Interpolacija krivih: Bezier-ove krive

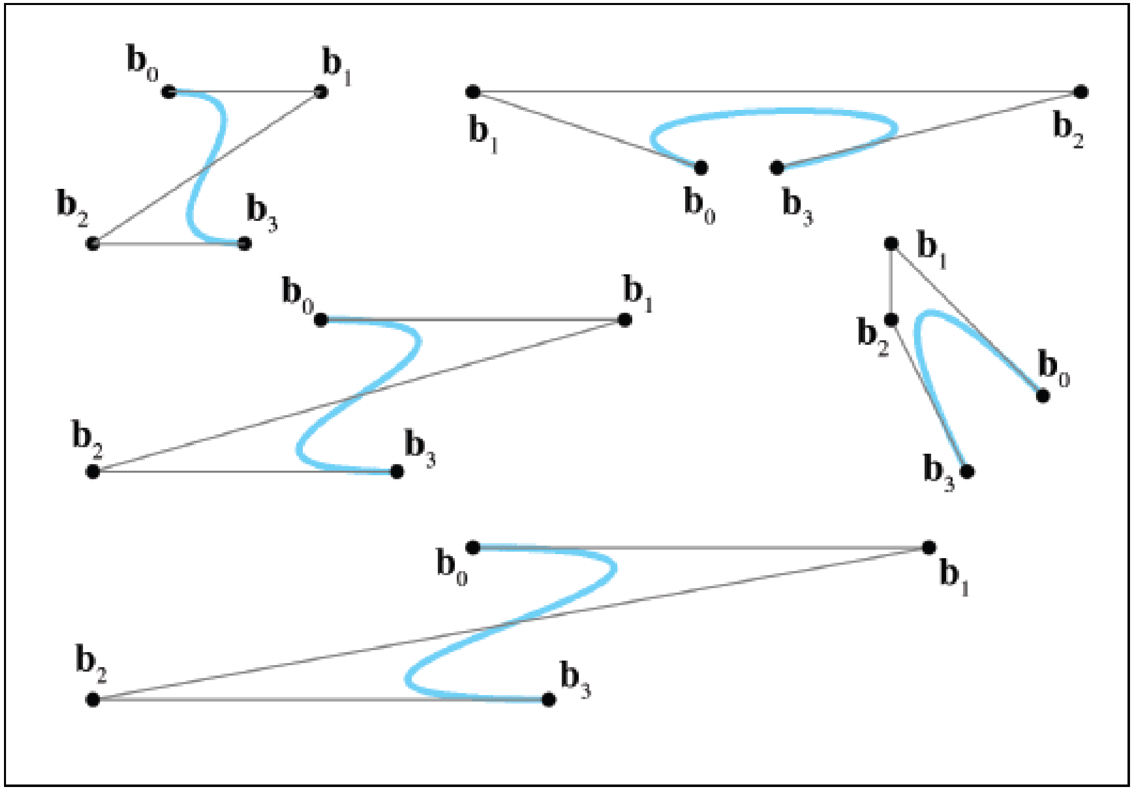
3D Math Primer for Graphics and Game Development

Fletcher Dunn & Ian Parberry

Bezier-ove krive

- Bezier-ove krive **aproksimiraju** funkciju, za razliku od prethodno pomenutih (Lagrange-ov i Hermite-ov polinom) koje **interpoliraju** vrednosti funkcije.
- Bezier-ova kriva prolazi kroz dva data čvora, koji određuju njenu početnu i krajnju tačku. Osim toga, oblik Bezier-ove krive određuju kontrolne tačke, kroz koje kriva ne prolazi.
- Usredsredićemo se na Bezier-ovu krivu trećeg stepena – za nju je karakteristično postojanje **dve kontrolne tačke** (uz dva čvora).

Bezier-ove krive



Primeri Bezier-ovih krivih koje su određene čvorovima b_0 i b_3, i kontrolnim tačkama b_1 i b_2.

Bezier-ove krive

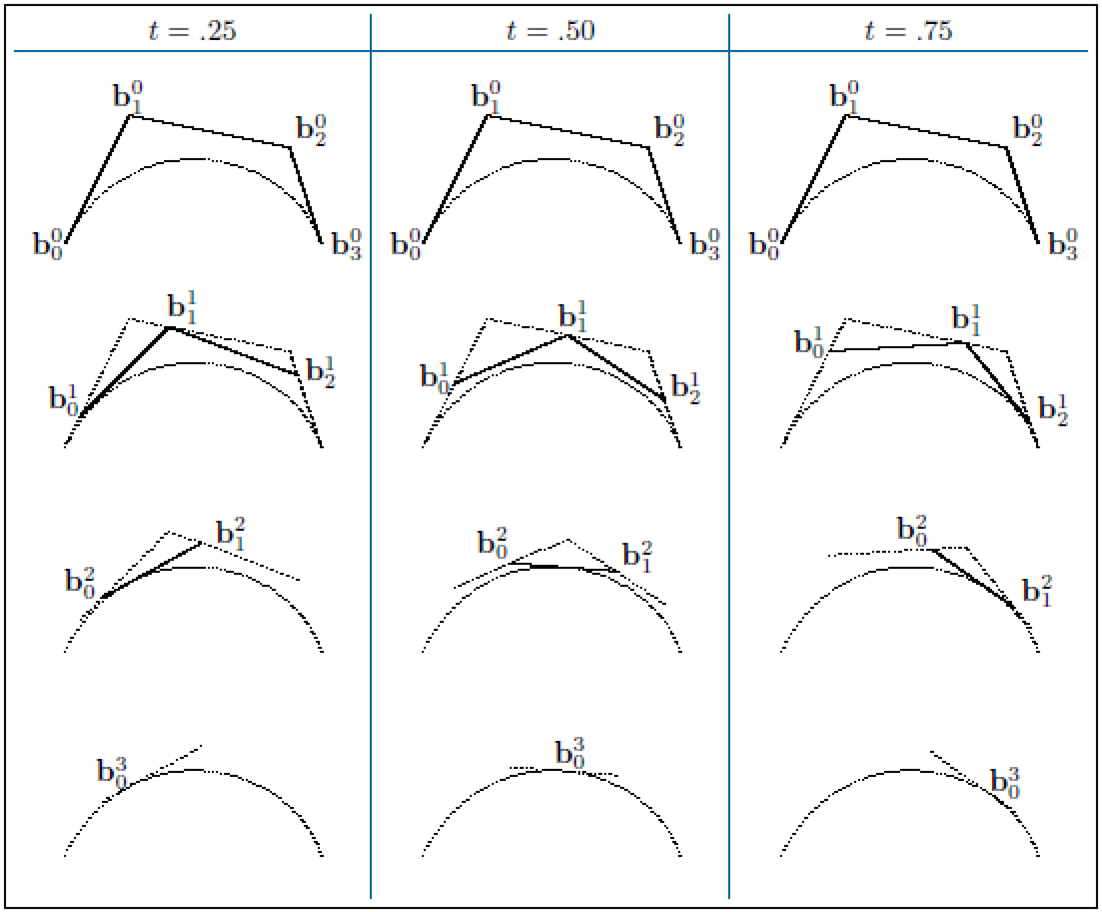
Interpolacioni polinomi

- Geometrijski pristup: **Aitken**-ov algoritam
- Algebarski pristup: **Lagrange**-ova polinomna baza
- Diferenciranje i tangente: **Hermite**-ovi polinomi

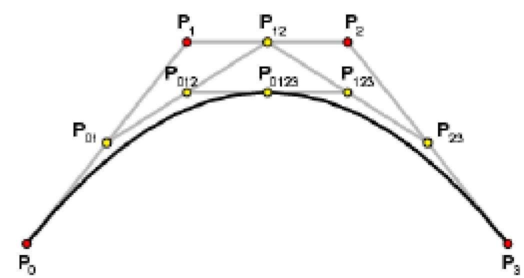
Aproksimirajući polinomi

- Geometrijski pristup: **de Casteljau**-ov algoritam
- Algebarski pristup: **Bernstein**-ova polinomna baza
- Diferenciranje i tangente: veza sa **Hermite**-ovim polinomima

Geometrijski pristup:
de Casteljau-ov algoritam



Ilustracija konstrukcije Bezier-ove krive trećeg stepena de Casteljau-ovim algoritmom:
uzastopna primena linearne interpolacije na tri nivoa.



Geometrijski pristup: de Casteljau-ov algoritam

- de Casteljau-ov algoritam se zasniva na uzastopnoj primeni linearne interpolacije.

1. Za čvorove b_0 i b_3 i kontrolne tačke b_1 i b_2 (koji su na nultom nivou interpolacije) generiše niz od 3 pravolinijska segmenta koji redom povezuju susedne među njima.
2. U sledećem koraku primenjuje se linearna interpolacija između odgovarajućih tačaka susednih segmenata. Ovo je prvi nivo interpolacije, označen gornjim indeksom 1. Generišu se dva nova pravolinijska segmenta za svaki par odgovarajućih tačaka – tačaka kojima odgovara ista vrednost parametra (*t*).
3. U sledećem koraku se formira jedan pravolinijski segment, linearnom interpolacijom između odgovarajućih tačaka segmenata prethodnog nivoa. Ovo je drugi nivo interpolacije.
4. Na poslednjem – trećem – nivou linearne interpolacije određuje se tačka koja pripada prethodno formiranom segmentu, a kojoj odgovara vrednost parametra (t) zajednička za sve prethodne korake.

Geometrijski pristup: de Casteljau-ov algoritam

De Casteljau Recurrence Relation

$$\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i,$$
$$\mathbf{b}_i^n(t) = (1-t)[\mathbf{b}_i^{n-1}(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^{n-1}(t)].$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{b}_0^0 & & \mathbf{b}_1^0 & & \mathbf{b}_2^0 & & \mathbf{b}_3^0 \\
& \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & \\
& \mathbf{b}_0^1 & & \mathbf{b}_1^1 & & \mathbf{b}_2^1 & \\
& & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \\
& & \mathbf{b}_0^2 & & \mathbf{b}_1^2 & & \\
& & & \searrow\swarrow & & & \\
& & & \mathbf{b}_0^3 & & &
\end{array}$$

Hijerarhija u koracima primene linearne interpolacije u okviru de Casteljau-ovog algoritma. U oznaci b_i^j donji indeks *i* označava element (tačku) koji učestvuje u interpolaciji, a gornji indeks *j* označava nivo primene (rekurzivnog) algoritma.

Bezier-ov polinom (drugog stepena) u kanoničkoj formi

Uzastopnom primenom rekurzivne formule dobijamo Bezier-ov polinom u kanoničkoj formi.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^0(t) &= \mathbf{b}_i, \\
\mathbf{b}_i^1(t) &= (1-t)[\mathbf{b}_i^0(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^0(t)] \\
&= (1-t)\mathbf{b}_i + t\mathbf{b}_{i+1} \\
&= \mathbf{b}_i + t(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i).
\end{aligned}$$

Prvi nivo rekurzije

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^2(t) &= (1-t)[\mathbf{b}_i^1(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^1(t)] \\
&= (1-t)[\mathbf{b}_i + t(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)] + t[\mathbf{b}_{i+1} + t(\mathbf{b}_{i+2} - \mathbf{b}_{i+1})] \\
&= [\mathbf{b}_i + t(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)] - t[\mathbf{b}_i + t(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i)] \\
&\quad + t[\mathbf{b}_{i+1} + t(\mathbf{b}_{i+2} - \mathbf{b}_{i+1})] \\
&= \mathbf{b}_i + t(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) - t\mathbf{b}_i - t^2(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \\
&\quad + t\mathbf{b}_{i+1} + t^2(\mathbf{b}_{i+2} - \mathbf{b}_{i+1}) \\
&= \mathbf{b}_i + t(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) + t^2(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2}).
\end{aligned}$$

Drugi nivo rekurzije

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0^2(t) = \mathbf{b}_0 + t(2\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_0) + t^2(\mathbf{b}_0 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2).$$

Bezier-ov polinom drugog stepena

Bezier-ov polinom (trećeg stepena) u kanoničkoj formi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_i^3(t) &= (1-t)[\mathbf{b}_i^2(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^2(t)] \\
&= (1-t)[\mathbf{b}_i + t(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) + t^2(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2})] \\
&\quad + t[\mathbf{b}_{i+1} + t(2\mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1}) + t^2(\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_{i+2} + \mathbf{b}_{i+3})] \\
&= [\mathbf{b}_i + t(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) + t^2(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2})] \\
&\quad - t[\mathbf{b}_i + t(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) + t^2(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2})] \\
&\quad + t[\mathbf{b}_{i+1} + t(2\mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1}) + t^2(\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_{i+2} + \mathbf{b}_{i+3})] \\
&= \mathbf{b}_i + t(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) + t^2(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2}) \\
&\quad - t\mathbf{b}_i - t^2(2\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_i) - t^3(\mathbf{b}_i - 2\mathbf{b}_{i+1} + \mathbf{b}_{i+2}) \\
&\quad + t\mathbf{b}_{i+1} + t^2(2\mathbf{b}_{i+2} - 2\mathbf{b}_{i+1}) + t^3(\mathbf{b}_{i+1} - 2\mathbf{b}_{i+2} + \mathbf{b}_{i+3}) \\
&= \mathbf{b}_i + t(3\mathbf{b}_{i+1} - 3\mathbf{b}_i) + t^2(3\mathbf{b}_i - 6\mathbf{b}_{i+1} + 3\mathbf{b}_{i+2}) \\
&\quad + t^3(-\mathbf{b}_i + 3\mathbf{b}_{i+1} - 3\mathbf{b}_{i+2} + \mathbf{b}_{i+3}).
\end{aligned}
$$

Treći nivo rekurzije

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) = \mathbf{b}_0^3(t) &= \mathbf{b}_0 + t(3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0) + t^2(3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2) \\
&\quad + t^3(-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3).
\end{aligned}
$$

Bezier-ov polinom trećeg stepena

Bezier-ov polinom u matričnom zapisu

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{Ct} = \mathbf{BMt} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Polinom drugog stepena

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{Ct} = \mathbf{BMt} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Polinom trećeg stepena

U oba navedena slučaja, jedan način interpretacije je da proizvod matrica BM=C posmatramo kao matricu koeficijenata Bezier-ovog polinoma, pri čemu je matrica M matrica prelaza iz Bezier-ovog u kanonički oblik polinoma.

Drugi način interpretacije je da posmatramo proizvod B(Mt), pri čemu elementi (vrste) matrice (kolone) Mt generišu polinomnu bazu Bezier-ovih krivih, čija linearna kombinacija daje sve Bezier-ove polinome odgovarajućeg stepena.
Ova baza se naziva Bernstein-ova baza.

Bezier-ov polinom trećeg stepena

Konverzija Bezier-ovog oblika u kanonički

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0, \\
\mathbf{c}_1 &= -3\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1, \\
\mathbf{c}_2 &= 3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\
\mathbf{c}_3 &= -\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konverzija kanoničkog oblika u Bezier-ov

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_0 &= \mathbf{c}_0, \\
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{c}_0 + (1/3)\mathbf{c}_1, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{c}_0 + (2/3)\mathbf{c}_1 + (1/3)\mathbf{c}_2, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bernstein-ova baza

Prethodno izvedene Bezier-ove polinome možemo napisati i u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_i^1(t) &= (1-t)[\mathbf{b}_i^0(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^0(t)]\\ &= (1-t)\mathbf{b}_i + t\mathbf{b}_{i+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_i^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_i^1(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^1(t)\\ &= (1-t)[(1-t)\mathbf{b}_i + t\mathbf{b}_{i+1}] + t[(1-t)\mathbf{b}_{i+1} + t\mathbf{b}_{i+2}]\\ &= (1-t)^2\mathbf{b}_i + t(1-t)\mathbf{b}_{i+1} + t(1-t)\mathbf{b}_{i+1} + t^2\mathbf{b}_{i+2}\\ &= (1-t)^2\mathbf{b}_i + 2t(1-t)\mathbf{b}_{i+1} + t^2\mathbf{b}_{i+2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_i^3(t) &= (1-t)[\mathbf{b}_i^2(t)] + t[\mathbf{b}_{i+1}^2(t)]\\ &= (1-t)[(1-t)^2\mathbf{b}_i + 2t(1-t)\mathbf{b}_{i+1} + t^2\mathbf{b}_{i+2}]\\ &\qquad + t[(1-t)^2\mathbf{b}_{i+1} + 2t(1-t)\mathbf{b}_{i+2} + t^2\mathbf{b}_{i+3}]\\ &= (1-t)^3\mathbf{b}_i + 2t(1-t)^2\mathbf{b}_{i+1} + t^2(1-t)\mathbf{b}_{i+2}\\ &\qquad + t(1-t)^2\mathbf{b}_{i+1} + 2t^2(1-t)\mathbf{b}_{i+2} + t^3\mathbf{b}_{i+3}\\ &= (1-t)^3\mathbf{b}_i + 3t(1-t)^2\mathbf{b}_{i+1} + 3t^2(1-t)\mathbf{b}_{i+2} + t^3\mathbf{b}_{i+3}.\end{aligned}$$

U svakom od polinoma uočavamo članove grupisane po stepenima od (1-*t*) i *t.*

Bernstein-ova baza

Dakle, oblik Bezier-ovih polinoma do stepena 5 je sledeći:

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_0^3(t) = (1-t)^3\mathbf{b}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{b}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{b}_2 + t^3\mathbf{b}_3,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^4(t) &= (1-t)^4\mathbf{b}_0 + 4t(1-t)^3\mathbf{b}_1 + 6t^2(1-t)^2\mathbf{b}_2 \\ &\quad + 4t^3(t-1)\mathbf{b}_3 + t^4\mathbf{b}_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^5(t) &= (1-t)^5\mathbf{b}_0 + 5t(1-t)^4\mathbf{b}_1 + 10t^2(1-t)^3\mathbf{b}_2 \\ &\quad + 10t^3(1-t)^2\mathbf{b}_3 + 5t^4(1-t)\mathbf{b}_4 + t^5\mathbf{b}_5.\end{aligned}$$

Bernstein-ova polinomna baza

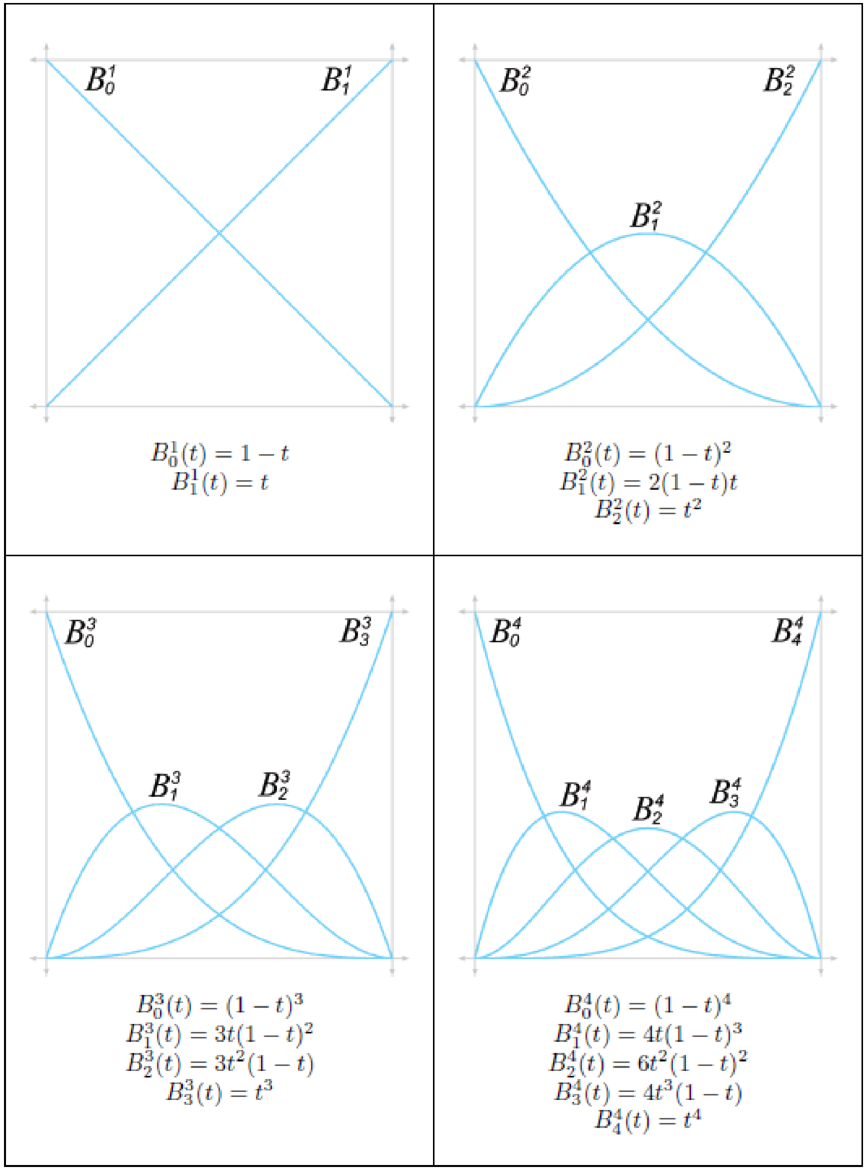
$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad 0 \le i \le n.$$

Bezier-ov polinom izražen preko Bernsteinove baze

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_0^3(t) &= (1-t)^3\mathbf{b}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{b}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{b}_2 + t^3\mathbf{b}_3 \\ &= [B_0^3(t)]\mathbf{b}_0 + [B_1^3(t)]\mathbf{b}_1 + [B_2^3(t)]\mathbf{b}_2 + [B_3^3(t)]\mathbf{b}_3.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{i=0}^{n} [B_i^n(t)]\mathbf{b}_i.}$$

Bernstein-ova baza



Elementi Bernstein-ove polinomne baze, do stepena 4:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad 0 \le i \le n.$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma:

1. Zbir vrednosti polinoma je, za svaku vrednost *t*, jednak 1.
2. Vrednosti polinoma su između 0 i 1, za sve vrednosti *t*.
3. Prvi i poslednji polinom na svakom nivou rekurzije dostižu vrednost 1. Ova vrednost se može postići samo za *t=0* ili *t=1*. Zbog toga polinomom aproksimiramo, a ne interpoliramo.
4. Polinomi imaju ne-nula vrednost na čitavom intervalu [0,1]. Zbog toga je kontrola Bezier-ovih polinoma globalna.
5. Najveći (lokalni) uticaj na oblik krive ima najbliža kontrolna tačka.

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Rekurzivna definicija

Ako je

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$
$$i = 0, 1, ..., n$$
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

onda je

$$B_{k,n}(t) = (1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
(1-t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) &= (1-t)\binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} + t\binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)} \\
&= \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right] t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= B_{k,n}(t)
\end{aligned}$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Nenegativnost

Bernsteinovi polinomi su nenegativni za *0≤t ≤1*.

Dokaz indukcijom:

1. **Indukcijska baza**: $B_{0,1}(t) = 1 - t$ i $B_{1,1}(t) = t$ su nenegativni za *0≤t ≤1*.

2. **Indukcijska hipoteza**: Svi Bernstein-ovi polinomi stepena manjeg od *k* su nenegativni.

3. **Indukcijski korak**: Bernstein-ov polinom stepena *k* je nenegativan.

Kako je $$B_{i,k}(t) \;=\; (1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)$$

i svi navedeni članovi ovog polinoma su nenegativni (što sledi iz indukcijske hipoteze, i činjenice da je 0≤t≤1), tvrđenje je dokazano.

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Zbir baznih Bernstein-ovih polinoma je jednak 1.

Može se pokazati da je $\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t)$ koristeći rekurziju i $B_{k,k-1}(t) = B_{-1,k-1}(t) = 0$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k} B_{i,k}(t) &= \sum_{i=0}^{k} \left[(1-t)B_{i,k-1}(t) + tB_{i-1,k-1}(t)\right] \\
&= (1-t)\left[\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + B_{k,k-1}(t)\right] + t\left[\sum_{i=1}^{k} B_{i-1,k-1}(t) + B_{-1,k-1}(t)\right] \\
&= (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t\sum_{i=1}^{k} B_{i-1,k-1}(t) \\
&= (1-t)\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) + t\sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,k-1}(t)
\end{aligned}$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Zbir baznih Bernstein-ovih polinoma je jednak 1.

Dalje je

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) = \cdots = \sum_{i=0}^{1} B_{i,1}(t) = (1-t)+t = 1$$

Iz prethodnog važnog tvrđenja sledi da je

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 B_{0,n}(t) + \mathbf{P}_1 B_{1,n}(t) + \cdots + \mathbf{P}_n B_{n,n}(t)$$

konveksna kombinacija tačaka $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$;

odnosno, da sve vrednosti posmatranog polinoma pripadaju konveksnom omotaču posmatranog skupa tačaka.

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Povećanje stepena polinoma

Kako važi

$$\begin{aligned} tB_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} t^{i+1}(1-t)^{(n+1)-(i+1)} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+i}} B_{i+1,n+1}(t) \\ &= \frac{i+1}{n+1} B_{i+1,n+1}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-t)B_{i,n}(t) &= \binom{n}{i} t^{i}(1-t)^{n+1-i} \\ &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_{i,n+1}(t) \\ &= \frac{n-i+1}{n+1} B_{i,n+1}(t) \end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{n}{i}} B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{i+1,n}(t) &= t^i(1-t)^{n-i} + t^{i+1}(1-t)^{n-(i+1)} \\ &= t^i(1-t)^{n-i-1}((1-t)+t) \\ &= t^i(1-t)^{n-i-1} \\ &= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_{i,n-1}(t) \end{aligned}$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma Povećanje stepena polinoma

Konačno, potvrđujemo da se svaki Bernstein-ov polinom stepena manjeg od *n* može izraziti korišćenjem Bernsteinovih polinoma stepena stepena *n*.

$$
\begin{aligned}
B_{i,n-1}(t) &= \binom{n-1}{i}\left[\frac{1}{\binom{n}{i}}B_{i,n}(t) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}}B_{i+1,n}(t)\right] \\
&= \left(\frac{n-i}{n}\right)B_{i,n}(t) + \left(\frac{i+1}{n}\right)B_{i+1,n}(t)
\end{aligned}
$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Transformacija u kanoničku formu

Koristeći definiciju Bernstein-ovih polinoma i formulu za binomni razvoj, dobijamo:

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(t) &= \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} t^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} t^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} t^{i+k} \\
&= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} t^i \\
&= \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} t^i
\end{aligned}$$

Ovo je izraz za Bernstein-ov polinom stepena *n* u kanoničkoj (monomnoj) bazi.

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Transformacija iz kanoničke forme

Dokaz da se svaki element monomne baze može prikazati kao linearna kombinacija elemenata Bernstein-ove baze može se izvesti indukcijom:

$$
\begin{aligned}
t^k &= t(t^{k-1}) \\
&= t \sum_{i=k-1}^{n} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} t B_{i-1,n-1}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n}(t) \\
&= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(t),
\end{aligned}
$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Diferenciranje

Izvod Bernstein-ovog polinoma je linearna kombinacija Bernstein-ovih polinoma.

$$\frac{d}{dt}B_{k,n}(t) = n(B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t))$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B_{k,n}(t) &= \frac{d}{dt}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \\
&= \frac{kn!}{k!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!}t^k(1-t)^{n-k-1} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!}t^k(1-t)^{n-k-1} \\
&= n\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}t^{k-1}(1-t)^{n-k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}t^k(1-t)^{n-k-1}\right) \\
&= n\left(B_{k-1,n-1}(t) - B_{k,n-1}(t)\right)
\end{aligned}$$

Osobine Bernstein-ovih polinoma
Baza vektorksog prostora

Bernstein-ovi polinomi stepena *n* obrazuju bazu vektorskog prostora polinoma stepena ne većeg od *n*.

1. Skup Bernstein-ovih polinoma stepena n je linearno nezavisan.
2. Svaki polinom stepena ne većeg od *n* može se prikazati kao linearna kombinacija Bernsteinovih polinoma stepena *n*.

U dokazu ovih tvrđenja koristi se činjenjica da skup monoma stepena ne većeg od *n* predstavlja bazu skupa (vektorskog prostora) svih polinoma stepena ne većeg od *n*.
Takođe, svaki element ove baze može se prikazati kao linearna kombinacija Bernsteinovih polinoma.
Konačno, na osnovu linearne nezavisnosti elemenata monomijalne baze, i izraza kojima se Bernstein-ovi polinomi prikazuju kao linearna kombinacija ove baze pokazuje se da su Bernsteinovi polinomi linearno nezavisni.

Izvodi Bezier-ovih polinoma i njihova veza sa Hermite-ovim polinomima

Polinom trećeg stepena i njegov izvod su:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_3 t^3,$$
$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 t + 3\mathbf{c}_3 t^2.$$

Pri tome, koeficijenti polinoma u funkciji kontrolnih tačaka su:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{b}_0,\\
\mathbf{c}_1 &= 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0,\\
\mathbf{c}_2 &= 3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2,\\
\mathbf{c}_3 &= -\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem koeficijenata u izvodnu funkciju dobijamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 t + 3\mathbf{c}_3 t^2\\
&= (3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0) + 2(3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2)t + 3(-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)t^2.
\end{aligned}$$

U krajnjim tačkama, vrednosti izvoda su:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(0) &= (3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0) + 2(3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2)(0)\\
&\quad + 3(-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)(0)^2\\
&= 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(1) &= (3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0) + 2(3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2)(1)\\
&\quad + 3(-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)(1)^2\\
&= 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_0 + 6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 - 3\mathbf{b}_0 + 9\mathbf{b}_1 - 9\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3\\
&= 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2).
\end{aligned}$$

Izvodi Bezier-ovih polinoma i njihova veza sa Hermite-ovim polinomima

- Uočavamo važnu osobinu kontrolnih tačaka Bezier-ovog polinoma:
  - Tangenta na polinom u početnoj tački (t=0) ima pravac vektora određenog prvim dvema kontralnim tačkama, b_1-b_0.
  - Tangenta na polinom u krajnjoj tački (t=1) ima pravac vektora određenog poslednjim dvema kontrolnim tačkama, b_3-b_2.
  - Ovim uloga dveju "srednjih" kontrolnih tačaka Bezier-ovog polinoma trećeg stepena dobija geometrijski smisao: dok prva i poslednja kontrolna tačka pripadaju krivoj, druga i treća pripadaju, redom, tangentama na krivu u početnoj i krajnjoj tački.
- Ovim je jasno uspostavljena bliska veza između Bezier-ovog i Hermite-ovog polinoma.

Veza Bezier-ovog i Hermite-ovog polinoma

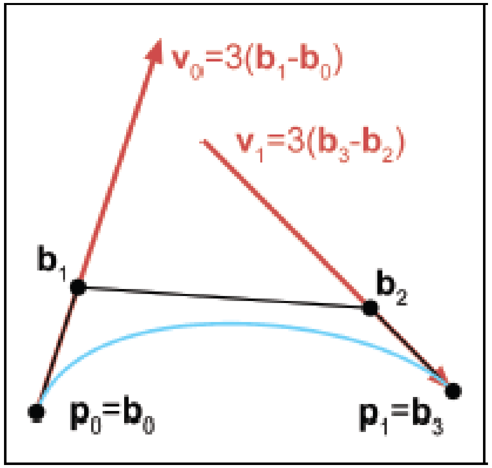
Veza između kontrolnih tačaka Bezier-ove krive i vrednosti funkcije i izvoda (Hermite-ova forma):

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_0 &= \mathbf{b}_0, \\
\mathbf{v}_0 &= 3(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \\
\mathbf{v}_1 &= 3(\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2), \\
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{b}_3.
\end{aligned}
$$

Veza između Hermite-ove i Bezier-ove forme:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_0 &= \mathbf{p}_0, \\
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{p}_0 + (1/3)\mathbf{v}_0, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{p}_1 - (1/3)\mathbf{v}_1, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{p}_1.
\end{aligned}
$$

Veza između Hermite-ove i Bezier-ove forme



Viši izvodi Bezier-ovog polinoma

Drugi izvod (ubrzanje) Bezier-ovog polinoma trećeg stepena je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t) &= 2\mathbf{c}_2 + 6\mathbf{c}_3 t \\
&= 2(3\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2) + 6(-\mathbf{b}_0 + 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3)t \\
&= (6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2) + (-6\mathbf{b}_0 + 18\mathbf{b}_1 - 18\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3)t.
\end{aligned}$$

U prvoj i poslednjoj kontrolnoj tački ubrzanje je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(0) &= (6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2) + (-6\mathbf{b}_0 + 18\mathbf{b}_1 - 18\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3)0 \\
&= 6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2, \\
\mathbf{a}(1) &= (6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2) + (-6\mathbf{b}_0 + 18\mathbf{b}_1 - 18\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3)1 \\
&= 6\mathbf{b}_1 - 12\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3.
\end{aligned}$$

Viši izvodi Bezier-ovog polinoma

Koristeći oznaku $\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(0) &= 6\mathbf{b}_0 - 12\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 = 6\mathbf{b}_0 - 6\mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 \\
&= 6\left((\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) - (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)\right) \\
&= 6(\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0), \\
\mathbf{a}(1) &= 6\mathbf{b}_1 - 12\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3 = 6\mathbf{b}_1 - 6\mathbf{b}_2 - 6\mathbf{b}_2 + 6\mathbf{b}_3 \\
&= 6\left((\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2) - (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\right) \\
&= 6(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1).
\end{aligned}$$

Uočimo:

n-ti izvod Bezier-ovog polinoma u svakoj od krajnjih tačaka polinoma potpuno je određen pomoću n+1 najbližih kontrolnih tačaka.

Promenom (pomeranjem) *i*-te kontrolne tačke utičemo na vrednosti i-tog i viših, ali ne i nižih!, izvoda u početnoj tački polinoma. Analogno ponašanje uočavamo i u krajnjoj tački polinoma.