Predstavljanje orijentacije i rotacije u 2D

Različite reprezentacije rotacije u 2D i 3D

- Rotacija je transformacija kojoj ćemo u nastavku posvetiti posebnu pažnju. Proširićemo znanja koja smo o njoj stekli u okviru priče o linearnim transformacijama.
- Različiti načini prikazivanja rotacije zovu se reprezentacije ili parametrizacije rotacije, u 2D i 3D.
- S obzirom na analogiju koja postoji između načina predstavljanja rotacije u 2D i 3D, izučićemo prvo 2D slučaj, a zatim stečena znanja uopštiti na 3D.

Različite reprezentacije rotacije u 2D i 3D

- Najčešće korišćene reprezentacije rotacije u 2D su
  - Pomoću ugla rotacije
  - Pomoću matrice rotacije
  - Pomoću kompleksnih brojeva

- Najčešće korišćene reprezentacije rotacije u 3D su
  - Pomoću ugla i ose rotacije
  - Pomoću matrice rotacije
  - Pomoću Ojlerovih uglova
  - Pomoću kvaterniona

Orijentacija i rotacija

- Orijentacija - relativan položaj objekta u odnosu na neki fiksiran referentni koordinatni sistem.
  - Na primer, koordinatne ose prostora objekta imaju neku orijentaciju određenu u odnosu na fiksirane koordinatne ose uspravnog, ili globalnog prostora. Mi želimo da nađemo pogodan način za prikazivanje te orijenatcije.
- Orijentacija je svojstvo objekta.
- Rotacija - transformacija kojom se menja orijentacija, odnosno kojom se jedna orijentacija transformiše u drugu.
- Orijentacija se predstavlja kao rotacija kojom se objekat transformiše iz referentne orijentacije u posmatranu.

Različite reprezentacije rotacije u 2D i 3D - kriterijumi

Različite reprezentacije rotacije upoređujemo imajući na umu nekoliko uobičajenih kriterijuma koji nam pomažu da sagledamo prednosti i mane pojedinih parametrizacija:

- Složenost – broj parametara koji je potreban, memorijska složenost;
- Mogućnost konkatenacije – koliko je parametrizacija pogodna za predstavljanje više uzastopnih rotacija;
- Mogućnost interpolacije – kako se određuje neki među-položaj objekta pri rotaciji, na osnovu dva poznata položaja.

Različite reprezentacije rotacije u 2D i 3D – dobre osobine

Dobrom reprezentacijom rotacije smatraćemo onu koja ima sledeće osobine:

- Zahteva minimalan broj parametara – to je broj jednak broju stepeni slobode, u idealnom slučaju;
- Omogućava matematički pogodnu realizaciju rotacija, njihovih konkatenacija, i interpolacija.

U nastavku ćemo analizirati nekoliko reprezentacija i uporediti ih u smislu navedenih kriterijuma.

Ugao rotacije

kao način predstavljanja rotacije u 2D

Predstavljanje rotacije uglom rotacije

Ovo je veoma intuitivna reprezentacija. Njene karakteristike su:

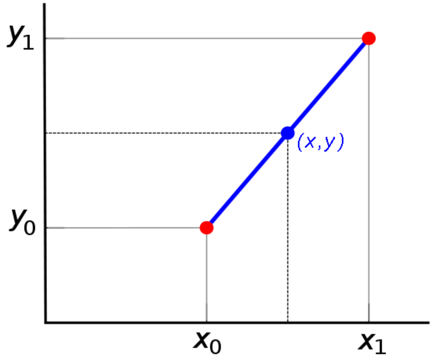
- Koristi jedan parametar (dakle, minimalan broj, jednak broju stepeni slobode);
- Parametar (ugao) može biti pozitivan i negativan;
- Konkatenacija (uzastopne rotacije) se jednostavno zapisuju u obliku zbira uglova pojedinačnih rotacija (uočimo da je konkatenacija komutativna u 2D);
- Interpolacija…

Interpolacija

- Problem koji posmatramo je: ako su poznata dva polozaja (orijentacije) objekta, kako mogu na neki adekvatan način generisati položaje (orijentacije) objekta u pozicijama između dva data položaja.
- Uobičajeno je ovakvo pitanje postaviti za funkcije u opštem smislu: Ukoliko raspolažem vrednostima funkcije u dve tačke, kako mogu da "logično pretpostavim" koje će vrednosti funkcija imati u tačkama između dveju datih.
- U oblasti računarske animacije, ovo pitanje je veoma važno. Kvalitet odgovora utiče na to koliko će kretanje nekog objekta iz jedne pozicije u drugu delovati "prirodno", bez neočekivanih prekida, "trzaja", skokova i sl.

Linearna interpolacija

Pretpostavka pri linearnoj interpolaciji je da je funkcija čije vrednosti "rekonstruišemo" linearna. To znači da određujemo pravu (linearnu funkciju) koja prolazi kroz dve date tačke, a da vrednosti funkcije u tačkama između datih određujemo kao vrednosti generisane linearne funkcije.



Za proizvoljnu tačku (x,y) koja je između tačaka (x_0, y_0) i (x_1,y_1) važi

$$(x, y) = (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1) = ((1-t)x_0 + t\,x_1, (1-t)y_0 + t\,y_1)$$

$$t \in [0,1]$$

Interpolacija rotacije, za date uglove, je

$$\psi(\theta,\phi;t) = (1-t)\cdot\theta + t\cdot\phi\,, \quad t \in [0,1]$$

Višeznačnost (aliasing)

- Ukoliko su dati uglovi

$$\varphi = 30°, \theta = 390°$$

$$\psi(\varphi, \theta; t) = \psi(30°, 390°; t) = (1-t)\cdot 30° + t \cdot 390°$$

$$t = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \psi(30°, 390°; 0.5) = 15° + 195° = 210°$$

- Dakle, odredili smo da je orijentacija "na pola puta" između dve date orijentacije (određene uglovima 30° i 390°), određena uglom 210°.
- Međutim, važi da je $390° = 30° + 360°$, odnosno, dva data ugla predstavljaju jednu istu orijentaciju u ravni. U tom smislu, interpolacija između ove dve orijentacije nije moguća, pa ni dobijena orijentacija od 210° nije odgovarajuća.

Višeznačnost

- Problem višeznačnosti se rešava uvođenjem ograničenja za vrednost parametra (ugla).
- Vrednosti ugla $\theta \in [0, 2\pi)$ nazivaju se kanoničke vrednosti.
- Ukoliko su vrednosti ugla rotacije kanoničke, svaka orijentacija u ravni će biti opisana na jedinstven način.
- *Primer*: Za date uglove odrediti interpolacionu formulu, a zatim i orijentaciju koju objekat ima nakon trećine vremena koje protekne pri ravnomernoj rotaciji od polazne do krajnje orijentacije.

$$\varphi = 20°, \theta = 50°$$

$$\psi(\varphi, \theta; t) = \psi(20°, 50°; t) = (1-t)\cdot 20° + t\cdot 50°$$

$$t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \psi(30°, 390°; \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\cdot 30° + \frac{1}{3}\cdot 50° = \frac{110°}{3} = 36°40'$$

Realizacija rotacije prikazane uglom

- Pitanje realizacije zahteva odgovor na sledeće:

  Ako je rotacija zadata uglom rotacije, i ako su date koordinate tačke u ravni, na koji način se određuju koordinate te tačke u novom položaju, tj. nakon realizacije rotacije.
- Realizacija je "najslabija tačka" ovog načina predstavljanja rotacije, nije naročito "elegantna".
- Polazeći od toga kako se preslikavaju jedinični vektori koordinatnih osa (tj. bazni vektori), i posmatrajući sve vektore kao linearne kombinacije vektora baze, koristeći činjenicu da je rotacija linearna transformacija, možemo izvesti izraz za transformaciju koordinata data tačke.

Realizacija rotacije prikazane uglom

$$R(x, y;\theta) = (x', y')$$

označava rotaciju za ugao θ primenjenu na tačku (*x,y*), čiji je rezultat tačka (*x’,y’*) .

$$R(1,0;\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$R(0,1;\theta) = (-\sin\theta,\ \cos\theta)$$

bazni vektori – jedinični vektori u pravcu koordinatnih osa preslikavaju se rotacijom za ugao θ u tačke sa navedenim koordinatama.

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$$
$$R(x, y;\theta) = xR(1,0;\theta) + yR(0,1;\theta)$$
$$= x(\cos\theta, \sin\theta) + y(-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$= (x\cos\theta - y\sin\theta\ ,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Dobro nam poznat izraz kojim određujemo koordinate tačke (*x ’,y ’*) dobijene rotacijom date tačke (*x,y*) za dati ugao θ.

Dakle, realizacija rotacije zadate uglom zahteva generisanje i primenu navedenih formula. Ovaj način ne može se smatrati realizacijom koja direktno koristi parametar (ugao) kojim je rotacija prikazana.

Analiza i zaključci parametrizacije rotacije u 2D uglom rotacije

Parametrizacija rotacije uglom je

- Kompaktna – koristi jedan parametar za jedan stepen slobode.
- Pogodna za reprezentaciju konkatenacija (svodi se na sabiranje parametara – uglova).
- Pogodna za reprezentaciju interpolacije.
- Nije posebno pogodna za realizaciju rotacije, jer zahteva generisanje i primenu formula za transformaciju.
- Zahteva ograničenje vrednosti parametra (ugla) da bi se izbegala nepoženjna višestrukost (aliasing).

Matrica rotacije

kao način predstavljanja rotacije u 2D

Ortogonalna grupa matrica

- Već smo definisali skup ortogonalnih matrica formata n:

$$O(n) = \{A \in M_{n\times n} \mid A^{-1} = A^T\}.$$

- **Teorema**: Skup $O(n)$ ima algebarsku strukturu grupe u odnosu na množenje matrica.

Dokaz: Treba pokazati da je $O(n)$ zatvoren skup u odnosu na operaciju množenja. To znači

$$A, B \in O(n) \Rightarrow A \cdot B \in O(n)$$

$$A^{-1} = A^T,\ B^{-1} = B^T \quad \Rightarrow \quad (A\cdot B)^{-1} = (A\cdot B)^T$$

Kako je $(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^T = A\cdot B\cdot B^T\cdot A^T = A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I$

zaključujemo da zatvorenost važi.

Takođe, množenje matrica je asocijativno,
jedinični element je jedinična matrica koja jeste ortogonalna,
a svaka matrica ima u posmatranom O(n) inverzni element – svoju transponovanu matricu.

Ortogonalna grupa matrica

Ortogonalna grupa *O(n)* očuvava skalarni proizvod. Za matricu A iz ortogonalne grupe, i vektore *u,v,* važi da je

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

$$Au \cdot Av = (Au)^T (Av) = u^T A^T Av = u^T A^{-1} Av = u^T v = u \cdot v$$

Ako je matrica **A** element ortogonalne grupe *O(n),* onda je A matrica linearne izometrije.

(Svaka matrica predstavlja linearnu transformaciju. Ako transformacija očuvava skalarni proizvod, ona očuvava rastojanja, a tada se naziva izometrija.)

Ortogonalna grupa matrica

- Važi i obrnuto tvrđenje: Svaka linearna izometrija realizuje se matricom iz ortogonalne grupe *O(n)*.

  Uočimo da se ortonormirana baza prostora preslikava izometrijom u ortonormiranu bazu (jer transformacija učuvava rastojanja i uglove). To znači da su kolone matrice transformacije (slike vektora baze) ortonormirani vektori, a takva matrica je ortogonalna.

- Važi, takođe, i da je determinanta ortogonalne matrice A jednaka 1, ili -1.

Kako je

$$\det(A) = \det(A^T)$$
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

važi da je

$$\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A^T)$$
$$= \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Dakle $A \in O(n) \;\; \Rightarrow \;\; \det^2(A) = 1 \;\; \Rightarrow \;\; \det(A) = 1, \;\; ili \;\; \det(A) = -1.$

Specijalna ortogonalna grupa matrica

Specijalna ortogonalna grupa je podgrupa ortogonalne grupe matrica za koju važi

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

Sve matrice koje pripadaju grupi *SO(n)* predstavljaju matrice rotacije. Sve matrice rotacije su elementi grupe *SO(n)*.

Posmatrajmo slučaj $n=2$ (izometrija u ravni).

Ako je A matrica rotacije za ugao θ, ona je oblika $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Lako se utvrđuje da je

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

i pri tom je $\mathbf{det(A)} = 1$.

Dakle, proizvoljna matrica rotacije u ravni je element specijalne ortogonalne grupe SO(2).

Specijalna ortogonalna grupa matrica

Posmatrajmo proizvoljnu matricu A iz specijalne ortogonalne grupe, $A \in SO(2)$.

Matrica A je ortogonalna, pa su njene kolone ortonormirani vektori. Možemo ih prikazati kao dva ortogonalna vektora čiji krajevi pripadaju jediničnoj kružnici.

Svaki vektor čija krajnja tačka pripada jediničnoj kružnici može se prikazati u obliku $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$, za neki ugao θ.

Dva jedinična vektora koji su ortogonalni na **u** su

$$\mathbf{v_1} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$
$$\mathbf{v}_2 = (\sin\theta, -\cos\theta)$$

Kako je $\begin{array}{l} \det([\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}_1{}^T]) = 1 \\ \det([\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}_2{}^T]) = -1 \end{array}$ zaključujemo da je $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Specijalna ortogonalna grupa matrica

Dakle, matrica A je matrica rotacije (u ravni) akko $A \in SO(2)$.

Takođe, sve matrice $A \in SO(2)$ su oblika $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Može se još pokazati (direktnom proverom) da je množenje matrica iz specijalne ortogonalne grupe (matrica rotacije) komutativno. Ovo je u skladu sa činjenicom da je rotacija u ravni oko datog centra komutativna transformacija.

Neke karakteristike reprezentacije rotacije pomoću matrice rotacije

- Reprezentacija rotacije pomoću matrice koristi 4 vrednosti za predstavljanje jednog parametra. Ovaj zapis, dakle, nije kompaktan.
- Konkatenacija rotacija se jednostavno zapisuje i realizuje množenjem matrica.
- Zbog grešaka zaokrugljivanja može se narušiti ortogonalnost matrice rotacije. Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije može se koristiti za "korekciju".
- Realizacija rotacije je veoma jednostavna za rotacije date matricom – svodi se na množenje vektora matricom.
- Interpolacija… zahteva posebnu pažnju…

Interpolacija rotacija prikazanih matrično

- Linearna interpolacija rotacija koje su prikazane matricama vodi do sledećeg: za dve date matrice rotacije, **A** i **B**, formiramo matricu **C**

$$(1-t)A+tB=C, \quad t\in[0,1].$$

- Ova ideja, međutim, nije baš dobra.

  Primer: Za $t=0.5$ dobijamo, kao rezultat interpolacije među orijenatacijama $\theta_0=0°$ i $\theta_1=90°$ prikazanim matrično,

$$0.5\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+0.5\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

  a dobijena matrica nije čak ni matrica rotacije, a pogotovo ne ona koja prikazuje orijentaciju $\theta=45°$ koju smo očekivali.

Interpolacija rotacija prikazanih matrično

- U navedenom primeru problem možemo delimično da rešimo ortogonalizacijom rezultujuće matrice primenom Gram-Šmitovog postupka. To i dalje ne mora biti matrica koja reprezentuje odgovarajuću orijentaciju.
- *Primer*: Interpolacija među orijenatacijama θ_0=-90° i θ_1=90° prikazanim matrično, za $t=0.5$ daje

$$0.5\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 0.5\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa u ovom slučaju ni Gram-Šmitov postupak ne pomaže.

Interpolacija rotacija prikazanih matrično

- Problem se može uočiti kada pratimo interpolaciju dve rotacije i uočimo da navedenim postupkom linearno interpoliramo između krajnjih tačaka vektora polazne i krajnje orijentacije. Na taj način određujemo tačku koja je krajnja tačka interpolirajućeg vektora.
- Jasno je da ovim ne dobijamo vektor odgovarajuće dužine, ali to možemo popraviti u postupku ortonormalizacije.
- Drugi problem je što ugaona rastojanja (pa čak ni odnose tih rastojanja) ne možemo poistovetiti sa linijskim.
- Interpolacija koja nam odgovara je tzv. sferna linearna interpolacija (SLERP), umesto linearne interpolacije (LERP).
- SLERP očuvava dužine interpoliranih vektora orijentacija, i ugaona rastojanja.
- Međutim, matrična realizacija SLERP-a je daleko komplikovanija nego što nam odgovara. Formulu ćemo izvesti malo kasnije.

Kompleksni brojevi

kao način predstavljanja rotacije u 2D

Skup kompleksnih brojeva

Skup kompleksnih brojeva

$$C = \{z \mid z = a + bi,\ \ a, b \in R\}$$

$$i^2 = -1$$

je izomorfan sa skupom R^2 .

Izomorfizam između ovih skupova je definisan pravilom

$$f(z) = (a, b) \Leftrightarrow \ z = a + bi$$

Izdvajamo skup S^1 kompleksnih brojeva modula 1. To su brojevi koji pripadaju jediničnom krugu:

$$S^1 = \{z \in C \mid |z| = 1\},$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1-sfera S^1

Skup jediničnih kompleksnih brojeva je Abelova grupa s obzirom na operaciju množnja kompleksnih brojeva.

Znamo da se svaki kompleksan broj iz skupa S^1 može napisati u obliku: $z \in S^1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Važno zapažanje je: Grupa SO(2) je izomorfna sa S^1.

Preslikavanje koje uspostavlja izomorfizam je $f : S^1 \to SO(2)$

$$f(e^{i\theta}) = A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ovako definisano preslikavanje je bijekcija

i važi da je

$$f(e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}) = f(e^{i\theta}) \cdot f(e^{i\varphi}) = A(\theta) \cdot A(\varphi).$$

$$f(e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi}) = f(e^{i(\theta+\vartheta)}) = A(\theta+\varphi)$$

$$A(\theta) \cdot A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{bmatrix} = A(\theta+\varphi).$$

Reprezentacija rotacije u 2D jediničnim kompleksnim brojem

Na osnovu uspostavljenih izomorfizama, jasno je da je

- Rotacija prikazana uglom θ
- Rotacija prikazana matricom $A(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$
- Rotacija prikazana kompleksnim brojem $e^{i\theta}$

jedna ista rotacija, odnosno da su navedena tri načina da se prikaže rotacija u ravni za dati ugao θ.

Karakteristike reprezentacije 2D rotacije kompleksnim brojem

- Ovakva reprezentacija je kompaktna (zahteva jedan ili dva parametra, u zavisnisti od načina zapisivanja-eksponencijalno, ili trigonometrijski);
- Konkatenacija se lako i prirodno vrši množenjem kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2).$$

- Realizacija rotcije je jednostavna: tačka *(x,y)* se za ugao θ rotira množenjem odgovarajućih kompleksnih brojeva.

$$(x,y) \to x+iy$$

$$R(x,y;\theta) = (x+iy)\cdot e^{i\theta} = (x+iy)\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(y\cos\theta + x\sin\theta)$$

$$(x\cos\theta - y\sin\theta) + i(y\cos\theta + x\sin\theta) \to (x\cos\theta - y\sin\theta,\ y\cos\theta + x\sin\theta) = R(x,y;\theta)$$

Interpolacija rotacija predstavljenih pomoću kompleksnih brojeva

Za dve date orijentacije, prikazane kompleksnim brojevima

$q_0 = e^{i\theta_0},\ q_1 = e^{i\theta_1},$

linearna interpolacija se realizuje pomoću formule

$$q_t = e^{i((1-t)\theta_0 + t\theta_1)} = e^{i(\theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0))} = e^{i\theta_0} \cdot e^{it(\theta_1 - \theta_0)}$$

$$q_t = e^{i\theta_0} \cdot e^{it(\theta_1 - \theta_0)} = q_0 \cdot (e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_0})^t = q_0 \cdot (q_1 \cdot q_0{}^{-1})^t$$

Interpolacija rotacija predstavljenih matricama rotacije

Koristeći izomorfizam $f(e^{i\theta}) = A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ možemo iskoristiti prethodno izvedenu interpolacionu formulu da bismo formulisali interpolaciju rotacija prikazanih matricama rotacije:

$$q_t = q_0 \cdot (q_1 \cdot q_0{}^{-1})^t = e^{i\theta_0} \cdot e^{it(\theta_1 - \theta_0)}$$

$$A(t\theta) = A(\theta_0) \cdot A(t(\theta_1 - \theta_0)) = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t(\theta_1 - \theta_0) & -\sin t(\theta_1 - \theta_0) \\ \sin t(\theta_1 - \theta_0) & \cos t(\theta_1 - \theta_0) \end{bmatrix}$$

Interpolacija rotacija predstavljenih matricama rotacije

Primer 1: Ako su početna i krajnja orijentacija date matricama

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odrediti matrični prikaz orijentacije objekta nakon polovine vremena kretanja od početna orijentacije ka krajnjoj.

Rešenje. Na ovo pitanje smo već pokušali da odgovorimo, ali direktno korišćenje linearne interpolacije sa matricama nije dalo željeni rezultat. Za date matrice lako proveravamo da su matrice rotacije, za uglove $\theta_0=0°$ i $\theta_1=90°$. Za $t=0.5$ dobijamo

$$M_t = M_{0.5} = A(\theta_0)\cdot A(t(\theta_1-\theta_0)) = A(0°)\cdot A(45°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

što odgovara matričnom zapisu orijentacije $\theta=45°$.

Interpolacija rotacija predstavljenih matricama rotacije

Primer 2. Ako su početna i krajnja orijentacija date matricama

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odrediti matrični prikaz orijentacije objekta nakon polovine vremena kretanja od početna orijentacije ka krajnjoj.

Rešenje. I na ovo pitanje smo već pokušali da odgovorimo, ali nismo uspeli da odredimo odgovarajuću matričnu reprezentaciju rezultujuće orijentacije. Za date matrice lako proveravamo da su matrice rotacije, i odgovaraju uglovima $\theta_0=-90°$ i $\theta_1=90°$. Za t=0.5 dobijamo

$$M_t = M_{0.5} = A(\theta_0)\cdot A(t(\theta_1-\theta_0)) = A(-90°)\cdot A(90°) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovim smo, u skladu sa očekivanim, prikazali orijentaciju za $\theta=0°$.

SLERP – sferna linearna interpolacija

Sferna linearna interpolacija se intenzivno koristi za interpolaciju između dve date orijentacije.

Omogućava da generišemo orijentacije koje objekat ima/zauzima dok se ravnomernom brzinom kreće (rotira) od početne orijentacije do krajnje.

Ako su dve orijentacije zadate jediničnim vektorima, izvešćemo formulu kojom određujemo vektor položaja objekta u svakom trenutku tokom rotacije između početne i krajnje pozicije.

Formulu ćemo izvesti nezavisno od dimenzije posmatranog prostora. Utoliko je njen praktični značaj veći.

SLERP – sferna linearna interpolacija

Pretpostavimo da su nam poznati jedinični vektori $q_{0,} q_1$, takvi da je $|q_0|=|q_1|=1, \quad \angle(q_0, q_1)=\theta$, i da želimo da odredimo jedinični vektor q_t takav da za $t\in[0,1]$ važi da je $\angle(q_0, q_t)=t\theta.$

Postupak se sastoji iz dva koraka.

1. Odredimo vektor $q_1{}'$ takav da je $q_0 \perp q_1{}' \quad \Leftrightarrow \quad q_0 \cdot q_1{}'=0.$

   Ovo možemo realizovati Gram-Šmitovim postupkom.

2. Određujući koordinate traženog vektora q_t u koordinatnom sistemu određenom vektorima $q_{0,} q_1{}'$ kao jediničnim vektorima koordinatnih osa, dobijamo

$$q_t = \cos t\theta \cdot q_0 + \sin t\theta \cdot q_1{}'.$$

SLERP – sferna linearna interpolacija

- Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije:

  Sećamo se da polazimo od $\|r_0\| = 1$ i formiramo $r_1' = r_1 - (r_0 \cdot r_1) \cdot r_0$

  koji zatim normiramo deleći ga njegovom normom.

  U ovom slučaju, koristimo $\|q_0\| = 1$, kao i da je $q_0 \cdot q_1 = \cos\theta$ i formiramo

$$q_1' = \frac{q_1 - (q_0 \cdot q_1) \cdot q_0}{\|q_1 - (q_0 \cdot q_1) \cdot q_0\|}$$

  Kako je

$$\|q_1 - (q_0 \cdot q_1) \cdot q_0\| = \sqrt{(q_1 - (q_0 \cdot q_1) \cdot q_0) \cdot (q_1 - (q_0 \cdot q_1) \cdot q_0)} = \sqrt{q_1^2 - 2\cos\theta \, q_0 \cdot q_1 + \cos^2\theta \, q_0^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \cos^2\theta - 2\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sin\theta$$

i konačno

$$q_1' = \frac{q_1 - \cos\theta \, q_0}{\sin\theta}$$

SLERP – sferna linearna interpolacija

- Koordinate vektora q_t u koordinatnom sistemu određenom vektorima $q_{0,}\, q_1'$ kao jediničnim vektorima koordinatnih osa:

$$
\begin{aligned}
q_t &= \cos t\theta \cdot q_0 + \sin t\theta \cdot q_1' \\
&= \cos t\theta \cdot q_0 + \sin t\theta \cdot \frac{q_1 - \cos\theta\, q_0}{\sin\theta} \\
&= \cos t\theta \cdot q_0 + \frac{q_1 \sin t\theta - \cos\theta \sin t\theta\, q_0}{\sin\theta} \\
&= q_0 \frac{\cos t\theta \sin\theta - \cos\theta \sin t\theta}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \\
&= q_0 \frac{\sin(\theta - t\theta)}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

Konačno, tražena interpolirana orijentacija je:

$$q_t = q_0 \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} + q_1 \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}$$

SLERP – sferna linearna interpolacija

- Ukoliko je ugao θ između datih orijentacija blizak nuli, izraz za SLERP zahteva deljenje brojem bliskim nuli, i time dovodi do numeričke nestabilnosti, na šta je važno obratiti pažnju.
- U takvoj situaciji kretanje objekta po kružnici (koje se opisuje korišćenjem formule za SLERP) se aproksimira kretanjem po pravolinijskom segmenu, i za to se koristi formula "obične" linearne interpolacije (LERP).
- SLERP u ostalim slučajevima pokazuje dobre osobine, ali zahteva računanje trigonometrijskih funkcija, zbog čega može biti spor.
- Takođe, treba uočiti da SLERP formula pravi razliku između početne i krajnje orijentacije i da interpolacija (kretanje) od q_0 ka q_1 nije isto kao kretanje od q_1 ka q_0.

Matrica kosinusa pravaca

kao način predstavljanja rotacije u 2D

Matrica kosinusa uglova

- Koristeći veze među trigonometrijskim funkcijama uglova, matricu rotacije za dati ugao θ možemo napisati u obliku:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Ako je su jedinični vektori u pravcu koordinatnih osa, za polaznu i rezultujuću orijentaciju, označeni sa

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2),$$
$$\mathbf{x}' = (x_1', x_2'), \quad \mathbf{y} = (y_1', y_2'),$$

(dakle, važi da je $\angle(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \angle(\mathbf{y},\mathbf{y}') = \theta,$ $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}'\| = \|\mathbf{y}'\| = 1$)

onda su u gornjoj matrici navedeni uglovi među koordinatnim vektorima polaznog i rezultujućeg koordinatnog sistema:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot = \begin{bmatrix} \angle(\mathbf{x},\mathbf{x}') & \angle(\mathbf{x},\mathbf{y}') \\ \angle(\mathbf{y},\mathbf{x}') & \angle(\mathbf{y},\mathbf{y}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' & \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}' \\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}' & \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}' \end{bmatrix}$$