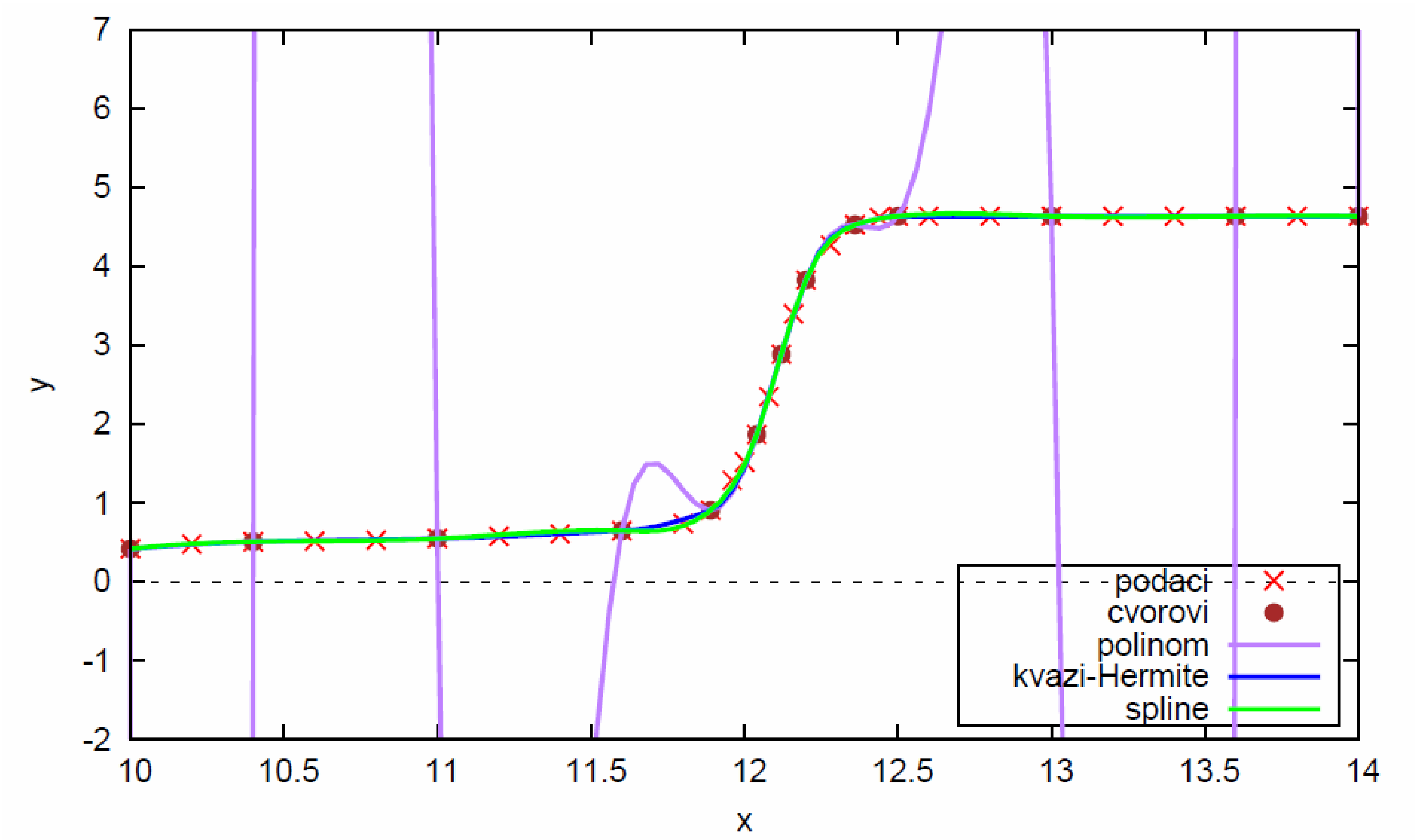
Poređenje različitih vrsta interpolacije

Tri metode interpolacije – 9 čvorova.



Poređenje različitih vrsta interpolacije

Tri metode interpolacije – 13 čvorova.



Poređenje različitih metoda interpolacije

- Očigledno je da interpolacija splajnom generiše krivu sa manje oscilacija, u odnosu na interpolaioni polinom, pa je ovakva interpolacija dobar izbor kada želimo da generišemo (intuitivno i vizuelno odgovarajuću) putanju koja prolazi kroz date tačke.
- Različiti granični uslovi pri definisanju splajna imaju uticaj na oblik interpolacione krive, pre svega u tačkama bliskom krajevima intervala.
- Povećanje broja čvorova povećava oscilacije interpolacionog polinoma, a poboljšava rezultat pri upotrebi splajna. Pogodan izbor čvorova (broj i pozicija) doprinosi dobrim osobinama interpolirajućeg splajna.