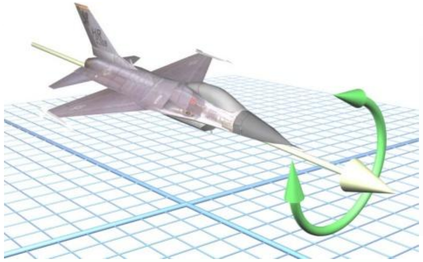
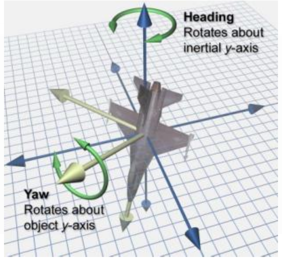
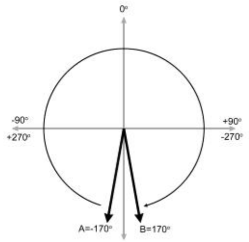






Predstavljanje rotacije u 3D Kvaternioni.

Kvaternioni

Kvaternioni

Kvaternione je formulisao irski matematičar Hamilton (Sir William Rowan Hamilton) 1843. godine.

Kada su izmišljeni kvaternioni

- Hamilton je 16. oktobra 1843. godine hodao uz Kraljevski kanal, nakon što je izašao iz Dunsink opservatorije u Dablinu (gde je živeo i radio kao upravnik).
- Išao je u pravcu Irske kraljevske akademije koja se nalazi u ulici Dawson br. 19, u centru Dablina.

Kvaternioni

Na putu, baš kad je prelazio preko mosta Broom, došao je do fundamentalnog svojstva **kvaterniona**:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Bio je toliko uzbuđen zbog svog otkrića da je ovu formulu nožićem urezao u zid mosta. Taj trag danas nije sačuvan, ali je na istom mestu 1958. postavljena spomen-ploča.

Spomen ploča koja svedoči o Hamiltonovom otkriću kvaterniona

Kvaternioni – prva verzija: zapis kao uopštenje kompleksnih brojeva

Kvaternioni se mogu predstaviti kao kompleksni brojevi sa tri imaginarna dela: *i, j, k*.

$q = w + xi + yj + zk$, w,x,z,y realni brojevi.

Za imaginarne delove važi sledeće:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k,\ jk = i,\ ki = j$$

$$ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$$

Ovo je zapis koji je Hamilton urezao na mostu.

Kvaternioni – druga verzija: Zapis u obliku Vektor-Skalar

Umesto zapisa koji koristi tri imaginarna dela,

$$w + xi + yj + zk$$

Možemo koristiti zapis koji koristi jedan skalar i jedan vektor:

$$\mathbf{q} = [\ w\ \mathbf{v}\ ],$$

gde je w skalar, a $\mathbf{v}$ je vektor. Isto možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{q} = [\ w\ (\ x\ y\ z\ )\ ]$$

(sa istim značenjem w, x, y, z kao malopre).

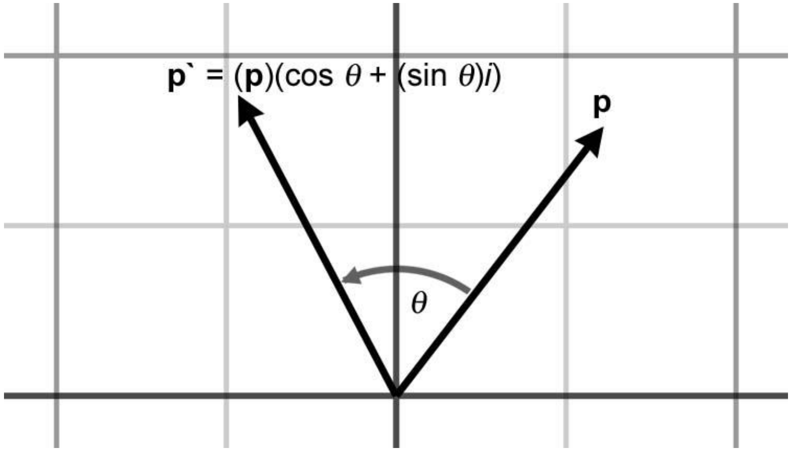
Kvaternioni – treća verzija: 4D prostor

- Hamilton je kvaternione shvatao kao četvorodimenzionalne vektore [*w*, *x*, *y*, *z*].
- Definisao je operacije nad ovako apstraktnim elementima tako da budu zadovoljene neke osobine koje je želeo.
- Tako definisane operacije mogu se izraziti korišćenjem poznatih operacija u skupu vektora i skalara.

O čemu je Hamiltom razmišljao?

- Hamilton je želeo da uopšti kompleksne brojeve iz 2D u 3D.
- Imao je na umu geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva (pre svega mogućnost reprezentovanja rotacije) u 2D.
- Kompleksan broj predstavlja tačku u ravni (izomorfizam C i R^2), i rotaciju za određeni ugao (izomorfizam SO(2) i S^1).

Množenje kompleksnim brojem



Rotacija (reprezentovana kompleksnim brojem) se može primeniti na tačku (reprezentovanu kompleksnim brojem) korišćenjem množenja kompleksnih brojeva:

$$(x + yi)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Dakle, šta je Hamilton želeo?

- Hamilton je želeo da prethodno uopšti do reprezentacije 3D rotacija.
- Očekivao je da su mu potrebna dva imaginarna dela, *i* i *j*. Ovo je logično uopštenje: u 2D postoji jedan imaginarni deo, a u 3D očekujemo da su potrebna dva imaginarna dela.
- Godinama je pokušavao da definiše odgovarajuću strukturu, polazeći od konstrukcije sa dva imaginarna dela.
- U trenutku čuvenog prelaska mosta, željeno rešenje se pojavilo u prihvatanju činjenice da su za odgovarajuće uopštenje potrebna 3 imaginarna dela, umesto dva.
- Kasnije je i formalno dokazano da skup trodimenzionalnih kompleksnih brojeva nije zatvoren u odnosu na operaciju množenja, odnosno da prvobitna Hamiltonova ideja (sa dva imaginarna dela) ne može biti realizovana.

U pozadini Hamiltonovog razmišljanja

- Ojler je 1775. godine dokazao da je skup svih rotacija oko neke ose zatvoren u odnosu na kompoziciju. Ovo je tvrđenje poznate **Ojlerove teoreme**.
- Dakle, proizvod svake dve (ili više) rotacije oko datih osa može realizovati kao jedna rotacija oko odgovarajuće ose.
- Činjenica da za kompoziciju rotacija u 3D ne važi komutativnost ima za posledicu da skup svih rotacija (SO(3) grupa o kojoj smo već govorili) ima prilično složenu strukturu koju nije lako reprezentovati.
- U potrazi za dobrom reprezentacijom rotacija, pojavljuje se rešenje u vidu Hamiltonovih kvaterniona.

Skalari i vektori kao kvaternioni

- Uočimo da se tačka (*x y z*) u 3D može pogodno prikazati kvaternionom oblika

$$\mathbf{p} = [\ 0\ (\ x\ y\ z\ )\ ].$$

- Ekvivalentno, u formi kompleksnih brojeva, zapis je:

$$xi + yj + zk.$$

Dakle, skup kvaterniona oblika $\left\{ [0\ v] \middle| v \in R^3 \right\}$ reprezentuje elemente iz $\mathbf{R}^3$, a skup kvaterniona oblika $\left\{ [s\ 0] \middle| s \in R \right\}$ predstavlja elemente skupa **R**.

Sabiranje kvaterniona

Za kvaternione $\mathbf{q_0} = [w_0\ (x_0\ y_0\ z_0)] = [w_0\ \mathbf{v_0}]$ i $\mathbf{q_1} = [w_1\ (x_1\ y_1\ z_1)] = [w_1\ \mathbf{v_1}]$ definišemo zbir kao

$$\mathbf{q_0} + \mathbf{q_1} = [w_0\ (x_0\ y_0\ z_0)] + [w_1\ (x_1\ y_1\ z_1)] =$$
$$w_0 + w1 + (x_0+x_1)i + (y_0+y_1)j + (z_0+z_1)k$$

Množenje kvaterniona

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 &= \begin{bmatrix} w_1 & \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 & \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 \\ \begin{pmatrix} w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ w_1 y_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ w_1 z_2 + z_1 w_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1 & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1 w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & w_1 \mathbf{v}_2 + w_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Osobine množenja kvaterniona

- Množenje kvaterniona je asocijativno, ali ne i komutativno.

$$\mathbf{q}(\mathbf{rs}) = (\mathbf{qr})\mathbf{s}, \qquad \mathbf{qr} \neq \mathbf{rq}$$

- Jedinični element je $[1\ \mathbf{0}] = [1\ (\ 0\ 0\ 0\ )]$

Množenje kvaterniona skalarom

Za dati skalar k i kvaternion $\mathbf{q} = [w\ \mathbf{v}]$, definišemo proizvod kao

$$k\mathbf{q} = k[w\ \mathbf{v}] = [kw\ k\mathbf{v}].$$

Suprotan kvaternion (negacija kvaterniona)

Za kvaternion $\mathbf{q} = [w\ (x\ y\ z)] = [w\ \mathbf{v}]$ definišemo suprotan kvaternion kao

$$-\mathbf{q} = -[w\ (x\ y\ z)] = [-w\ (-x\ -y\ -z)]$$
$$= -[w\ \mathbf{v}] = [-w\ \ -\mathbf{v}].$$

Konjugovani kvaternion

Konjugovani kvaternion datog kvaterniona dobija se promenom predznaka vektorskog dela:

$$\mathbf{q}^* = [\ w\ \mathbf{v}\ ]^* = [w\ \ -\mathbf{v}\ ]$$

$$\mathbf{q}^* = w - xi - yj - zk$$

Važe osobine da je

$$(\mathbf{q}^*)^* = \mathbf{q}$$

$$(\mathbf{pq})^* = \mathbf{q}^*\ \mathbf{p}^*$$

$$(\mathbf{q}+\mathbf{q}^*)/2 = w$$

Moduo (intenzitet) kvaterniona

Moduo kvaterniona izračunava se po formuli

$$\|\mathbf{q}\| = \left\| \begin{bmatrix} w & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$
$$= \left\| \begin{bmatrix} w & \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{w^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$$

$$\|q\| = \sqrt{q \cdot q^*}$$

Važi da je

$$\|q\| = \|q^*\|$$

$$\|q \cdot p\| = \|q\| \cdot \|p\|$$

$$\|q\| = \|q \cdot q^*\| = \|q^* \cdot q\|$$

Inverzni kvaternion

Inverzni kvaternion datog kvaterniona jednak je njegovom konjugovanom kvaternionu, podeljenom njegovim intenzitetom:

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*/\|\mathbf{q}\|$$

Tada važi da je

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}^{-1}=\mathbf{q}^{-1}\cdot\mathbf{q} =1$$
$$(\mathbf{q}^{-1})^{-1} = \mathbf{q}$$
$$(\mathbf{pq})^{-1}=\mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}^{-1}$$

Skalarni proizvod kvaterniona

- Skalarni proizvod kvaterniona vrlo je sličan kao skalarni proizvod vektora:

$$\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_2 = [\ w_1\ \mathbf{v}_1\ ] \bullet [\ w_2\ \mathbf{v}_2\ ] = w_1\, w_2 + \mathbf{v}_1 \bullet \mathbf{v}_2$$

- Za $\mathbf{v}_1 = [\ x_1\ y_1\ z_1\ ]$ i $\mathbf{v}_2 = [\ x_2\ y_2\ z_2\ ]$ je

$$\mathbf{q}_1 \bullet \mathbf{q}_2 = w_1\, w_2 + x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

- Važi da je $\|q\| = \sqrt{q \bullet q}$

Jedinični kvaternion

- Jedinični kvaternion je onaj kvaternion za koji važi $\|q\| = 1$
- Ako je kvaternion **q** jedinični, onda je i $\|q^{-1}\| = 1$
- Ako je kvaternion jedinični, onda je $\|q^{*}\| = 1$
- Ako su **p** i **q** takvi da je $\|p\| = 1$ $\|q\| = 1$ onda je i $\|p \cdot q\| = 1$
- Ako je q jedinični, onda je $q^{-1} = q^{*}$

Inverzni kvaternion jediničnog kvaterniona je njegov konjugovani

Neka je [w $\mathbf{v}$] jedinični kvaternion. Tada,

$$
\begin{aligned}
[\, w \;\; \mathbf{v} \,]\,[\, w \;\; \mathbf{v} \,]^{-1}
&= [\, w \;\; \mathbf{v} \,]\,[\, w \;\; -\mathbf{v} \,] \\
&= [\, w^2 - \mathbf{v}\cdot(-\mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \times (-\mathbf{v}) + w\mathbf{v} - w\mathbf{v} \,] \\
&= [\, w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad \mathbf{0} \,] \\
&= [\, 1 \;\; \mathbf{0} \,] \quad \text{(jer je kvaternion jedinični)}
\end{aligned}
$$

Jedinični kvaternion

- Jedinični kvaternion se može prikazati u obliku

$$\mathbf{q} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$$

gde je **u** jedinični vektor iz $\mathbf{R}^3$.

- Važi da je proizvod $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$

ako se ovaj proizvod posmatra kao proizvod kvaterniona.

Eksponencijalna funkcija kvaterniona

- Neka je **p** = [0, θ**u**], gde je **u** jedinični vektor.
- Vrednost eksponencijalne funkcija za kvaternion **p**, koju označavamo sa *exp* **p**, definisana je kao

exp **p**=[cos θ **u** sin θ].

- Uočavamo da je *exp* **p** uvek jedinični kvaternion.
- Ako prethodno zapišemo u obliku

$$e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta$$

uočavamo analogiju sa Ojlerovom formulom za kompleksne brojeve.

Stepen jediničnog kvaterniona

- Za jedinični kvaternion **q** i skalar *t* definišemo stepen kvaterniona

$$q^t = (\cos\theta + u\sin\theta)^t = e^{ut\theta} = \cos(t\theta) + u\sin(t\theta)$$

- Dok se *t* menja od 0 do 1, kvaternion q^t se menja od [1, **0**] do **q**.
- Ovaj zapis stepena jediničnog kvaterniona i navedeno zapažanje korisni su pri definisanju interpolacije između kvaterniona.

Rotacije kao kvaternioni

Najvažniji rezultat u vezi sa kvaternionima je da se oni mogu koristiti za predstavljanje rotacija u 3D:

Rotacija za ugao θ oko ose određene jediničnim pravcem n je predstavljena kvaternionom:

$$\mathbf{q} = [\ \cos \theta/2 \quad \sin \theta/2\ \mathbf{n}\ ]$$

$$= [\ \cos \theta/2 \quad \sin \theta/2\ (\mathbf{n}x\ \mathbf{n}y\ \mathbf{n}z)]$$

Dakle, skalarni deo kvaterniona u određenom smislu reprezentuje ugao rotacije, a vektorski deo u određenom smislu reprezentuje osu rotacije.

Moduo (intenzitet) kvaterniona rotacije

Moduo kvaterniona kojim se reprezentuje rotacija u 3D je 1.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{q}\| = \left\| \begin{bmatrix} w & \mathbf{v} \end{bmatrix} \right\| &= \sqrt{w^2 + \|\mathbf{v}\|^2} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta/2) + (\sin(\theta/2)\|\hat{\mathbf{n}}\|)^2} && \text{(Substituting using } \theta \text{ and } \hat{\mathbf{n}}\text{)} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)\|\hat{\mathbf{n}}\|^2} \\
&= \sqrt{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)\ 1} && (\hat{\mathbf{n}} \text{ is a unit vector.}) \\
&= \sqrt{1} && (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Primena rotacije na tačku

- Da bismo primenili kvaternion rotacije **q** na tačku (vektor) *p* u 3D, koristimo množenje kvaterniona (i interpretiramo *p* u ovom slučaju kao kvaternion [0 *p*]):

$$\mathbf{R(p) = q}\boldsymbol{p}\mathbf{q^{-1} = q}\boldsymbol{p}\mathbf{q^*}$$

- Da bismo dokazali ovaj rezultat, treba da pokažemo da važi:
  1. R(p) je vektor (tj. Skalarni deo ovog kvaterniona je jednak 0)
  2. Dužina vektora ostaje očuvana, $\|R(p)\| = \|p\|$
  3. Rotacija je linearna transformacija koja nije refleksija,
  4. Ugao rotacije $\angle\left(p, R(p)\right) = \theta/2$
  5. Osa rotacije je **n**, tj. R**(n) = n.**

Suprotan kvaternion i ugaono pomeranje

- Svako ugaono pomeranje u 3D ima tačno dve različite reprezentacije pomoću kvaterniona, koje se dobijaju uzajamnom negacijom.
- Dakle, jedinični kvaternioni **q** i **–q** predstavljaju istu rotaciju.

- Nije teško uočiti zašto. Dodavanjem 360° na ugao θ, nećemo promeniti ugaono pomeranje prikazano kvaternionom **q**, ali ćemo promeniti predznak svih komponenti kvaterniona **q**.

Primena višestrukih rotacija (konkatenacija)

•Kada na vektor **p** primenimo višestruke uzastopne rotacije, tako što prvo primenimo rotaciju prikazanom kvaternionom **a**, a zatim rezultat te rotacije dalje rotiramo primenom kvaterniona **b**, dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{p}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{p}\mathbf{a}^{-1})\mathbf{b}^{-1} \\ &= (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{p}(\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}^{-1}) \\ &= (\mathbf{b}\mathbf{a})\mathbf{p}(\mathbf{b}\mathbf{a})^{-1}. \end{aligned}$$

Konkatenacija rotacija

- Uočimo da je rotacija kvaternionom **a,** praćena rotacijom kvaternionom **b**, ekvivalentna jednoj rotaciji prikazanoj proizvodom kvaterniona, **ba**.

- Zaključujemo da se konkatenacija uzastopnih rotacija prikazanih kvaternionima može lako realizovati množenjem kvaterniona (baš kao što se to realizuje i matričnim množenjem).

“Razlika” kvaterniona

- Pretpostavimo da su **a** i **b** kvaternioni koji predstavljaju dve orijentacije.
- Kvaternion **d** koji orijentaciju **a** (rotacijom) dovodi do orijentacije **b** zove se **razlika između kvaterniona** **a** i **b**.
- Dakle, **da** = **b**. Čemu je jednak kvaternion **d**?
- $\mathbf{d} = \mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}$
- $\mathbf{d}\mathbf{a} = (\mathbf{b}\mathbf{a}^{-1})\mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1}) = \mathbf{b}[\,1\ \mathbf{0}\,] = \mathbf{b}$

- Rotacija prikazana množenjem kvaterniona uvek predstavlja rotaciju najkraćim putem između dve orijentacije.

Interpolacija kvaterniona

- Osnovni razlog postojanja (motiv korišćenja) kvaterniona za prikazivanje orijentacija u računarskoj animaciji i grafici je njihova zgodna primena kod operacije poznate kao ***SLERP*** - **S**pherical **L**inear int**ERP**olation.

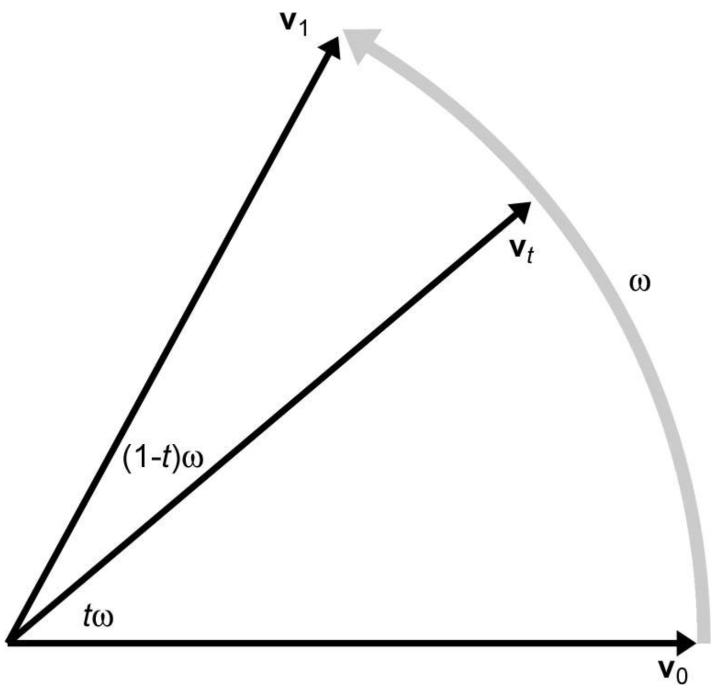
- SLERP je ternarna operacija, što znači da ima tri ulazne veličine (operanda): dve orijentacije i skalarnu veličinu t, 0≤t≤1. Ispostavlja se da su orijentacije prikazane kvaternionima veoma pogodan "ulaz" funkcije *slerp*.

SLERP funkcija

- Polazimo od dve orijentacije između kojih želimo da interpoliramo - one su zadate kao dva kvaterniona $\mathbf{q}_0$ i $\mathbf{q}_1$.
- Treći operand (ulazni podatak) je parametar interpolacije, realan broj t takav da je $0 \le t \le 1$.
- Dok t uzima vrednosti od 0 do 1, SLERP funkcija $slerp(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t)$ generiše interpolirane orijentacije između $\mathbf{q}_0$ i $\mathbf{q}_1$ s obzirom na parametar t.

Grafički prikaz interpolacije u 2D

Dati su jedinični vektori $\mathbf{v}_0$ i $\mathbf{v}_1$. Treba odrediti vektor $\mathbf{v}_t$, koji je rezultat glatke interpolacije duž kružnog luka, za t ugaonog rastojanja između $\mathbf{v}_0$ i $\mathbf{v}_1$, za neku realnu vrednost t, $0 \leq t \leq 1$.



SLERP funkcija

- Jedna formula koja nam je već poznata je

$$slerp(q_0, q_1; t) = q_0 (q_1 q_0^{-1})^t$$

- Druga, koju smo takođe izveli (nezavisno od dimenzije posmatranih vektora) je

$$\mathrm{slerp}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \frac{\sin(1-t)\omega}{\sin\omega}\mathbf{q}_0 + \frac{\sin t\omega}{\sin\omega}\mathbf{q}_1$$

Izračunavanje ugla ω

- U formuli za interpolaciju rotacije SLERP potrebna nam je vrednost ugla ω, ugla između dve orijentacije, odnosno odgovarajućih kvaterniona.
- Ispostavlja se da je, po analogiji sa 2D slučajem, i u slučaju kvaterniona zadovoljeno da je

$$q_1 \bullet q_2 = \|q_1\| \|q_2\| \cos \angle (q_1, q_2)$$

Problem 1

- U prethodno opisanom pristupu treba obratiti pažnju na dva detalja.
- Prvo, kvaternioni **q** i –**q** reprezentuju istu orijentaciju, ali mogu dovesti do različitih rezultata interpolacije funkcijom slerp.
- Rešenje ovog problema dobijamo ako odaberemo predznake kvaterniona $\mathbf{q}_0$ i $\mathbf{q}_1$ tako da njihov skalarni proizvod $\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1$ bude nenegativan.
- Ovo geometrijski odgovara izboru rotacije po najkraćem luku, od orijentacije (kvaterniona) $\mathbf{q}_0$ do orijentacije $\mathbf{q}_1$.

Problem 2

- Druga vrsta problema može nastupiti u slučaju kada su kvaternioni $\mathbf{q_0}$ i $\mathbf{q_1}$ vrlo bliski, odnosno kada je ugao ω jako mali, a vrednost sin ω bliska nuli. Posledica je numerička nestabilnost zbog deljenja u izrazu

$$\mathrm{slerp}(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, t) = \frac{\sin(1-t)\omega}{\sin\omega}\mathbf{q}_0 + \frac{\sin t\omega}{\sin\omega}\mathbf{q}_1$$

- Ovaj problem se može izbeći tako što se, kada je vrednost sin ω jako mala, koristi linearna interpolacija umesto funkcije slerp.

Prednosti korišćenja kvaterniona

•**Glatka interpolacija**. Reprezentacija 3D rotacija pomoću kvaterniona je jedina reprezentacija koja omogućava realizovanje glatke interpolacije.

Prednosti korišćenja kvaterniona

•**Jednostavno i brzo realizovanje konkatenacija rotacija i inverznih (suprotnih) rotacija.**

Niz uzastopnih rotacija prikazanih kvaternionima se lako realizuje jednom rotacijom korišćenjem vektorskog proizvoda kvaterniona. Ista operacija, realizovana pomoću matrica, zahteva više skalarnih operacija (množenja i sabiranja). Ipak, brzina izvršavanja zavisi od korišćene arhitekture. Korišćenjem konjugovanog kvaterniona lako se reprezentuje ugaono pomeranje suprotno datom.

Prednosti korišćenja kvaterniona

- **Brza konverzija u matričnu reprezentaciju i obrnuto.**

Kvaternioni se mogu brže konvertovati u matričnu reprezentaciju nego Ojlerovi uglovi.

- **Reprezentacija pomoću kvaterniona je kompaktna.**

Kvaternioni su predstavljeni pomoću 4 skalara (kojima prikazujemo 3 stepena slobode 3D rotacije), što je efikasnije od reprezentacije pomoću matrice koja koristi 9 vrednosti. Sa druge strane, kvaternioni koriste 33% više parametara nego Ojlerovi uglovi (koji su optimalni, sa tri parametra).

Nedostaci reprezentacije rotacije pomoću kvaterniona

Navedene prednosti dolaze po cenu nekoliko nedostataka. Iste nedostatke imaju i matrice, ali u manjoj meri.

- **Kvaternioni su manje kompaktni nego Ojlerovi uglovi**. Mada razlika u jednom parametru ne izgleda tako velika, to je ipak 33% više zauzeća memorijskog prostora i može predstavljati veliku razliku kada se radi sa velikim brojem ugaonih pomeranja.

Nedostaci reprezentacije rotacije pomoću kvaterniona

- **Nisu svi kvaternioni "dobri"**.

Rotaciju predstavljamo jediničnim kvaternionima. Usled nagomilavanja numeričkih grešaka, pri većem broju uzastopnih rotacija, može doći do toga da se naruši zatvorenost skupa, i da rezultujući kvaternion nije jedinični. Provera i naknadno normalizovanje rešavaju problem.

- **Ova reprezentacija nije sasvim intuitivna za rad**.

Tačnije, među razmatranim reprezentacijama, kvaternioni spadaju među najmanje pogodne i intuitivne za direktno korišćenje i razumevanje.