Interpolacija krivih: Interpolacioni polinomi

3D Math Primer for Graphics and Game Development

Fletcher Dunn & Ian Parberry

Motivacija

- **Problem:**

Dat je skup tačaka.

(Skup tačaka može pripadati grafiku neke poznate funkcije koju, recimo, želimo da zamenimo jednostavnijom, ili može biti posmatran nezavisno od bilo koje unapred poznate funkcije.)

Odrediti (neprekidnu/glatku) putanju kojom se objekat kreće prolazeći redom kroz zadate tačke.

- **Primer dodatnih uslova – nisu sva kretanja sa konstantnom brzinom:**

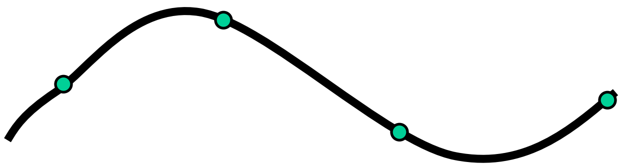
Iz stanja mirovanja do tačke/trenutka t_1 ravnomerno ubrzavati, zatim održati stalnu brzinu do trenutka t_2, a posle toga ravnomerno usporavati do krajnje date tačke, u kojoj se objekat vraća u stanje mirovanja.

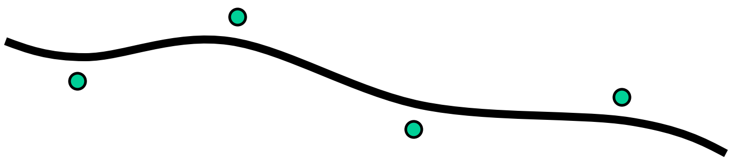
Interpolacija

O čemu vodimo računa kada definišemo krivu koja prolazi kroz date tačke:

- Interpolacija ili aproksimacija?
- Složenost
- Neprekidnost
- Lokalna ili globalna kontrola
- Neophodni ulazni podaci

Interpolacija ili aproksimacija





Da li zahtevamo da kriva prolazi kroz date tačke, ili je dovoljno da im se dovoljno približi?

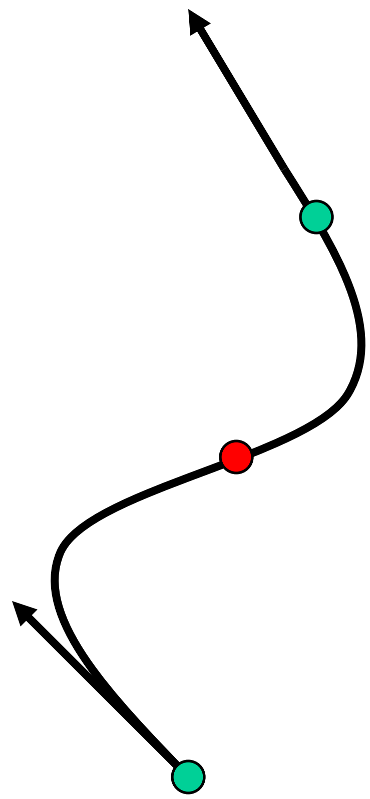
Uočimo: broj posmatranih tačaka uvek utiče na složenost interpolacione krive, a ne mora da utiče na složenost aproksimativne krive.

Složenost

Što je manja složenost krive, to je implementacija (animacija) efikasnija i, time, poželjnija.

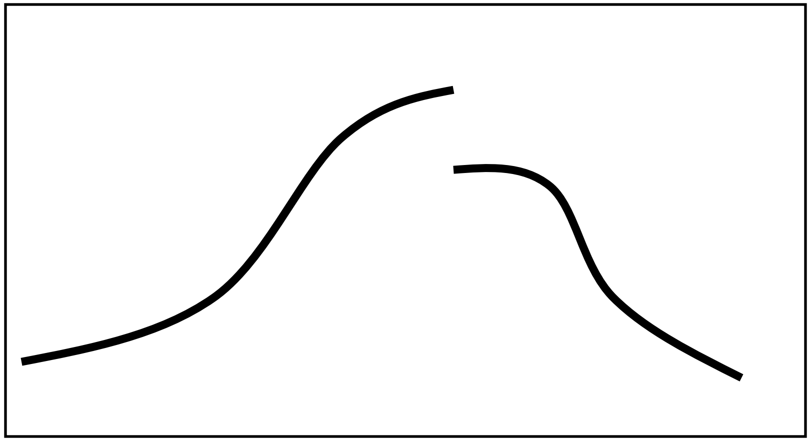
Veći broj uslova koje kriva treba da ispuni (broj tačaka, glatkost itd) povećava kompleksnost (interpolacione) krive.

Najčešće je u upotrebi **polinom trećeg stepena**: to je najjednostavnija kriva koja "dozvoljava" prevojnu tačku. Ovakvi polinomi se zatim nadovezuju i generišu krivu koja prolazi kroz više tačaka.

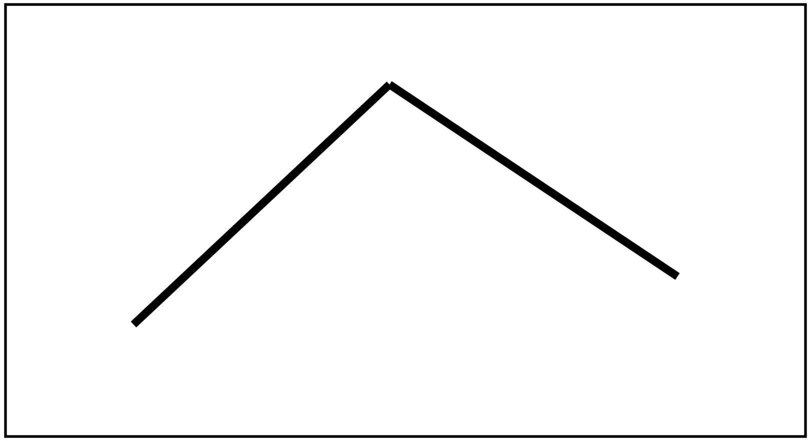


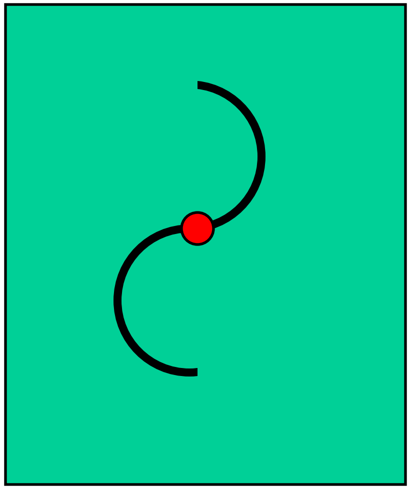
Neprekidnost

Kriva nije neprekidna

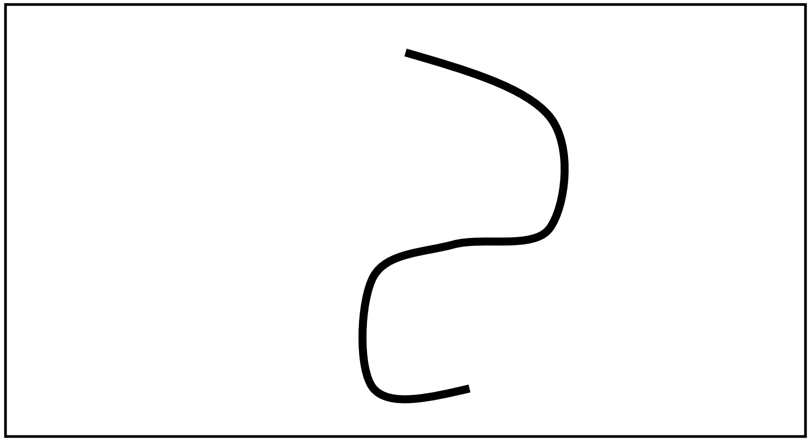


Kriva je neprekidna, ali njen prvi izvod nije





Neprekidna kriva, kao i prvi izvod

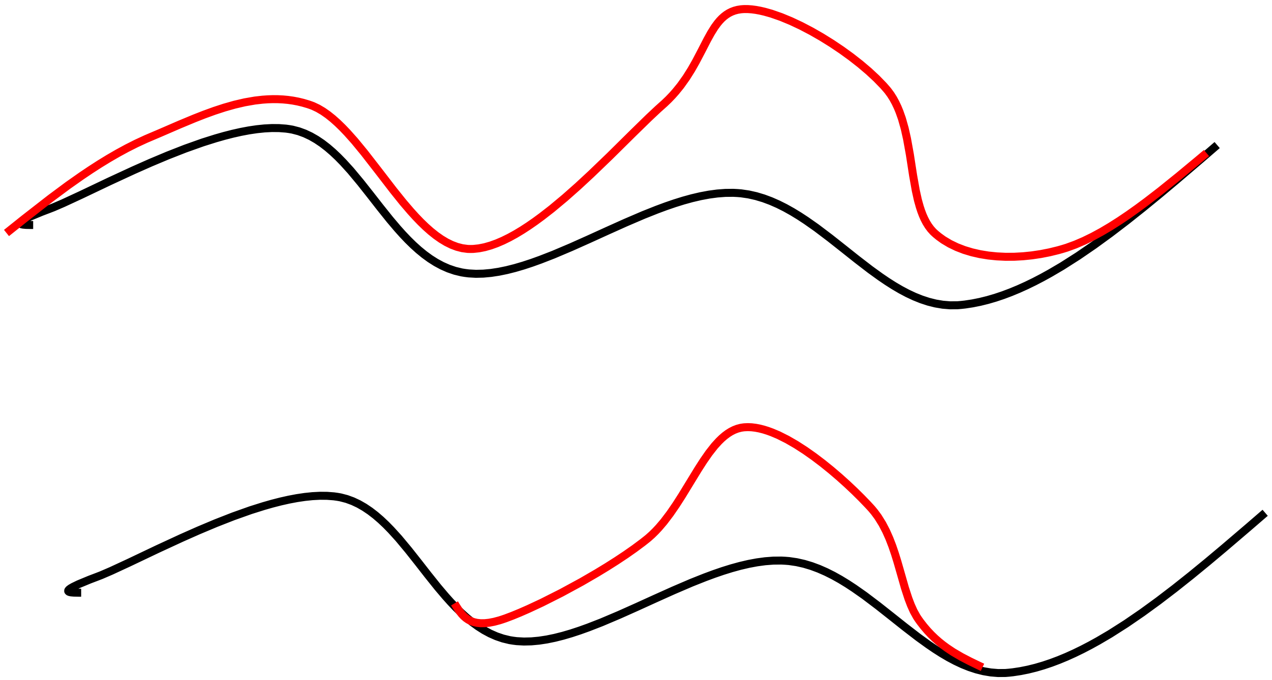


Neprekidnost

- Neprekidnost – mala promena ulaznih veličina dovodi do male promene izlaznih veličina
- Neprekidnost izvoda – promena (pravca) tangente je mala pri kretanju kroz bliske tačke.
- Neprekidnost drugog izvoda – promena krivine (zakrivljenosti) je mala pri kretanju kroz bliske tačke na krivoj.

- Ukoliko koristimo polinome trećeg stepena koje “nadovezujemo”, uslov neprekidnosti postavljamo u krajnjim tačkama u kojima spajamo ove po delovima neprekidne i glatke krive.

Lokalna ili globalna kontrola

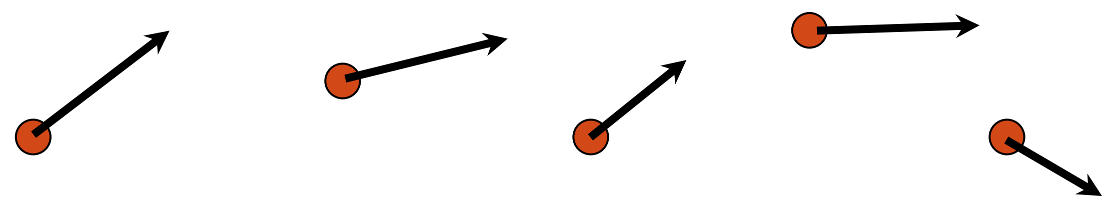


Da li lokalna promena (recimo, dodavanje jedne tačke) zahteva promenu cele interpolacione krive, ili samo jednog njenog dela?

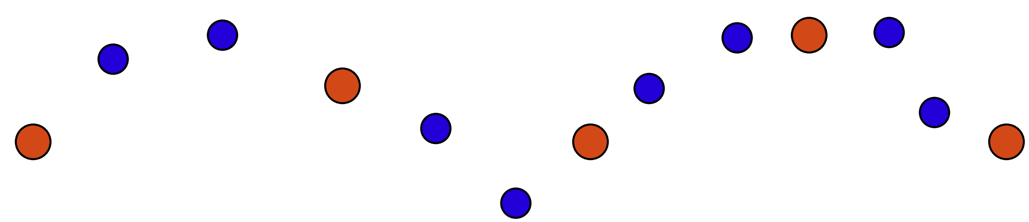
Potrebni ulazni podaci

Samo tačke

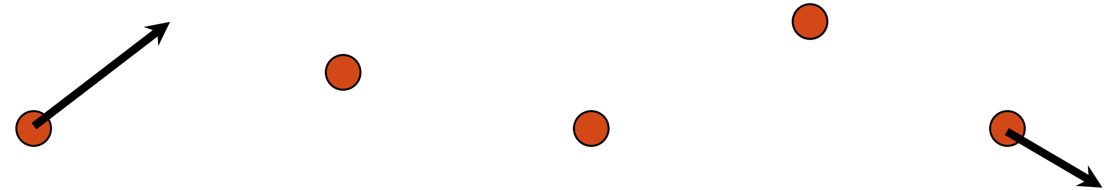
Tangente



Unutrašnje kontrolne tačke



Tačke i tangente u početnoj i krajnjoj



Vrste interpolacionih krivih

- Lagrange-ov interpolacioni polinom
- **Po delovima polinomi trećeg stepena**
  - Hermite
  - Catmull-Rom
  - Nadovezane parabole
  - Bezier
  - B-spline
  - T(ension)-C(ontinuity)-B(ias)
  - 4-Point Form

Parametarski zadate krive

- Kriva može biti zadata
  - Eksplicitno: *y = f(x)* (samo ako je kriva grafik funkcije)
  - Implicitno: F(x,y) = 0 (nije jednostavno odrediti parove odgovarajućih tačaka)
  - Parametarski: x=x(t), y=y(t), a ≤ t ≤ b.

(Navedene su definicije u 2D, sve se može posmatrati i u 3D)

- **Primer:** Kružnica sa centrom u (0,0), poluprečnika 1

Eksplicitno: $y_1 = \sqrt{1-x^2} \qquad y_2 = -\sqrt{1-x^2}$

Implicitno: $x^2 + y^2 = 1$

Parametarski: $x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t \quad t \in [0, 2\pi]$

Parametarski zadate krive

- Parametarski zadata kriva je oblika $p(t) = (x(t), y(t))$.
- Za vrednosti parametra t iz nekog zatvorenog intervala dobijamo segment krive.
- Vrednosti x i y menjamo nezavisno jednu od druge, menjajući vrednost parametra t.
- Ako posmatramo segment krive za $t_0 \leq t \leq t_1$, onda su

  $p(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ i $p(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$

  redom početna i krajnja tačka segmenta.

- Uočimo: svaka eksplicitno zadata kriva $y = f(x)$ se može prikazati parametarski u obliku

$$p(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t)).$$

Polinomi

- Od posebnog značaja za interpolaciju i aproksimaciju su polinomi. Polinomi su najjednostavnije funkcije za koje lako određujemo vrednosti, izvod, integral, itd.
- Složenost polinomnih funkcija zavisi od njihovog stepena. Najčešće nastojimo da uspostavimo balans između uslova koje želimo da zadovoljimo (a koji doprinose složenosti) i generalnog zahteva za što jednostavnijom krivom.
- Primer: Tejlorov polinom aproksimira funkciju u okolini date tačke, a postignuta tačnost raste sa povećanjem stepena polinoma.

Polinomne krive

- Polinom *n*-tog stepena u kanoničkoj formi je oblika

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1} + c_n t^n$$

- Specijalno, polinom trećeg stepena je

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

- Parametarski zadat, ima oblik

$$x(t) = c_{1,0} + c_{1,1} t + c_{1,2} t^2 + c_{1,3} t^3$$
$$y(t) = c_{2,0} + c_{2,1} t + c_{2,2} t^2 + c_{2,3} t^3$$

Polinomne krive

Zbog kompaktnosti se koristi i matrična notacija.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

Dimenzija matrice C odgovara dimenziji prostora (broj vrsta) i stepenu polinoma (broj kolona).
Treba imati na umu da se konvencije o matričnom zapisu mogu razlikovati!

Polinomna interpolacija

- Za *n+1* datu tačku određujemo polinom *n*-tog stepena koji sadrži sve date tačke.
- Date tačke se zovu **čvorovi** interpolacije.
- Za dve date tačke, interpolacija je **linearna** – postiže se polinomom prvog stepena (tačke povezujemo pravolinijskim segmentom).
- Osim uslova da kriva prolazi kroz date tačke, možemo posmatrati i uslove koji se odnose na brzinu i ubrzanje kretanja duž krive, odnosno na uslove koji se odnose na tangentu (prvi izvod) i zakrivljenost (drugi izvod) krive.

Polinom trećeg stepena i uslovi

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 t^2 + \mathbf{c}_3 t^3,$$

Polinom trećeg stepena

Uslovi:

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1(0) + \mathbf{c}_2(0)^2 + \mathbf{c}_3(0)^3 = \mathbf{c}_0.$$

Početna tačka segmenta dobija se za t=0.

$$\mathbf{p}(1) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1(1) + \mathbf{c}_2(1)^2 + \mathbf{c}_3(1)^3 = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3.$$

Krajnja tačka segmenta dobija se za t=1.

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 t + 3\mathbf{c}_3 t^2,$$
$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{p}}(t) = 2\mathbf{c}_2 + 6\mathbf{c}_3 t.$$

Prvi i drugi izvod, odnosno, brzina i ubrzanje.

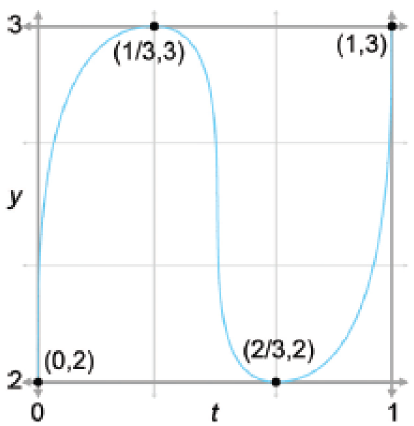
$$\mathbf{t}(t) = \hat{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}.$$

Tangentni vektor na krivu u tački *t*.

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{\|\mathbf{v}(t)\|^3}.$$

Krivina krive u tački *t*.

Polinomna interpolacija



t	$x(t)$	$y(t)$
0	0	2
1/3	1/3	3
2/3	2/3	2
1	1	3

Pretpostavimo da želimo da odredimo polinom trećeg stepena *y = P(t)* koji prolazi kroz 4 date tačke – nazivamo ih **čvorovima**. Ova polinomna kriva će nam poslužiti umesto "plave" putanje (krive) na slici; njenu jednačinu ne znamo.

Vrednosti parametra *t* su (u ovom slučaju) na jednakom međusobnom rastojanju, u intervalu [0,1], tj. između početne i krajnje posmatrane tačke. Vrednosti *t* možemo odabrati i na druge načine, u zavisnosti od potreba i podataka koje imamo.

U opštem slučaju posmatramo funkcije *x(t)* i *y(t)* koje nezavisno interpoliramo. Ovde smo odabrali samo jednu nezavisnu (*t*) i jednu zavisnu (*y*) promenljivu. Postupak je analogan za *x=x(t).*

Dakle, poznata su nam 4 čvora: (0,2), (1/3, 3) (2/3, 2), (1,3).
Odredićemo polinom trećeg stepena koji prolazi kroz njih.

Polinomna interpolacija-algebarski pristup

Posmatramo *n+1* datih čvorova $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$

Želimo da odredimo polinom (n-tog stepena) koji prolazi kroz njih:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Ovim uslovom definišemo sistem od n+1 linearnih jednačina sa n+1 nepoznatih:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \quad \ldots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases} \qquad V_n = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

Determinanta sistema je poznata kao Vandermondova determinanta.
Različita je od nule kada su čvorovi x_i međusobno različiti.

$$|V_n| = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

Mada teorijski jasan i utemeljen, ovaj pristup je u praksi nezgodan, zbog velike računske složenosti i numeričke nestabilnosti.

Lagrange-ov interpolacioni polinom

Drugačiji pristup je da traženi polinom “izgradimo” od jednostavnijih polinoma sa pogodnim osobinama.
Pogodnim osobinama smatramo da svaki od “elementarnih” – **baznih** – polinoma ima vrednost 1 u tačno jednom čvoru interpolacije, a vrednost 0 u svim ostalim.
Za polinom trećeg stepena, bazni polinomi bi trebalo da ispunjavaju sledeće uslove:

$$\begin{array}{llll}
\ell_1(t_1)=1, & \ell_1(t_1)=0, & \ell_3(t_1)=0, & \ell_4(t_1)=0, \\
\ell_1(t_2)=0, & \ell_2(t_2)=1, & \ell_3(t_2)=0, & \ell_4(t_2)=0, \\
\ell_1(t_3)=0, & \ell_2(t_3)=0, & \ell_3(t_3)=1, & \ell_4(t_3)=0, \\
\ell_1(t_4)=0, & \ell_2(t_4)=0, & \ell_3(t_4)=0, & \ell_4(t_4)=1.
\end{array}$$

Ukoliko raspolažemo baznim polinomima, interpolacioni polinom tada možemo napisati kao njihovu linearnu kombinaciju, sa koeficijentima koji su jednaki datim vrednostima u čvorovima interpolacije:

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n} y_i \ell_i(t) = y_1\ell_1(t)+y_2\ell_2(t)+\cdots+y_{n-1}\ell_{n-1}(t)+y_n\ell_n(t).$$

Lagrange-ov interpolacioni polinom

Bazni polinomi koji ispunjavaju navedene uslove nazivaju se **Lagrange-ovi bazni polinomi**:

Lagrange Basis Polynomial

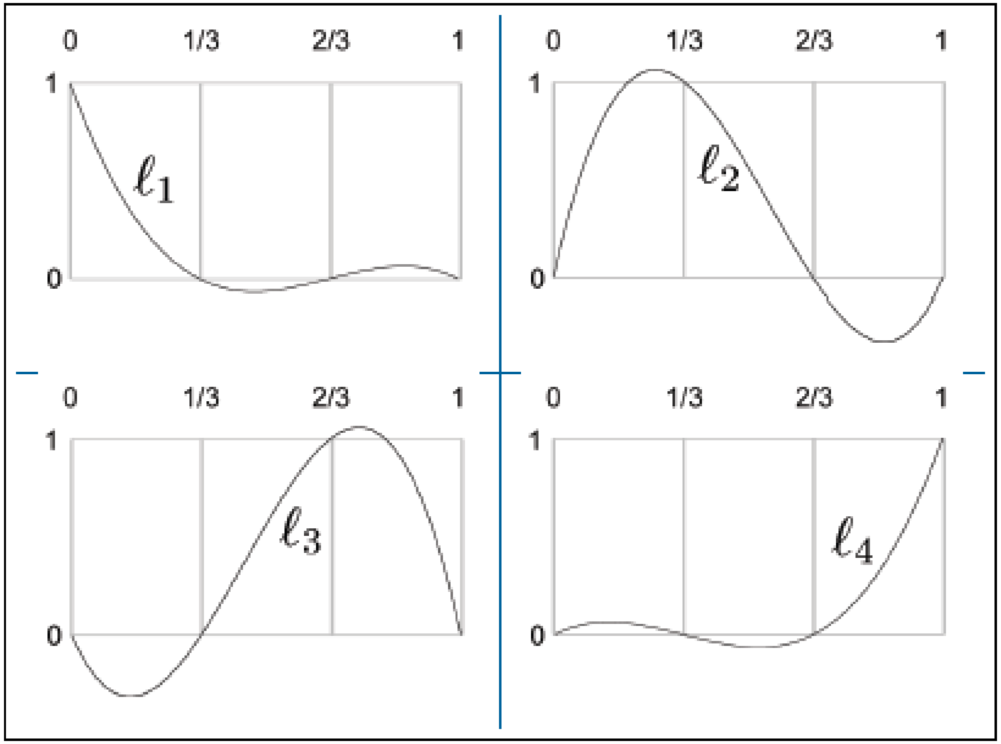
$$\ell_i(t) = \prod_{\substack{1\le j\le n,\\ j\ne i}} \frac{t-t_j}{t_i-t_j} = \frac{t-t_0}{t_i-t_0}\cdots\frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}\,\frac{t-t_{i+1}}{t_i-i_{i+1}}\cdots\frac{t-t_n}{t_i-t_n}.$$

Za interpolacioni polinom trećeg stepena koji odgovara našem primeru je:

$$\begin{aligned}
\ell_1(t) &= \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right)\left(\frac{t-t_4}{t_1-t_4}\right) = \left(\frac{t-1/3}{0-1/3}\right)\left(\frac{t-2/3}{0-2/3}\right)\left(\frac{t-1}{0-1}\right)\\
&= \left(\frac{3t-1}{-1}\right)\left(\frac{3t-2}{-2}\right)\left(\frac{t-1}{-1}\right) = \frac{(3t-1)(3t-2)(t-1)}{-2}\\
&= -(9/2)t^3+9t^2-(11/2)t+1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_2(t) &= (27/2)t^3-(45/2)t^2+9t,\\
\ell_3(t) &= -(27/2)t^3+18t^2-(9/2)t,\\
\ell_4(t) &= (9/2)t^3-(9/2)t^2+t.
\end{aligned}$$

Lagrange-ovi bazni polinomi trećeg stepena za ekvidistantne čvorove interpolacije

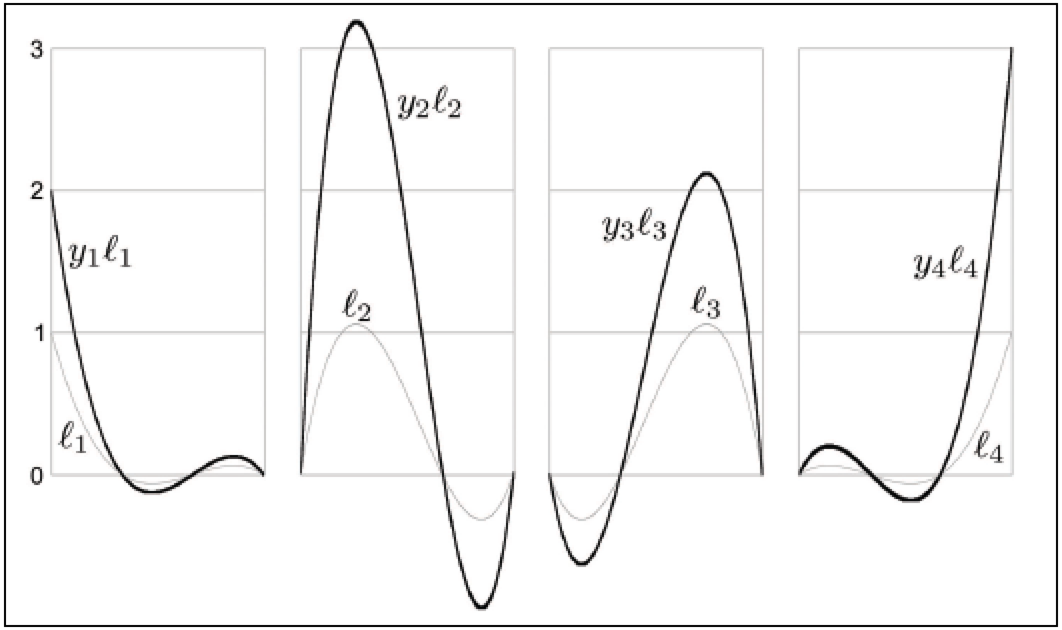


Uočimo da prikazani bazni polinomi ne zavise od vrednosti y_i, već samo od vrednosti t_i. Navedene polinome baze možemo koristiti u svim situacijama kada interpoliramo polinomom trećeg stepena i koristimo ekvidistantne čvorove Interpolacije na intervalu [0,1].

Lagrange-ov interpolacioni polinom

Interpolacioni polinom za konkretan posmatrani primer dobijamo množeći bazne Lagranžove polinome odgovarajućim vrednostima y_i u datim čvorovima interpolacije.

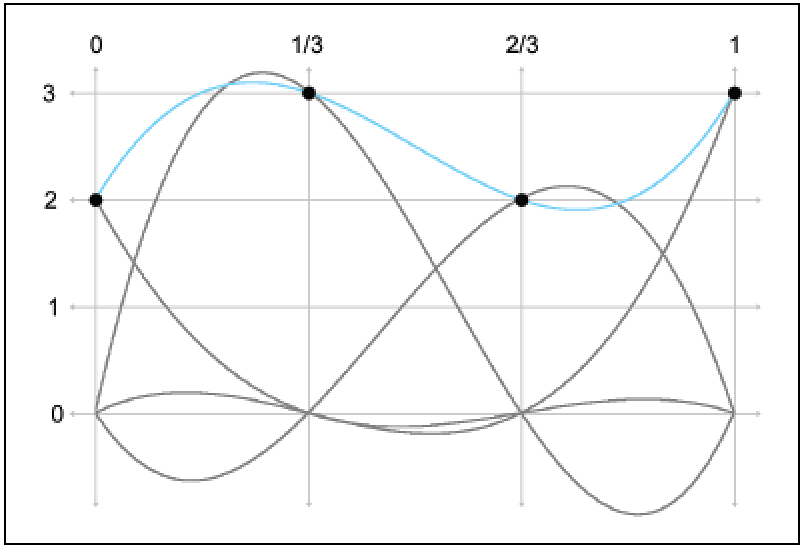
Ovako “skalirani” bazni polinomi, za $y_1 = y_3 = 2, \quad y_2 = y_4 = 3$, prikazani su na slici:



Lagrange-ov interpolacioni polinom

Konačno, traženi polinom određujemo kao:

$$\begin{aligned}
P(t) &= y_1\ell_1(t) + y_2\ell_2(t) + y_3\ell_3(t) + y_4\ell_4(t) \\
&= 2[-(9/2)t^3 + 9t^2 - (11/2)t + 1] + 3[(27/2)t^3 - (45/2)t^2 + 9t] \\
&\quad + 2[-(27/2)t^3 + 18t^2 - (9/2)t] + 3[(9/2)t^3 - (9/2)t^2 + t] \\
&= -9t^3 + 18t^2 - 11t + 2 + (81/2)t^3 - (135/2)t^2 + 27t \\
&\quad - 27t^3 + 36t^2 - 9t + (27/2)t^3 - (27/2)t^2 + 3t \\
&= 18t^3 - 27t^2 + 10t + 2.
\end{aligned}$$



Grafički, traženi interpolacioni polinom je prikazan kao plava kriva.

Polinomna interpolacija - zaključci

- Na osnovu algebarskog izvođenja Lagrange-ovog interpolacionog polinoma (jedinstvenost rešenja sistema linearnih jednačina) zaključujemo da je polinom *n*-tog stepena koji prolazi kroz *n+1* datih čvorova interpolacije **jedinstven**.
- Važan nedostatak interpolacionog polinoma je što svaka promena ulaznih podataka (recimo, promena jednog čvora) zahteva novo računanje polinoma, bez mogućnosti da se koriste prethodno postojeći rezultati. Ovo nazivamo **globalnom kontrolom**.
- Interpolacioni polinom u Lagranžovoj bazi koristimo kada želimo da odredimo vrednosti funkcije u tačkama različitim od čvorova, a nisu nam važni koeficijenti polinoma. Ako želimo koeficijente, koristimo računski složeniji pristup preko Vandermondove matrice i generišemo polinom u kanoničkoj formi (ili kanoničku formu dobijamo iz Lagranžove).

Polinomna interpolacija – analiza greške

- Analiza Vandermondove matrice dovodi do zaključka da je izračunavanje koeficijenata interpolacionog polinoma Gausovim postupkom numerički nestabilno, odnosno da i mala promena ulaznih veličina (čvorova) može dovesti do značajne promene oblika polinoma, kao i da su greške pri računanju koeficijenata potencijalno velike.
- Formula za grešku Lagranžovog polinoma sugeriše da pogodan izbor čvorova može smanjiti odstupanje interpolacionog polinoma od posmatrane funkcije.
- Ekvidistantni čvorovi su često loš izbor.

Analiza greške interpolacionog polinoma

Neka je $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

$f(x) \in C^{n+1}[a, b]$,

$L_n(x)$ interpolacioni polinom n-tog stepena sa datim čvorovima, na posmatranom intervalu.

Tada važi:

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} M_{n+1}$$

gde je

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n), \quad M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Analiza greške Lagrange-ovog polinoma

Lagranžov interpolacioni polinom prolazi kroz date čvorove interpolacije. Ukoliko na posmatranom intervalu ocenjujemo odstupanje ovog polinoma od proizvoljne funkcije koja prolazi kroz iste tačke (grešku), možemo pokazati da:

- Odstupanje zavisi od osobina (glatkosti) funkcije i njenih izvoda;
- Odstupanje raste sa povećanjem posmatranog intervala;
- Odstupanje je po pravilu najmanje blizu sredine intervala, a raste prema krajevima;
- Odstupanje ne opada obavezno (uniformno, u svim tačkama) sa povećanjem stepena polinoma.

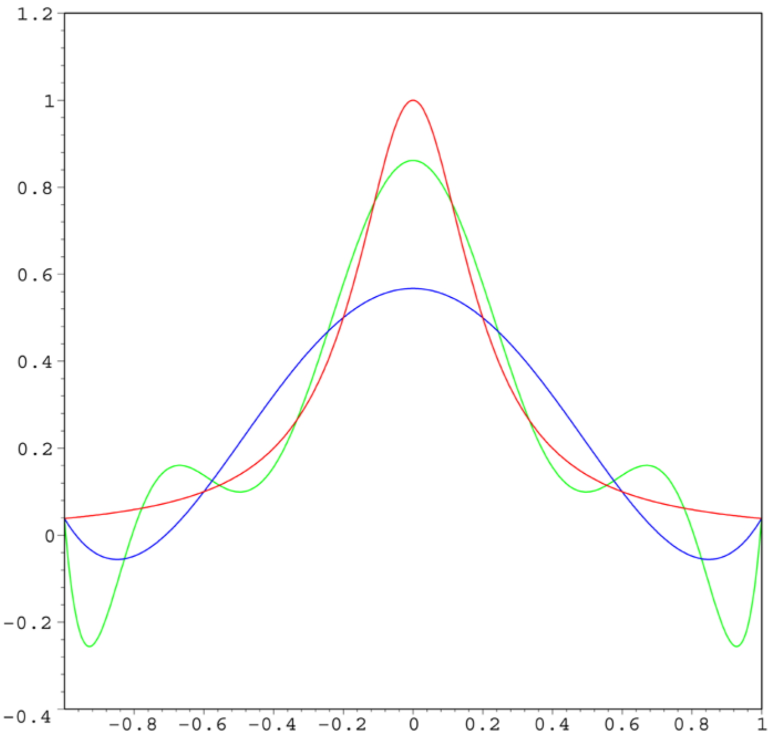
Analiza greške interpolacionog polinoma Runge-ov fenomen

Posmatramo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

i ekvidistantnu podelu intervala [-1,1],

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, \;\; i = 0, 1, \ldots, n$$



Grafici funkcije i dva interpolaciona polinoma pokazuju da se greška povećava na krajevima intervala.
Pri tome, interpolacioni polinom 5tog stepena ima manje odstupanje na krajevima intervala od polinoma 9tog stepena, ali je njegova greška veća u središnjem delu intervala.

Polinomna interpolacija
Aitken-ov algoritam

Posmatrani problem možemo pojednostaviti tako što posmatramo interpolaciju između *n*, umesto *n+1*, tačaka:

(1) izostavimo prvu tačku i interpoliramo metodom za *n* tačaka (koji recimo znamo);
(2) izostavimo poslednju tačku i ponovimo postupak;
(3) na neki način kombinujemo dobijene rezultujuće krive.

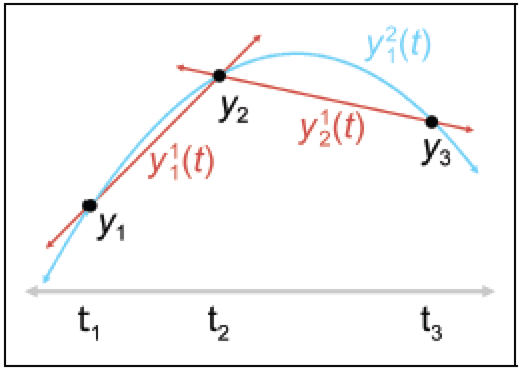
Aitken-ov algoritam se zasniva na primeni linearne interpolacije na delovima posmatranog segmenta, nakon što se segment podeli na odgovarajući način. Zatim se dobijene krive kombinuju.

Imaćemo pravolinijske segmente $y_i^1(t)$, za i=1,2,3, čije su krajnje tačke y_i i y_{i+1}.

Zatim ćemo od njih formirati kvardratne parabole $y_i^2(t)$, koje će prolaziti kroz tri uzastopne tačke. Konačno, polinom trećeg stepena, $y_i^3(t)$, je tražena kriva koju dobijamo kombinovanjem parabola. U svim koracima koristimo linearnu interpolaciju.

Polinomna interpolacija
Aitken-ov algoritam

Linearna interpolacija podrazumeva definisanje pravolinijskog segmenta koji prolazi kroz dve date tačke.
Postupak je ilustrovan na slici, za tačke (t_1,y_1) i (t_2,y_2), a zatim (t_2,y_2) i (t_3,y_3).



$$y_1^1(t) = \frac{(t_2 - t)y_1 + (t - t_1)y_2}{t_2 - t_1}, \qquad y_2^1(t) = \frac{(t_3 - t)y_2 + (t - t_2)y_3}{t_3 - t_2}.$$

Zatim, linearna interpolacija dobijenih segmenata:

$$y_1^2(t) = \frac{(t_3 - t)\left[y_1^1(t)\right] + (t - t_1)\left[y_2^1(t)\right]}{t_3 - t_1}.$$

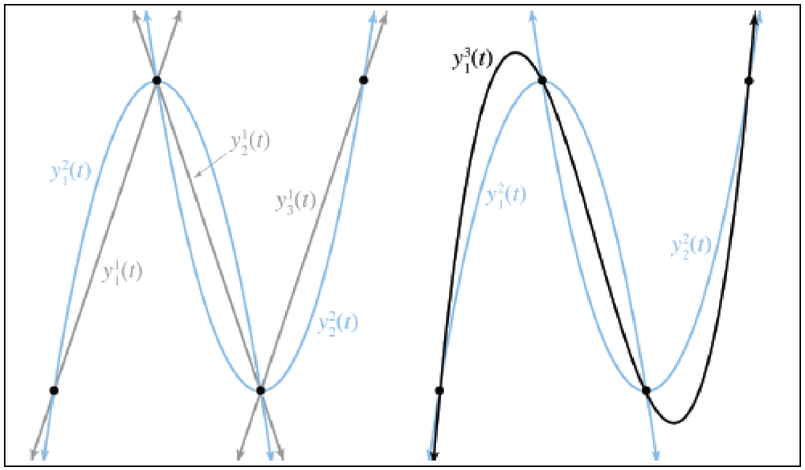
U opštem slučaju:

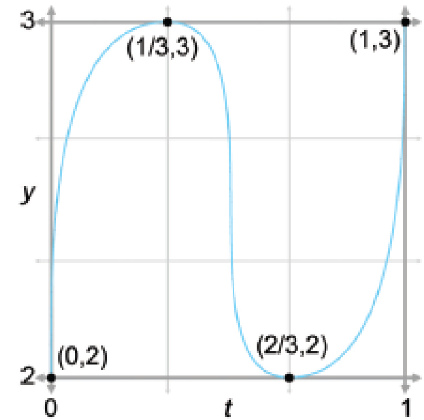
Aitken's Algorithm

$$y_i^0(t) = y_i,$$

$$y_i^j(t) = \frac{(t_{i+j} - t)\left[y_i^{j-1}(t)\right] + (t - t_i)\left[y_{i+1}^{j-1}(t)\right]}{t_{i+j} - t_i}.$$

Polinomna interpolacija
Aitken-ov algoritam





Nakon primene opisanog algoritma dobijamo interpolacionu polinomnu krivu trećeg stepena.
Na levom delu slike tri pravolinijska segmenta kombinovana su dve kvadratne polinomne krive. Desno je prikazano kako se dve parabole zatim lineranom interpolacijom kombinuju u polinom trećeg stepena – kriva prikazana crnom bojom.

Poređenjem sa krivom na slici sasvim desno vidimo da se dobijeni polinom razlikuje od inicijalne krive (recimo, neke vrednosti su van intervala [2,3]).

Lagrange-ov polinom - komentari

- Zbog svega navedenog, polinomna interpolacija se koristi najčešće tako što se polinomi malog (trećeg) stepena generišu na podintervalima, i nadovezuju.
- Kako nadovezati?

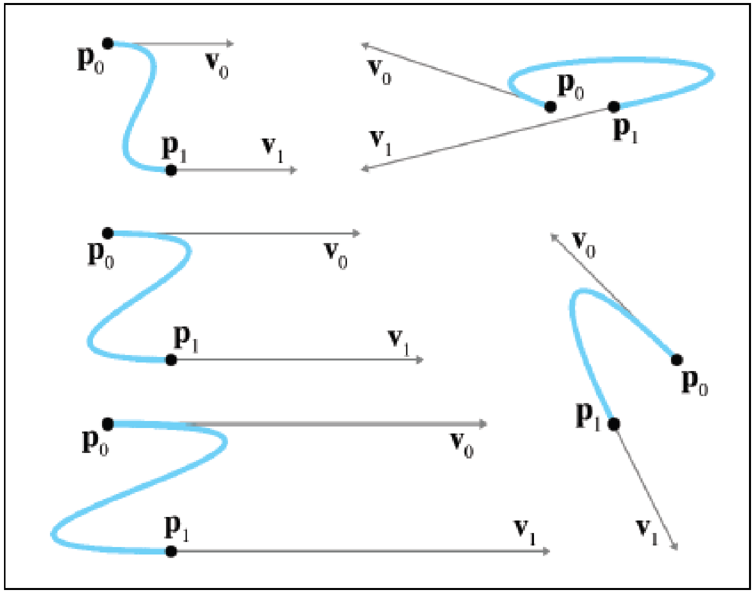
- Intuitivno je jasno da je potrebno definisati uslove koje polinomi treba da zadovoljavaju u krajnjim tačkama posmatranih podintervala – tačkama nadovezivanja.

Hermite-ov polinom

- Lagrange-ov polinom formiramo na osnovu podataka o tačkama kroz koje kriva treba da prođe.
- Hermite-ov polinom formiramo na osnovu podataka o tačkama kroz koje kriva treba da prođe **i podataka o vrednostima izvoda** (prvog i višeg reda) u tim tačkama.
- Najčešće uz listu čvorova koristimo vrednost prvog izvoda u čvorovima, odnosno podatak o pravcu tangente na krivu.
- S obzirom da broj uslova određuje stepen interpolacionog polinoma, Hermite-ov polinom za $n+1$ čvor je, u opštem slučaju, stepena $(n+1)(p+1)-1$, gde je p red najvišeg izvoda na koji postavljamo neki uslov.

Hermite-ov polinom trećeg stepena

- Hermite-ov polinom trećeg stepena određen je poznavanjem 2 čvora (n=1) i vrednosti prvog izvoda u njima (p=1).
- Za razliku od Lagrange-ovog polinoma trećeg stepena, na čiji oblik utiču vrednosti funkcije u unutrašnjim tačkama intervala, oblik Hermite-ovog polinoma određuju (samo) krajnje tačke krive i pravci tangenti u njima.



Na slici su prikazane neke Hermite-ove krive.

Hermite-ov polinom trećeg stepena

Uslovi o početnoj i krajnjoj tački segmenta (p(0) i p(1)),
i o vrednosti prvog izvoda u tim tačkama (v(0) i v(1))
generišu sistem jednačina

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(0) &= \mathbf{p}_0 & \Longrightarrow && \mathbf{c}_0 &= \mathbf{p}_0, \\
\mathbf{v}(0) &= \mathbf{v}_0 & \Longrightarrow && \mathbf{c}_1 &= \mathbf{v}_0, \\
\mathbf{v}(1) &= \mathbf{v}_1 & \Longrightarrow && \mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 + 3\mathbf{c}_3 &= \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{p}(1) &= \mathbf{p}_1 & \Longrightarrow && \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 &= \mathbf{p}_1.
\end{aligned}$$

Rešenje sistema je

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{p}_0, \\
\mathbf{c}_1 &= \mathbf{v}_0, \\
\mathbf{c}_2 &= -3\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 + 3\mathbf{p}_1, \\
\mathbf{c}_3 &= 2\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{p}_1.
\end{aligned}$$

U matričnom obliku:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}\mathbf{t} = \mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{t} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{p}_0 & \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}.$$

Hermite-ov polinom trećeg stepena

Prethodni matrični zapis možemo razumeti na dva načina:

- *p(t)* =C*t* = (PH)*t* je matrica koeficijenata rezultujućeg Hermite-ovog polinoma koji se dobija množenjem matrice P koja sadrži pozicije i brzine (čvorove i vrednosti prvog izvoda u njima), a H je odgovarajuća matrica konverzije; množenjem matricom H vrši se konverzija iz Hermite-ove u monomnu bazu.

- *p(t)* = P(H*t)* gde H*t* generiše Hermite-ove bazne funkcije, koje su elementi (vrste) u vektoru-koloni H*t.* Detaljnije*:*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \mathbf{P}(\mathbf{H}\mathbf{t}) \\
&= \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{p}_0 & \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{p}_0 & \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 3t^2 + 2t^3 \\ t - 2t^2 + t^3 \\ -t^2 + t^3 \\ 3t^2 - 2t^3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hermite-ova polinomna baza trećeg stepena

Hermite-ovi bazni polinomi, elementi (vrste) proizvoda H*t*

$$
\begin{aligned}
H_0(t) &= 1 - 3t^2 + 2t^3, \\
H_1(t) &= t - 2t^2 + t^3, \\
H_2(t) &= -t^2 + t^3, \\
H_3(t) &= 3t^2 - 2t^3.
\end{aligned}
$$

Hermite-ov interpolacioni polinom kao linearna kombinacija baznih polinoma

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \mathbf{p}_0 & \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{p}_1 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix} \\
&= H_0(t)\,\mathbf{p}_0 + H_1(t)\,\mathbf{v}_0 + H_2(t)\,\mathbf{v}_1 + H_3(t)\,\mathbf{p}_1 .
\end{aligned}
$$

Hermite-ovi bazni polinomi, grafički