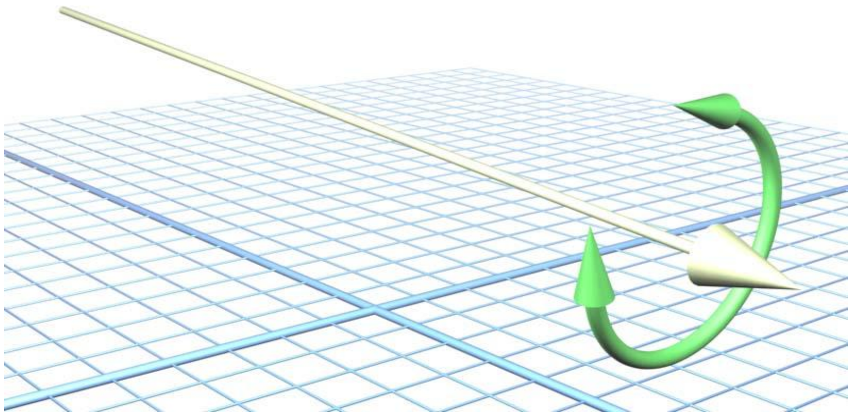
Predstavljanje orijentacije i rotacije u 3D

Orijentacija

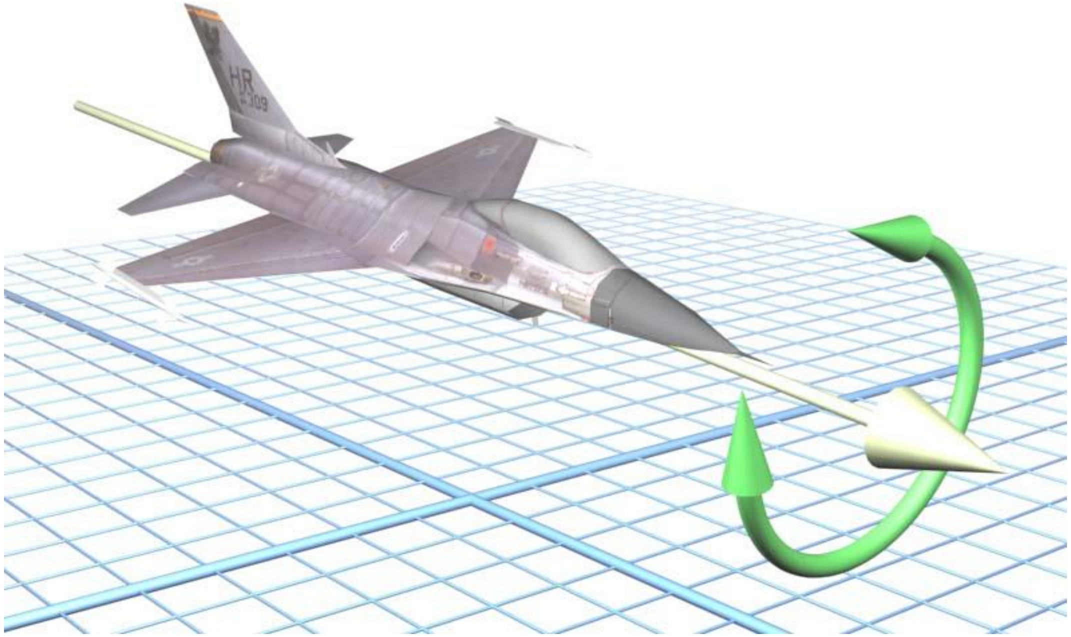
Još jednom: Orijentacija i pravac - isto ili ne?

Pravac je određen vektorom, ali rotacija vektora oko samog sebe nema daljeg uticaja.



Orijentacija

Rotacija fizičkog objekta oko sopstvene ose (koja mu određuje orijentaciju),
u opštem slučaju ima uticaja na njegov položaj.



Pravac i orijentacija

- Pravac možemo opisati pomoću 2 ugla (imamo na umu sferne koordinate).

- Opisivanje orijentacije zahteva 3 ugla, ili neka druga 3 parametra.
  Postoji više načina da se opiše orijentacija, odnosno da se odaberu tri parametra.

Ugaono pomeranje

- Orijentacija se opisuje u odnosu na neki referentni sistem (ne postoji kao apsolutna kategorija).

- Kao što je pozicija tačke opisana kao translacija u odnosu na neku referentnu tačku, orijentacija se može opisati kao **rotacija u odnosu na** neku referentnu orijentaciju.

- Veličina rotacije od referentne do posmatrane orijentacije naziva se **ugaono pomeranje**.

Predstavljanje orijentacije

Postoji više načina za prikazivanje orijentacije u 3D.

Svaka reprezentacija ima svoje prednosti i nedostatke.

Najčešće korišćene reprezentacije su:

1. Matrice (i matrice kosinusa pravaca)
2. Ojlerovi uglovi
3. Kvaternioni

Matrica rotacije

kao način predstavljanja rotacije u 3D

Matrice rotacije u 3D

- Zapažanja o matricama rotacije u ravni mogu se direktno uopštiti na matrično prikazivanje rotacije u prostoru.
- Specijalna ortogonalna grupa matrica, SO(3),je grupa koju čine sve matrice reda 3 (kvadratne matrice formata 3*x*3) koje su ortogonalne (njihova inverzna matrica je jednaka njihovoj transponovanoj matrici) i čija je determinanta jednaka 1.
- Kao i u 2D slučaju, ove matrice reprezentuju linearne transformacije koje očuvavaju rastojanja, ortogonalnost, i orijentaciju. Dakle, ove izometrije su rotacije.
- Kao i u 2D slučaju, i u prostoru se podrazumeva da matrica rotacije prikazuje onu orijentaciju (prostora) objekta koja se navedenom matricom rotacije dovodi u polozaj uspšravnog prostora .

Matrice rotacije u 3D

- Neke matrice za koje znamo da su matrice rotacije su:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Ove matrice pripadaju specijalnoj ortogonalnoj grupi SO(3), što se lako može proveriti. Dovoljno je utvrditi da je

$$A \cdot A^T = B \cdot B^T = I \quad \text{i da je} \quad \det(A) = \det(B) = 1.$$

- Kako prva matrica predstavlja transformaciju pri kojoj je pravac z-ose invarijantan, to je matrica rotacije oko z-ose. Druga matrica očuvava pravac x-ose, i predstavlja rotaciju u prostoru oko z-ose.

Matrice rotacije u 3D

- Treba napomenuti da je, u opštem slučaju, relativno komplikovano direktno proveravati da li je neka generisana matrica, formata $n, n \geq 3,$ element grupe SO(n), odnosno, da li je ortogonalna i da li joj je determinanta jednaka 1.
- Bilo bi zgodno imati neki pogodan način za brzu proveru "članstva" u SO(n)…
- Još jedno važno zapažanje o elementima grupe SO(3) je da za dve navedene matrice rotacije u 3D ne važi komutativnost množenja; lako se proverava de je $A \cdot B \neq B \cdot A$. Podsetimo se da je SO(2) Abelova grupa, odnosno, da je rotiranje u ravni komutativno. Grupa SO(2) je jedina SO(n) grupa sa ovom osobinom.
- Važan zaključak je da rotacija u 3D prostoru nije komutativna, odnosno da redosled rotacija utiče na rezultat.
- Uočimo još i da uzastopna primena rotacija oko jedne koordinatne ose (dakle, množenje matrica oblika kao matrica A, na primer) jeste komutativno. Tada se rotacije u prostoru svode na rotacije u ravni..

Karakteristični koreni i vektori matrice rotacije u 3D

- Govoreći o linearnim transformacijama i njima odgovarajućim matricama, napomenuli smo da tzv. slične matrice realizuju istu linearnu transformaciju (u različitim bazama), a da određivanjem karakterističnih korena i vektora matrice možemo odrediti invarijantne pravce posmatrane transformacije,kao i pogodnu – dijagonalnu – matricu koja realizuje istu transformaciju u odgovarajućoj bazi.
- Uočavamo da je za karakteristične korene matrice rotacije zadovoljeno $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 = \det(A),$

$$|\lambda_i| = 1, \ za \ \lambda_i \in R,$$

kao i da je par konjugovano-kompleksnih brojeva uvek istovremeno par karakterističnih korena.

Karakteristični koreni i vektori matrice rotacije u 3D

- Na osnovu prethodno navedenog, zaključujemo da su mogućnosti za vrednosti karakterističnih korena matrice rotacije:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \qquad (\theta = 0);$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \qquad (\theta = \pi);$$
$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \omega, \quad \lambda_3 = \overline{\omega}, \quad |\omega| = 1, \qquad (\theta \neq 0, \pi).$$

- Za navedene karakteristične korene možemo odrediti karakteristične vektore.
  - Za slučaj kada je $\theta=0$, rotacija se svodi na identičko preslikavanje i čitav 3D prostor (svaki pravac) ostaje očuvan.
  - Za slučaj kada je $\theta=\pi$, odgovarajuća rotacija očuvava bar jedan pravac, (i pravce u ravni ortogonalnoj na taj pravac)
  - Za opšti slučaj, rotacija očuvava jedan pravac.
- Važno je uočiti da rotacija uvek očuvava bar jedan pravac – pravac ose rotacije. On je određen pravcem karakterističnog vektora koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda=1$.

Invarijanta rotacije – pravac ose i ugao rotacije

Za datu matricu rotacije možemo odrediti osu rotacije tako što

- odredimo karakteristične korene matrice.
- odredimo karakteristični vektor koji odgovara karakt. korenu $\lambda = 1.$

  (Uočimo da je uvek bar jedan karakt. koren matrice rotacije jednak 1.)
- Kako je ovaj pravac invarijantan pri transformaciji, on određuje pravac ose rotacije.

Ugao rotacije koju realizuje data matrica možemo odrediti tako što

- Odredimo vektor ortogonalan na prethodno određenu osu rotacije;
- Odredimo sliku tog vektora, množeći ga matricom rotacije;
- Odredimo ugao između vektora-originala i vektora-slike.
- Dobijeni ugao je ugao rotacije.

Napomene o broju parametara potrebnih za reprezentovanje rotacije

- Kao što je već rečeno, opis rotacije u 3D zahteva tri parametra – dva opisuju položaj ose rotacije, a jedan opisuje ugao.
- Osa rotacije se može opisati kao jedinični vektor čija je krajnja tačka na jediničnoj centralnoj sferi. Imajući na umu sferne koordinate, znamo da položaj takvog vektora možemo opisati pomoću 2 ugla.
- Zaključujemo da je SO(3) trodimenzionalan prostor.
- Podsetimo se: SO(2) je jednodimenzionalan prostor.
- Imajući ovo u vidu, jasno nam je da je SO(3) mnogo složeniji za analizu nego SO(2).

Broj parametara za parametrizaciju rotacije matricom rotacije

- Rotacija u 3D određena je pomoću 3
- Matrica rotacije je formata 3*x*3 - koristi 9 parametara za parametrizaciju. Ovo je veoma nekompaktna reprezentacija.
- 9 parametara u matrici rotacije je ograničeno uslovima koji garantuju ortogonalnost matrice. Tri vektora-kolone su ortonormirani vekori.
- Numeričke greške lako naruše osobinu ortogonalnosti – nisu sve matrice “dobre” matrice rotacije. Čak i one matrice za koje mislimo da treba da budu ortogonalne mogu da “izmaknu kontroli”.
- Ozbiljan nedostatak parametrizacije rotacije pomoću matrice rotacije je i neintuitivnost – 9 korišćenih brojeva iz intervala [-1,1] praktično ništa (“razumljivo”) ne govore o osi i uglu rotacije.

Karakteristike reprezentacije rotacije ortogonalnom matricom

Pregled osobina matrične reprezentacije rotacije:

- Reprezentacija je nekompaktna (i neintuitivna).
- Realizacija rotacije predstavljene matricom je direktna i jednostavna.
- Konkatenacija je jednostavna i realizuje se množenjem dveju matrica rotacije.
- Interpolacija je nepogodna. Problemi sa kojima smo se susreli u 2D ovde postaju samo još veći.

Matrični zapis je veoma popularan i često korišćen. ☺

Matrica kosinusa pravaca

kao način predstavljanja rotacije u 3D