

*Fakultet tehničkih nauka*  
*smer: Animacija u inženjerstvu*  
*predmet: Matematika za inženjersku grafiku*

### **Zadaci - linearne transformacije**

1. Ako je  $\mathbf{v} = [8 \ 7 \ 4]$  vektor prikazan u standardnoj bazi prostora  $\mathbb{R}^3$ , odrediti koordinate ovog vektora u odnosu na bazu  $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\}$ .

2. Pokazati da je preslikavanje  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definisano sa

$$T(x, y) = (x + y, x - 2y, 3x)$$

linearna transformacija.

3. Ispitati da li je preslikavanje  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definisano sa

$$T(x, y) = (x^2, y^2)$$

linearna transformacija.

4. Za funkciju  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definisanu na sledeći način:

$$g(x, y, z) = (x - y + 2z, -x + 3y + z)$$

ispitati da li je linearna transformacija i, ukoliko jeste, napisati matricu transformacije u odnosu na standardnu bazu.

5. Za linearnu transformaciju  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definisanu kao

$$T(x, y) = (3x - 4y, x + 2y, 6x - y, 10y)$$

napisati matricu transformacije u odnosu na standardnu bazu i odrediti sliku vektora  $\mathbf{v} = [-5 \ 2]$  koristeći matricu transformacije.

6. Neka je  $P$  linearna transformacija definisana sa

$$P(x, y, z) = (x, y, 0).$$

Odrediti matricu transformacije u odnosu na bazu  $B = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\}$ .

7. Neka je  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linearna transformacija definisana sa

$$T(x, y) = (x + 3y, 0, 2x - 4y).$$

Odrediti matricu transformacije u odnosu na bazu koja je dobijena permutacijom standardne baze u  $\mathbb{R}^3$ ,  $S = \{e_3, e_2, e_1\}$ . Obratiti pažnju na činjenicu da je poredak u bazi važan!

8. Neka je  $T$  linearna transformacija koja preslikava  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definisana sa

$$T(x, y, z) = (x - y, y - x, x - z).$$

Dat je vektor  $\mathbf{v} = [1 \ 1 \ 2]$  i baza  $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ .

- (a) Odrediti  $[T]_B$  i  $[\mathbf{v}]_B$
- (b) Proveriti da li važi:  $[T]_B \cdot [\mathbf{v}]_B = [T(\mathbf{v})]_B$
9. Za linearnu transformaciju  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  važi da je  $f(1, -1) = (-3, 6)$  i  $f(-2, 1) = (2, -4)$ . Odrediti  $f(x, y)$  i odgovarajuću matricu linearne transformacije.
10. Linearna transformacija  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data je sa  $f(5, -1, 3) = (1, 2)$ ,  $f(-4, 1, -2) = (-3, 0)$  i  $f(6, -1, 3) = (4, -1)$ . Izračunati  $f(3, 1, 1)$ .
11. Pokazati da se delovanje operatora  $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}$  na prostor  $P_3$  (polinoma sa realnim koeficijentima stepena ne većeg od tri) može prikazati kao matricno množenje.
12. Neka je  $\rho$  linearna transformacija u  $\mathbb{R}^2$  koja rotira vektor za ugao  $\varphi$  u smeru suprotnom od kazaljke na satu. Naći matricu transformacije. Naći sliku vektora  $\mathbf{v} = [4 \ 2]$  ako je  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .
13. Neka je  $\rho$  linearna transformacija koja podrazumeva rotaciju oko koordinatne ose u  $\mathbb{R}^3$  za ugao  $\varphi$ . Naći matrice transformacija rotacije oko  $x$ ,  $y$  i  $z$  osa u odnosu na standardnu bazu. Podrazumevamo levi koordinatni sistem i rotaciju u pozitivnom smeru, (u levom koordinatnom sistemu to je u smeru kazaljke na satu).
14. Napisati matrice sledećih transformacija u ravni:
- (a) simetrija (refleksija) u odnosu na  $x$  - osu;
- (b) simetrija (refleksija) u odnosu na  $y$  - osu;
- (c) simetrija (refleksija) u odnosu na pravu  $y = x$ .
15. Napisati matricu transformacije kompozicije sledećih transformacija: simetrije u odnosu na  $y$ -osu, koja je praćena simetrijom u odnosu na  $x$ -osu.
16. Napisati matricu kompozicije refleksije u odnosu na  $y$ -osu, praćene ponovnom refleksijom u odnosu na  $y$ -osu. Koje preslikavanje predstavlja ova transformacija?

17. Napisati matricu koja predstavlja homotetiju (skaliranje) u pravcu koordinatnih osa u  $\mathbb{R}^2$ , sa istim, odnosno različitim, koeficijentima za svaki od dva pravca.
18. Napisati matricu koja predstavlja homotetiju (skaliranje) u pravcu koordinatnih osa u  $\mathbb{R}^3$ , a zatim odrediti matricu koja duplira visinu, širinu i dužinu objekta u  $\mathbb{R}^3$ .
19. Odrediti matrice ortogonalnih projekcija na koordinatne ose u  $\mathbb{R}^2$ .
20. Odrediti matrice ortogonalnih projekcija na koordinatne ose i ravni u  $\mathbb{R}^3$ .
21. Naći koordinate vektora koji se dobija:
  - (a) refleksijom vektora  $\mathbf{x} = [2, -4, 1]$  u odnosu na  $xz$ -ravan;
  - (b) projektovanjem vektora  $\mathbf{x} = [10, 7, -9]$  na  $yz$ -ravan.
22. Odrediti matricu transformacije kojom se realizuje rotacija za ugao  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  oko koordinatnog početka, praćena simetrijom u odnosu na:
  - (a)  $y$ -osu;
  - (b) na pravu  $y = \sqrt{3} \cdot x$ .
23. Projektovati vektor  $\mathbf{x} = [4 \ 2]$  na  $x$ -osu, a zatim ga rotirati za ugao  $\frac{\pi}{4}$  u smeru suprotnom smeru kazaljke na satu.
24. Vektor  $\mathbf{x} = [4 \ 2]$  rotirati za  $\frac{\pi}{4}$  u smeru suprotnom smeru kazaljke na satu, a zatim ga projektovati na  $x$ -osu.
25. Napisati matricu transformacije kojom se realizuje simetriju trougla  $ABC$  u odnosu na pravu  $y = \sqrt{3} \cdot x$ .