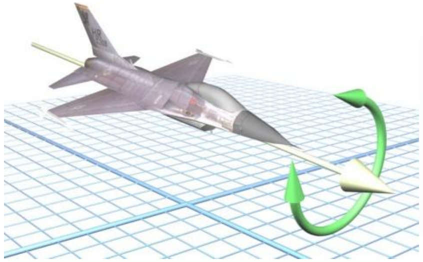
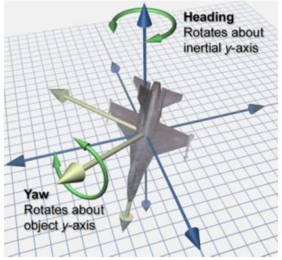
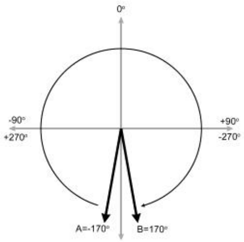






Rotacija i orijentacija u 3D
Ojlerovi uglovi. Vektor rotacije.

Ojlerovi uglovi

Ojlerovi uglovi

- Ojlerovi uglovi su, uz matrice rotacije, drugi važan način za predstavljanje orijentacija u 3D.
- Ime su dobili po Leonardu Ojleru (Euler, 1707 –1783) koji ih je definisao.

Ojlerovi uglovi

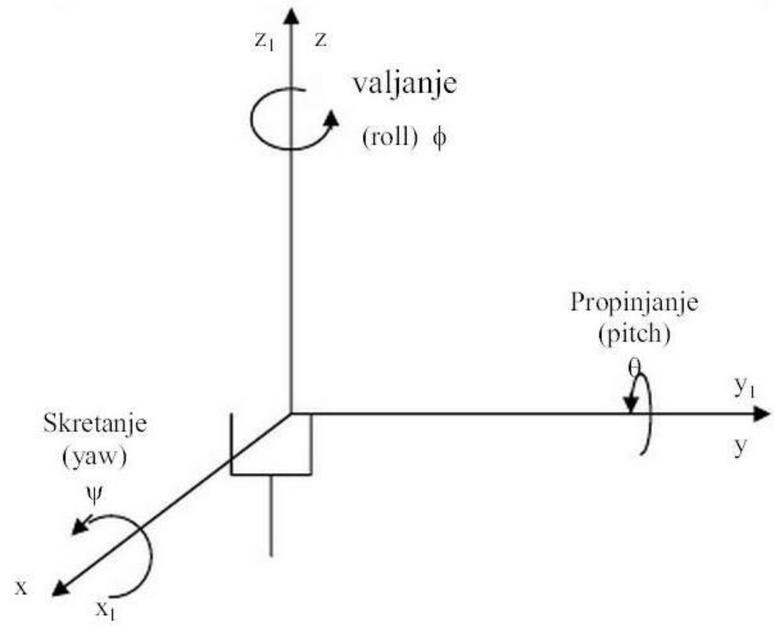
- I dalje, cilj je opisati orijentaciju kao rotaciju (ugaono pomeranje) koje uspravni prostor dovodi u položaj prostora objekta (ili obrnuto).
- Svaka ovakva rotacija može se posmatrati kao kompozicija (najviše) tri rotacije, od kojih se svaka realizuje u odnosu na jednu od (ortogonalnih) koordinatnih osa prostora objekta.
- Za neki definisan izbor (i poredak) osa rotacije, reprezentacija rotacije (orijentacije) može biti zadata u obliku **uređene trojke Ojlerovih uglova.**

Ojlerovi uglovi - terminologija

Rotacija oko *x*-ose- ugao ψ (ugao skretanja- **YAW, Heading**)

Rotacija oko *y*-ose- ugao θ (ugao propinjanja- **PITCH, Attitude**)

Rotacija oko *z*-ose- ugao ϕ (ugao valjanja- **ROLL, Bank**)



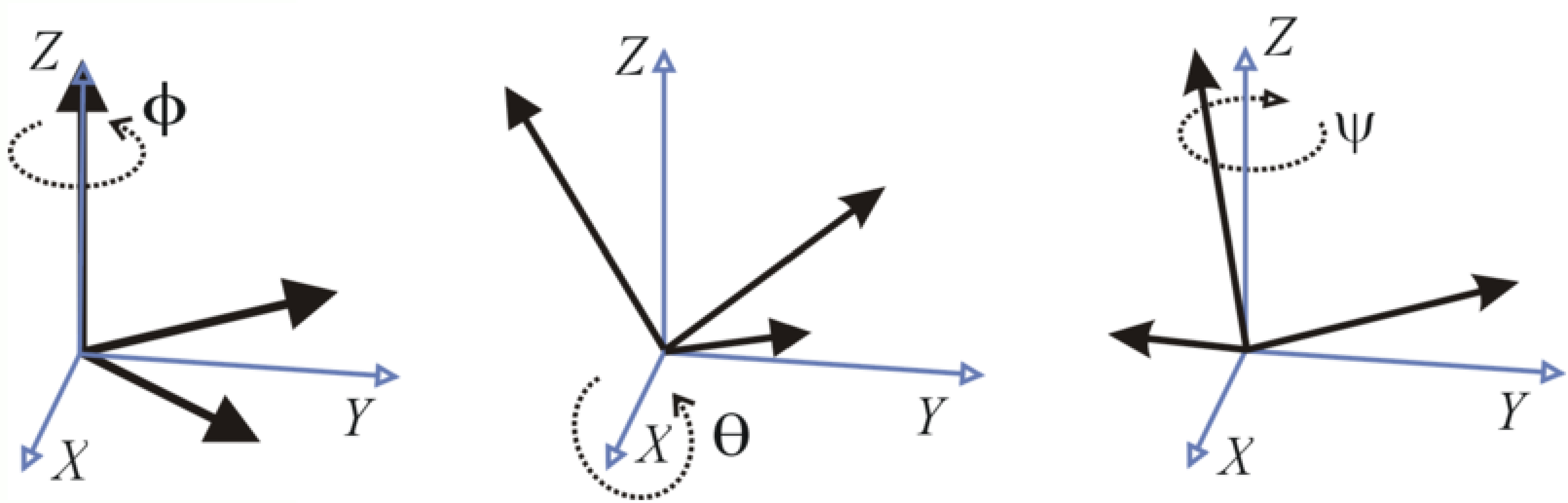
Zavisnost od redosleda osa rotacije

- **Redosled i izbor osa rotacije u velikoj meri utiču na rezultat kompozicije.**
- Postoji 27 načina da se odabere uređena trojka od data tri elementa (recimo, tri koordinatne ose), a od toga 12 ispunjava uslov da su svake dve uzastopne rotacije različite.
- Tih 12 uređenih trojki mogu predstavljati odabir koordinatnih osa i način da se dekomponuje i definiše svaka prostorna (3D) rotacija.
- To su: (1,2,1), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), (2,1,2), (2,1,3), (2,3,1), (2,3,2), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,1), (3,2,3).

Zavisnost od redosleda osa rotacije

•Nekoliko izbora su češće u upotrebi nego ostali. To su ***z-x-z (3-1-3) i x-y-z (1-2-3)*** rotacije.

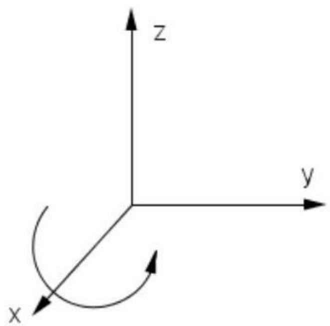
Ilustracija korišćenja *z-x-z* redosleda (tipičnog Ojlerovog redosleda):



Ojlerove rotacije

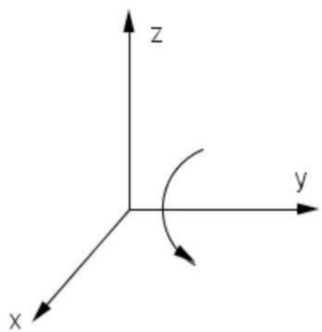
Rotacija oko x-ose

$$\mathbf{A}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



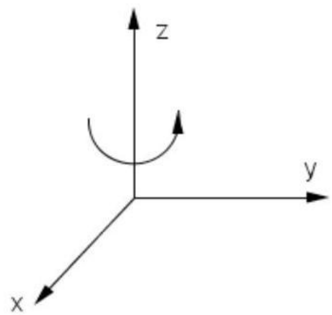
Rotacija oko y-ose

$$\mathbf{A}_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Rotacija oko z-ose

$$\mathbf{A}_Z = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$ {}_0R^1 = R(\psi)R(\vartheta)R(\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\vartheta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\vartheta & \sin\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & \cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Opšta matrica rotacije *x-y-z*

Nedostaci Ojlerovih uglova

- "Aliasing" (višeznačnost)
- "Gimbal (or gymbal) lock"
  - Gimbal - žiroskop
- Problemi sa interpolacijom

- Uz sve navedeno, problem može predstavljati i obilje različitih konvencija i varijacija. Izbor Ojlerovih ili statičkih uglova, izbor Ojlerovih ili "Tait-Bryanovih" uglova, izbor koordinatnih osa rotacija, izbor smera koordinatnog sistema... Svaki od ovih izbora donosi razlike u zapisu i realizaciji, što zahteva veliku pažnju pri preuzimanju tuđeg koda.

Aliasing - višeznačnost

- Postoji više različitih načina da se Ojlerovim uglovima predstavi jedna ista orijentacija.
- Ovakav problem višeznačnosti smo već pominjali. Naziva se *aliasing*.

- **Kanonički Ojlerovi uglovi**: definisanjem odgovarajućih intervala u kojima se svaki od tri ugla nalazi obezbeđuje se jednoznačnost.

"Gimbal Lock"

- http://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno

Singularitet:
za pojedine vrednosti drugog ugla u nizu rotacija reprezentacija pomoću kompozicije rotacija gubi stepen slobode. Prva i treća rotacija se svode na rotaciju oko iste ose.

Primer: Za Ojlerov niz (*x*-*y*-*z*) parametrizacija ima singularitet za θ = π/2 + kπ . Tada je *cos* θ = 0, a matrica rotacije ima oblik

$$\begin{bmatrix} 0 & \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \\ 0 & \cos(\varphi-\psi) & \sin(\varphi-\psi) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, rotacija zavisi samo od razlike prvog i trećeg Ojlerovog ugla a promena ovih uglova daje rotaciju oko iste ose.

Interpolacija

Linearna interpolacija kojom generišemo orijentacije između dve zadate Ojlerovim uglovima nije jednostavna, ni direktno izvodljiva.

Linearna interpolacija ima za cilj da generiše orijentacije po formuli

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_0$$

$$\theta_t = \theta_0 + t\,\Delta\theta$$

ali to nije moguće realizovati putem tri nezavisne linearne interpolacije komponenata – Ojlerovih uglova – kojima je orijentacija prikazana.

Interpolacija

Primer:

Uređenim trojkama Ojlerovih uglova date su orijentacije (0,90,0) i (90,45,90).

Želimo da odredimo orijentaciju koja se dostiže nakon polovine vremena potrebnog da se iz prve pređe u drugu.

Direktna linearna interpolacija po komponentama daje orijentaciju (45,67.5,45), što ne odgovara očekivanom.

Očekivana (željena) orijentacija je (90,22.5,90).

Neophodno je interpolirati "krivolinijski" u R^3, i na odgovarajući način definisati promenu svakog od tri Ojlerova ugla.

Konkatenacija

Nadovezivanje rotacija nije sasvim trivijalno u reprezentaciji pomoću Ojlerovih uglova.
Svaku od tri komponente - ugla - možemo nadovezivati sabiranjem.

Nadovezivanje rotacije prikazane uređenom trojkom zahteva prelazak na (recimo) matričnu reprezentaciju, gde se za konkatenaciju može primeniti množenje matrica. Ovo je, međutim, računski skup postupak.

Ojlerovi uglovi – zaključak 1

- Ojlerovi uglovi su reprezentacija orijentacije u 3D prostoru u formi uređene trojke brojeva.
- Ovi brojevi određuju uglove uređenog niza rotacija u odnosu na tri ortogonalne (koordinatne) ose prostora.
- U literaturi postoji mnogo različitih konvencija u vezi sa Ojlerovim uglovima. Postoje mnogobrojni različiti izbori posmatranih koordinatnih sistema, različiti izbori redosleda osa rotacije, i konačno, različiti izbori imena.
- Ojlerovi uglovi su intuitivniji pri predstavljanju orijentacije od mnogih drugih metoda.

Ojlerovi uglovi – zaključak 2

- Reprezentovanje orijentacije (rotacije) pomoću Ojlerovih uglova je veoma efikasno u pogledu korišćenja memorijskog prostora – koristi minimalan broj (3) parametara.
- Svaka uređena trojka uglova predstavlja validnu reprezentaciju orijentacije Ojlerovim uglovima. Nema “loših” trojki Ojlerovih uglova.
- Svaka orijentacija u 3D može se predstaviti trojkom Ojlerovih uglova. Reprezentacija je jedinstvena ukoliko su Ojlerovi uglovi u kanoničkoj formi.

Ojlerovi uglovi – zaključak 3

- Singularitet poznat kao “Gimbal lock” se pojavljuje kada se u reprezentaciji (pri određenom izboru parametara) izgubi jedan stepen slobode, i dve uzastopne rotacije se obavljaju oko iste ose.
- Ova pojava uzrokuje da mala promena orijentacije može biti prikazana veoma različitim trojkama Ojlerovih uglova.
- Interpolacija orijentacija parametrizovanih Ojlerovim uglovima može biti neintuitivna i računarski zahtevna.
- Konkatenacija rotacija parametrizovanih Ojlerovim uglovima se realizuje prelaskom na matričnu (ili neku drugu) reprezentaciju.

Osa i ugao rotacije. Eksponencijalno preslikavanje

Ojlerova teorema o rotaciji

- **Ojlerova teorema o rotaciji:** Svaka transformacija objekta u 3D takva da postoji tačka objekta koja pri toj transformaciji ne menja položaj, može se realizovati jednom rotacijom oko pogodno odabrane ose.

"Pri svakoj rotaciji sfere oko centra postoji dijametar sfere koji ne menja položaj."

Ojlerova teorema o rotaciji

- Isto smo formulisali tvrđenjem da svaka matrica iz SO(3) ima ne-nula karakteristični vektor. Ovaj vektor očuvava pravac pri rotacijama (linearnim transformacijama čije su matrice iz SO(3)). Ovaj pravac, dakle, predstavlja pravac ose rotacije.

- **Za svaki par orijentacija R_1 i R_2 postoji osa n takva da se preslikavanje orijentacije R_1 u orijentaciju R_2 realizuje kao rotacija oko ose n.**

Reprezentacija rotacije pomoću ose i ugla rotacije

- Reprezentacija rotacije moguća je, na osnovu Ojlerove teoreme, korišćenjem jediničnog vektora pravca odabrane ose rotacije, $\boldsymbol{\omega}$, i odabranog ugla rotacije, θ.
- Ovakva parametrizacija poznata je kao reprezentacija u formi “osa-ugao” (axis-angle).
- Dakle, $Rot = Rot(\boldsymbol{\omega}, \vartheta)$.

Reprezentacija osa-ugao

- Vektor ose rotacije **ω** je jedinični.
- Vektor **e** = θ**ω** tada predstavlja kompaktniju reprezentaciju orijentacije. Pravac vektora **e** određuje osu rotacije, a njegov intenzitet određuje ugao rotacije, $\theta = \|e\|$.

- Ova reprezentacija se naziva **vektor rotacije**.
- Ima nekoliko dobrih osobina.

Eksponencijalno preslikavanje

Eksponencijalno preslikavanje generiše matricu rotacije na osnovu poznatog ugla i ose rotacije.
Oslanja se na **Rodrigezovu formulu,** koja se koristi za određivanje koordinata rezultujućeg vektora, pri rotaciji oko date ose, za dati ugao:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{v}\cos\theta + (\omega \times \mathbf{v})\sin\theta + \omega(\omega \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta).$$

Konkatenacija i interpolacija

- **Nadovezivanje** dve rotacije sa poznatim osama i uglovima daje rotaciju kojoj treba da odredimo osu i ugao. To je, međutim, nezgodno, u zapisu osa-ugao, ili pomoću vektora rotacije, bez prelaženja u (recimo) matričnu reprezentaciju.
- Nadovezivanje “malih” rotacija, međutim, realizuje se mnogo lakše i ta osobina ovih reprezentacija nalazi primenu.
- **Interpolacija** je izvodljiva u reprezentaciji osa-ugao. Jednostavnija je nego u slučaju Ojlerovih uglova.

Višeznačnost i singulariteti

- "Aliasing" se pojavljuje kao i u svim reprezentacijama koje eksplicitno koriste uglove.
- Singularitet postoji kada je ugao rotacije $\theta = 0$, s obzirom da se u reprezentaciji tada može koristiti proizvoljna osa.
- Uočimo da u slučaju reprezentacije pomoću vektora rotacije ovaj singularitet ne postoji, jer se množenjem uglom $\theta = 0$ dobija $\mathbf{e}=0$, nezavisno od vektora ose rotacije.