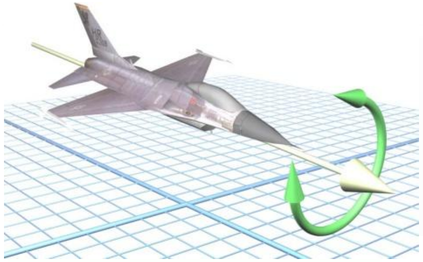

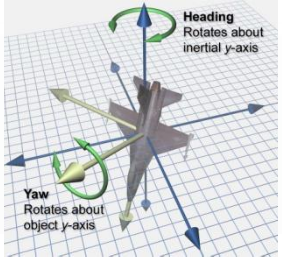

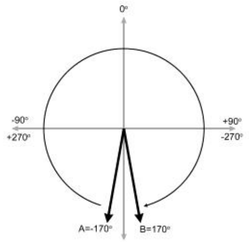

Predstavljanje rotacije u 3D

Poređenje osobina metoda za predstavljanje 3D rotacija

Poređenje metoda 1

Realizacija rotacije

- **Matrični zapis**: Moguća, veoma jednostavna.
- **Ojlerovi uglovi**: Nemoguća (zahteva konverziju u matrični zapis)
- **Vektor rotacije**: Nemoguća (zahteva konverziju u matrični zapis-eksponencijalno preslikavanje)
- **Kvaternioni**: Teorijski moguća. Praktično, manje zgodna za realizaciju rotacije računarom.

Poređenje metoda 2

Konkatenacija (nadovezivanje) uzastopnih rotacija

•**Matrični zapis**: Moguća, jednostavna.
•**Ojlerovi uglovi**: Nemoguća bez konverzije u drugi oblik.
•**Vektor rotacije**: Nemoguća bez konverzije u drugi oblik.
•**Kvaternioni**: Moguća. Efikasnija (manje operacija) nego matrično množenje.

Poređenje metoda 3

Inverzija rotacije (suprotna rotacija)

- **Matrični zapis**: Jednostavna i brza, korišćenjem transponovane matrice.
- **Ojlerovi uglovi**: Nije jednostavna.
- **Vektor rotacije**: Jednostavna i brza, korišćenjem suprotnih vektora (uglova).
- **Kvaternioni**: Jednostavna i brza, korišćenjem konjugovanog kvaterniona.

Poređenje metoda 4

Interpolacija

- **Matrični zapis**: Nezgodna.
- **Ojlerovi uglovi**: Moguća, nezgodna, “Gimbal lock” može predstavljati problem.
- **Vektor rotacije**: Moguća, sa eventualnim singularitetima, ali jednostavnija nego za Ojlerove uglove.
- **Kvaternioni**: Inetrpolacija pomoću funkcije slerp je pogodna i daje dobar rezultat.

Poređenje metoda 5

Jednostavnost interpretacije

- **Matrični zapis**: Komplikovan.
- **Ojlerovi uglovi**: Najjednostavniji (?).
- **Vektor rotacije:** Jednostavan.
- **Kvaternioni**: Veoma komplikovani.

Poređenje metoda 6

Kompaktnost (memorijski zahtevi)

- **Matrični zapis**: 9 brojeva
- **Ojlerovi uglovi**: 3 broja
- **Vektor rotacije**: 3 broja
- **Kvaternioni**: 4 broja

Poređenje metoda 7

Jedinstvenost reprezentacije date rotacije

- **Matrični zapis**: Da.
- **Ojlerovi uglovi**: Ne (“aliasing”).
- **Vektor rotacije**: Ne (“aliasing”); ipak, jednostavnije nego sa Ojlerovim uglovima.
- **Kvaternioni**: Tačno dve različite reprezentacije za svako ugaono pomeranje. Razlikuju se u predznaku.

Poređenje metoda 8

Postojanje “loših” reprezentacija

- **Matrični zapis**: Nisu sve matrice ortogonalne matrice, tj. matrice rotacije. Takođe, greške zaokrugljivanja mogu narušiti ortogonalnost.
- **Ojlerovi uglovi**: Svaka tri broja mogu se na jedinstven način interpretirati kao Ojlerovi uglovi.
- **Vektor rotacije:** Svaka tri broja mogu se na jedinstven način interpretirati kao parametri koji određuju orijentaciju ose i ugao rotacije.
- **Kvaternioni**: Greške zaokrugljivanja mogu narušiti uslov normiranosti (jediničnu normu) kvaterniona.

Kako odabrati odgovarajuću reprezentaciju 1

•Ojlerovi uglovi su intuitivna reprezentacija sa stanovišta korisnika. Kada je u toku rada očekivana interakcija čoveka (u određivanju i direktnom zadavanju/unosu uglova i osa rotacije objekta tokom među-koraka), ova reprezentacija je najpogodnija.

Kako odabrati odgovarajuću reprezentaciju 2

- Kada je potrebno raspolagati koordinatama objekata pri transformacijama, matrična reprezentacija je najpogodnija.
- S obzirom na neke navedene nedostatke matrične reprezentacije (pre svega zauzeće memorijskog prostora), treba imati u vidu mogućnost kombinovanja – unosa i memorisanja orijentacija u jednoj reprezentaciji, a manipulisanja orijentacijama u drugoj.

Kako odabrati odgovarajuću reprezentaciju 3

- Pouzdana interpolacija se realizuje isključivo u reprezentaciji pomoću kvaterniona.
- Uz malo pažnje, singulariteti se mogu izbeći u slučaju reprezentacije vektorom rotacije, a tada se mogu koristiti prednosti kao što je kompaktan zapis i dobra mogućnost interpolacije. Uz to, potreba za prikazivanjem rotacija za ugao veći od 360^o je najpogodnija u reprezentaciji pomoću vektora rotacije.

Konverzije između različitih reprezentacija

Algoritmi za konverziju

1. Ojlerovi uglovi u matricu rotacije.
2. Matrica rotacije u Ojlerove uglove.
3. Kvaternion u matricu rotacije.
4. Matrica rotacije u kvaternion.
5. Ojlerovi uglovi u kvaternion.
6. Kvaternion u Ojlerove uglove.

Konverzija Ojlerovih uglova u matricu rotacije

- Za date Ojlerove uglove i poznat izbor (i poredak) osa rotacija napisati odgovarajuće matrice rotacije (u ravni) oko koordinatne ose. Ovo su rotacije oko fiksnih osa uspravnog prostora, o čemu treba voditi računa.
- Pomnožiti matrice u odgovarajućem poretku. Rezultujuća matrica je matrica rotacije koja odgovara reprezentaciji preko datih Ojlerovih uglova.
- Jedan od prethodnih slajdova sadrži konkretnu realizaciju za redosled rotacija *x-y-z,* i Ojlerovu reprezentaciju (φ,ϑ,ψ). Ukratko:

$$M(\varphi,\vartheta,\psi) = M_z(\psi)\, M_y(\vartheta)\, M_x(\varphi)$$

Konverzija matrice rotacije u Ojlerove uglove 1

- Podrazumevamo da je definisan izbor i poredak osa rotacije za koji određujemo Ojlerove uglove.
- Pretpostavljamo da znamo i sve ostale konvencije koje idu uz reprezentacije pomoću Ojlerovih uglova.
- Pretpostavimo, takođe, da je polazna matrica matrica rotacije (element grupe SO(3)).
- Jednoznačnost reprezentacije obezbeđujemo uslovom da generisani Ojlerovi uglovi budu kanonički.

Konverzija matrice rotacije u Ojlerove uglove 2

$$ {}_0R^1 = R(\psi)R(\vartheta)R(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}. $$

Iz matrice rotacije očigledno dobijamo

$$\varphi = \arcsin(-m31),$$

a zatim možemo dobiti i preostala dva ugla, na osnovu vrednosti odgovarajućih elemenata matrice i inverznih trigonometrijskih funkcija.

Gornja trigonometrijska jednačina ima, u opštem slučaju, dva rešenja. Oba uzimamo u obzir i do kraja generišemo dve trojke Ojlerovih uglova. Slučaj “Gimbal lock” rešavamo na sličan način, koristeći odgovarajući (ranije naveden) oblik matrice.

Konverzija kvaterniona u matricu rotacije

Za kvaternion **q** = [w (x y z)] odgovarajuća matrica rotacije, koja se dobija izračunavanjem vrednosti $\mathbf{qvq}^{-1}$ (i realizuje istu rotaciju) je jednaka

$$\begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

Konverzija matrice rotacije u kvaternion

Polazeći od matrice rotacije u obliku

$$\begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2wz & 2xz+2wy \\ 2xy+2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx \\ 2xz-2wy & 2yz+2wx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

rešavanjem odgovarajućih jednačina dobijaju se vrednosti w,x,z,x kvaterniona [w (x y z)].

Konverzija Ojlerovih uglova u kvaternion

- Za svaki od tri Ojlerova ugla napisati odgovarajući kvaternion.
- Voditi računa o konvencijama (redosled osa, fiksni ili Ojlerovi uglovi, itd...)
- Pomnožiti dobijene kvaternione u odgovarajućem poretku.

Konverzija kvaterniona u Ojlerove uglove

Kombinujući do sada rečeno:

- konvertujemo kvaternion u matricu
- Konvertujemo matricu u Ojlerove uglove