Fakultet tehničkih nauka
smer: Animacija u inženjerstvu
predmet: Matematika za inženjersku grafiku

Zadaci - vektori i matrice

1. Izračunati intenzitet vektora:

   (a) $\mathbf{a} = [4,\ -3,\ 1]$ i $\mathbf{b} = [5,\ -2,\ -3]$;

   (b) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ i $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

2. Izračunati skalarni proizvod vektora iz prethodnog zadatka.

3. Odrediti ugao između vektora:

   (a) $\mathbf{a} = [8,\ 2,\ 2]$ i $\mathbf{b} = [4,\ -4,\ 0]$;

   (b) $\mathbf{a} = [-2,\ 2,\ -1]$ i $\mathbf{b} = [-6,\ 3,\ 6]$.

4. Naći intenzitet vektora $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, ako je $|\mathbf{p}| = 2$, $|\mathbf{q}| = \sqrt{3}$, a ugao između vektora $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ je $\frac{\pi}{6}$.

5. Naći vektor koji je normalan na vektore $\mathbf{a} = [4,\ -3,\ 1]$ i $\mathbf{b} = [5, -2, -3]$.

6. Neka su $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$ i $\mathbf{q} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$ ortogonalni vektori, gde su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ jedinični vektori, a $\alpha \in \mathbf{R}$.

   (a) Ako su $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$ ortogonalni odrediti α.

   (b) Za $\alpha = 1$ naći ugao između vektora $\mathbf{m}$ i $\mathbf{n}$.

7. Dati su nekolinearni vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Neka je $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ i $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Odrediti realan parametar α tako da vektori $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ budu kolinearni.

8. Data su tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(-3,\ -2,\ 0)$, $B(3,\ -3,\ 1)$ i $C(5,\ 0,\ 2)$. Odrediti koordinate četvrtog temena.

9. Ispitati da li su vektori $\mathbf{a} = [1,\ 2,\ 3]$, $\mathbf{b} = [1,\ 0,\ -1]$ i $\mathbf{c} = [0,\ 2,\ 4]$ koplanarni. Ako jesu, izraziti vektor $\mathbf{a}$ kao linearnu kombinaciju preostala dva vektora.

10. Dati su vektori $\mathbf{a} = [1,\ 1,\ 1]$, $\mathbf{b} = [0,\ 2,\ 0]$, $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ i $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Odrediti parametar α tako da vektori $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ budu normalni.

11. Odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\mathbf{a} = [2,\ 1,\ 2]$ i $\mathbf{b} = [3,\ 2,\ 2]$

12. Izračunati površinu trougla ABC ako je $A(2,\ -3,\ 4)$, $B(1,\ 2,\ -1)$ i $C(3,\ -2,\ 1)$.

13. Naći zapreminu paralepipeda konstruisanog nad vektorima $\mathbf{a} = [0,\ 1,\ 1]$, $\mathbf{b} = [1,\ 0,\ 1]$ i $\mathbf{c} = [1,\ 1,\ 0]$.

14. Izračunati visinu prizme čije su ivice određene vektorima $\mathbf{a} = [1,\ 0,\ -2]$, $\mathbf{b} = [0,\ 1,\ -2]$ i $\mathbf{c} = [-1,\ 3,\ 5]$ ako je osnova prizme paralelogram konstruisan nad vektorima $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

15. Proveriti da li su vektori $[1,\ 0,\ 0]$, $[1,\ 1,\ 0]$ i $[1,\ 1,\ 1]$ linearno nezavisni i, ako jesu, izraziti vektor $\mathbf{a} = [5,\ 1,\ 2]$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

16. Izračunati matrice AB i BA (ukoliko je množenje definisano za date formate matrica):

    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i & -1 \end{bmatrix}$;

    (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -i \\ i & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \\ i \end{bmatrix}$;

    (c) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

17. Izračunati $f(A)$ ako je $f(x) = x^2 - 5x + 3$ i $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.

18. Za date matrice utvrditi da li imaju inverzne i, ukoliko imaju, odrediti ih:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

19. Odrediti inverznu matricu za matricu $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

20. Rešiti matričnu jednačinu $AX - B = X$ gde je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 4 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

21. NPC (Non-playing Character) ima vektor položaja $\mathbf{p}$ i pravac $\mathbf{v}$.

    (a) Kako pomoću skalarnog proizvoda možemo odrediti da li je objekat $\mathbf{x}$ dat odgovarajućim vektorom položaja, ispred ili iza NPC?

    (b) Neka je $\mathbf{p} = [-3\ 4]$, $\mathbf{v} = [5\ -2]$ i $\mathbf{x} = [0\ 0]$. Proveriti da li se NPC nalazi ispred ili iza $\mathbf{x}$.

22. Posmatrajmo tri tačke a,b i c u xz ravni levog koordinatnog sistema, koje određuju putanju kojom se kreće NPC.

    (a) Kako možemo iskoristiti vektorski proizvod da odredimo smer kretanja NPC-a? Odnosno, gledano sa pozitivnog dela y-ose na xz-ravan, da li se NPC pri kretanju od takee a ka tački b, a zatim ka tački c, kreće u smeru kazaljke na satu ili u suprotnom smeru?

    (b) Za tačke
    $$\mathbf{a} = [2\ 0\ 3], \mathbf{b} = [-1\ 0\ 5], \mathbf{c} = [-4\ 0\ 1]$$
    odrediti smer kretanja NPC (u smeru kazaljke na satu ili u suprotnom smeru), ukoliko se kreće od a, ka b, a zatim ka c.

23. Izračunati rastojanje između sledećih tačaka definisano p-normom, za $p = 1$, $p = 2$ i $p = \infty$, i grafički interpretirati:

    (a) $\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ 30 \end{bmatrix}$;

    (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$.

24. Data su dva vektora, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

    Razložiti $\mathbf{v}$ na dve komponente tako da jedna bude paralelna a druga normalna na $\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ je jedinični vektor).

25. Dati su vektori $\mathbf{a} = [3\ 1\ 1], \mathbf{b} = [2\ -1\ 0], \mathbf{c} = [0\ 1\ 2]$. Pokazati da skup vektora, $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, predstavlja bazu prostora $\mathbb{R}^3$. Pomoću te baze predstaviti vektor $\mathbf{x} = [4\ 6\ 8]$.

26. Odrediti karakteristične korene, karakteristične vektore i inverznu matricu (ako ista postoji) za matricu
    $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$