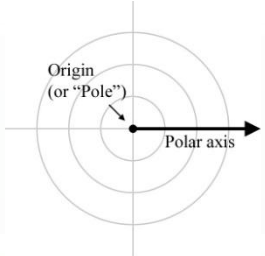
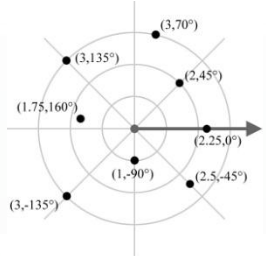
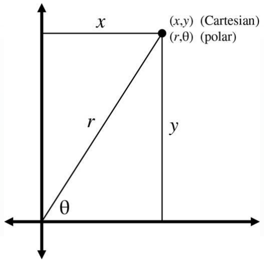
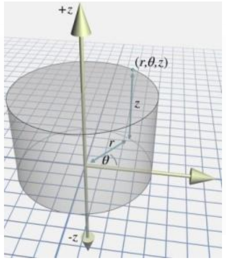
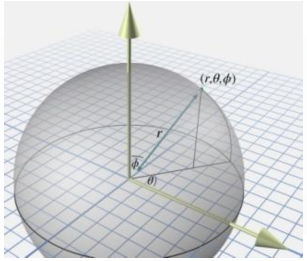
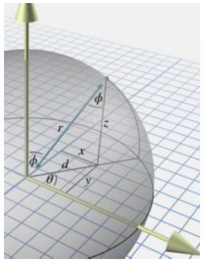








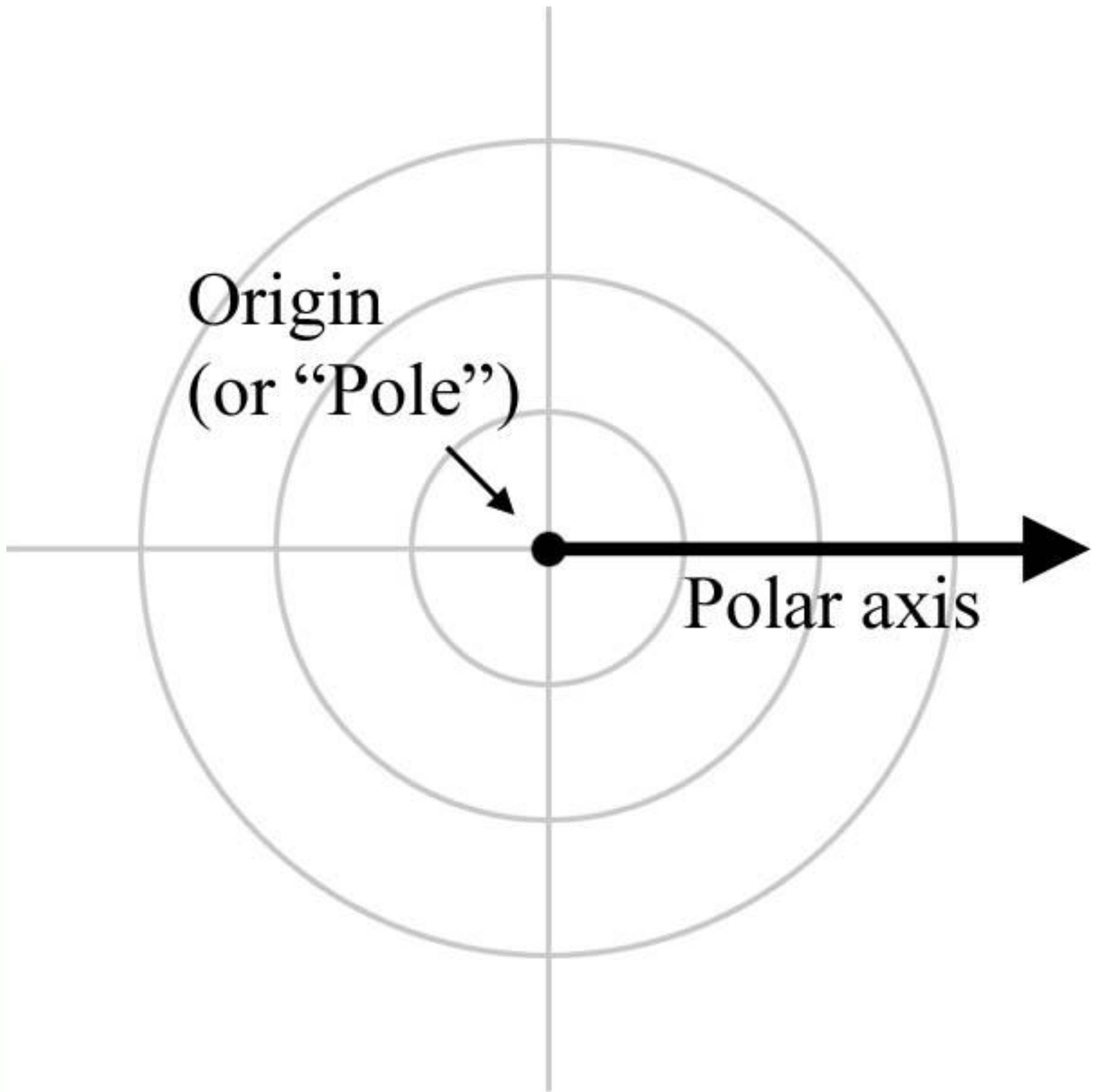




Polarne, cilindrične, sferne koordinate

Polarni koordinatni sistem

- 2D polarni koordinatni sistem ima koordinatni početak (**pol**), koji predstavlja centar koordinatnog prostora.
- Polarni koordinatni sistem ima samo jednu osu, koja se naziva **polarna osa**. Predstavljamo je kao polupravu sa početkom u polu.
- Polarna osa se uobičajeno poklapa sa pozitivnim smerom x-ose pravouglog koordinatnog sistema.


Origin
(or “Pole”)
Polar axis

Polarni koordinatni sistem

- Položaj tačke u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu opisujemo dvema vrednostima – rastojanjem (sa predznakom) tačke od koordinatnih osa.

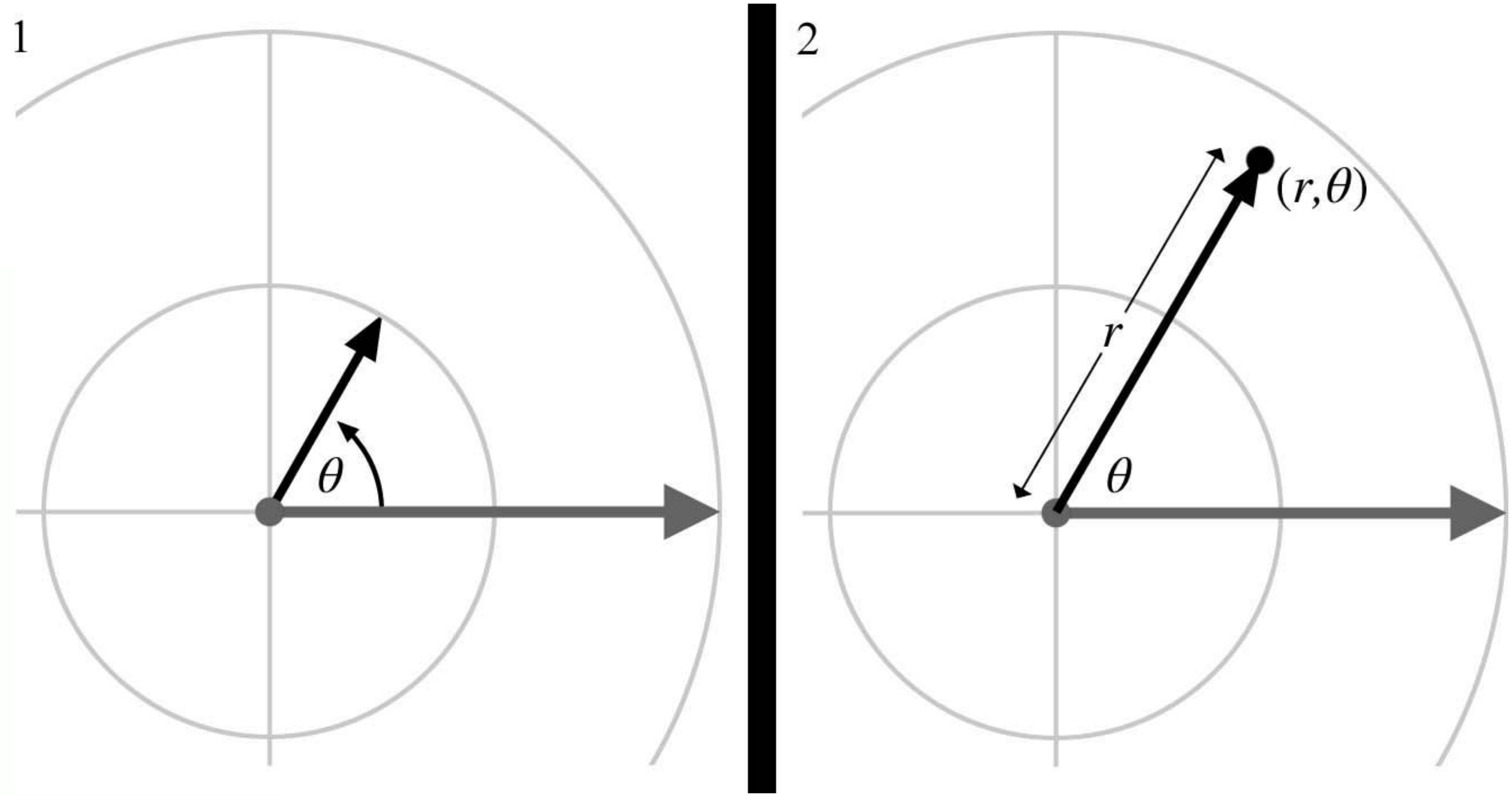
- Polarne koordinate opisuju **rastojanje** i **ugao**.
- Uobičajeno je da se rastojanje označava sa *r* (*radius*), a ugao sa θ.

Polarni koordinatni sistem

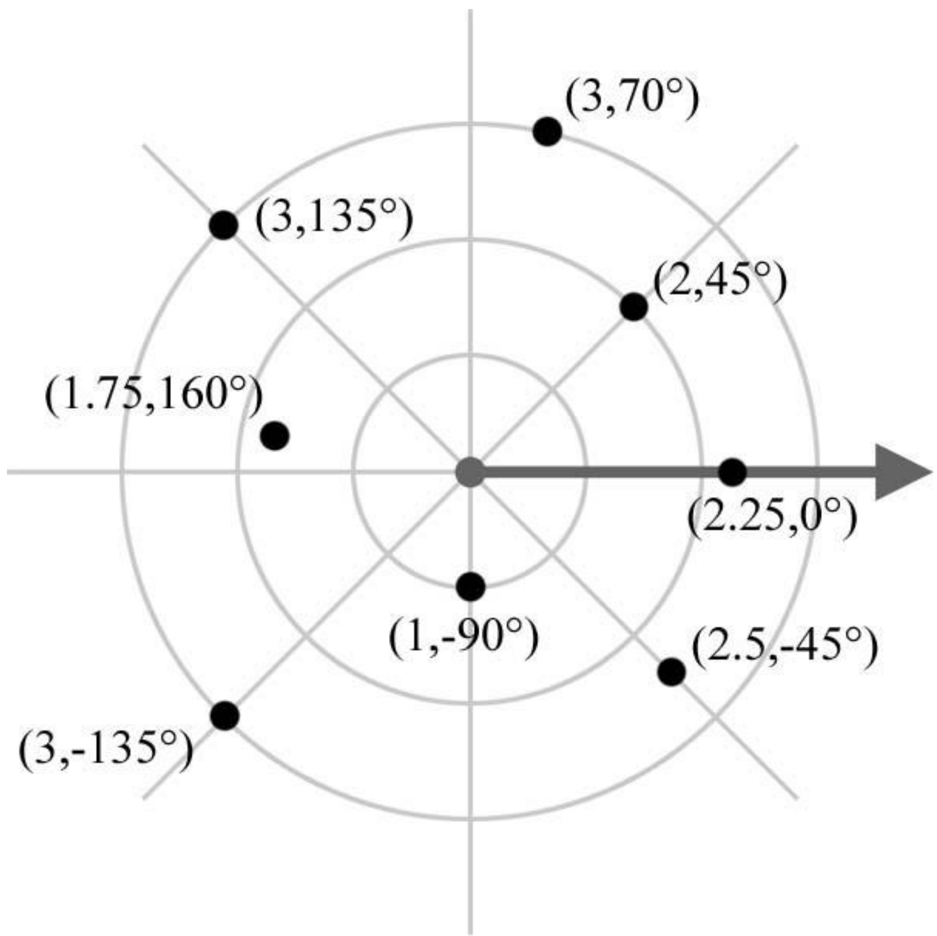
- Koordinatni par (*r*, θ) za tačku u 2D prostoru označava položaj opisan na sledeći način:

    1. Polazeći iz koordinatnog početka, i gledajući u smeru polarne ose, rotiraj za ugao θ. Pozitivna vrednost ugla podrazumeva rotaciju u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

    2. Pomeri se od koordinatnog početka za rastojanje *r*.


1
θ
2
r
θ
(r,θ)

Primeri polarnih koordinata tačaka



Polarni koordinatni sistem

- Koordinatne linije su skupovi tačaka koje dobijamo fiksiranjem vrednosti jedne koordinate, za sve raspoložive vrednosti druge koordinate.
- U Dekartovom koordinatnom sistemu to su prave ortogonalne na jednu od koordinatnih osa.
- U polarnom koordinatnom sistemu koordinatne linije su **kružnice** (za fiksnu vrednost r), i **poluprave** koje polaze iz koordinatnog početka (za fiksnu vrednost θ).

Polarni koordinatni sistem

Nekoliko pitanja o vrednostima koordinata, u vezi sa njihovom jednoznačnošću:

1. Može li radijalno rastojanje r biti negativno?
2. Može li θ uzimati vrednosti van intervala [–180°, 180°]?
3. Da li tačkama koje pripadaju pravoj koja sadrži polarnu osu, ali nisu tačke polarne ose ("negativni deo *x*-ose") opredeljujemo vrednost ugla θ koja je +180° ili –180°?
4. Koje polarne koordinate odgovaraju koordinatnom početku? Jasno je da je radijalno rastojanje r=0, ali ugao nije jednoznačno određen.

Nejednoznačnost polarnih koordinata - Aliasing

- Ispostavlja se da za svaku tačku postoji beskonačno mnogo parova vrednosti polarnih koordinata koje opisuju položaj te tačke.
- Na engleskom, ovo višeznačnost se naziva a*liasing.*
- Uočimo da svaki koordinatni par opisuje samo jednu tačku ravni (2D prostora).
- Ova pojava ne postoji u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu. Korespondencija između tačaka i koordinatnih parova je, u Dekartovom koordinatnom sistemu, obostrano jednoznačna.

Višeznačnost u polarnom koordinatnom sistemu

- Koordinatni parovi koji su različiti, a odgovaraju istoj tački su oblika (r, $\theta + 2k\pi$), za ceo broj k.
- Ukoliko dozvolimo negativne vrednosti r, koje predstavljaju kretanje u suprotnom smeru od smera radijalne ose i njenih rotacija, onda su svi različiti zapisi koordinata tačke (različite od koordinatnog početka) oblika

$$\left((-1)^k\, r, \theta + k180^\circ\right)$$

Kanoničke polarne koordinate

Da bismo izbegli nejednoznačnost, uvodimo konvencije (ograničenja) kojima definišemo **kanonički oblik** polarnih koordinata tačke:

$$r \geqslant 0$$

$$-180^{\circ} < \theta \leqslant 180^{\circ}$$

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

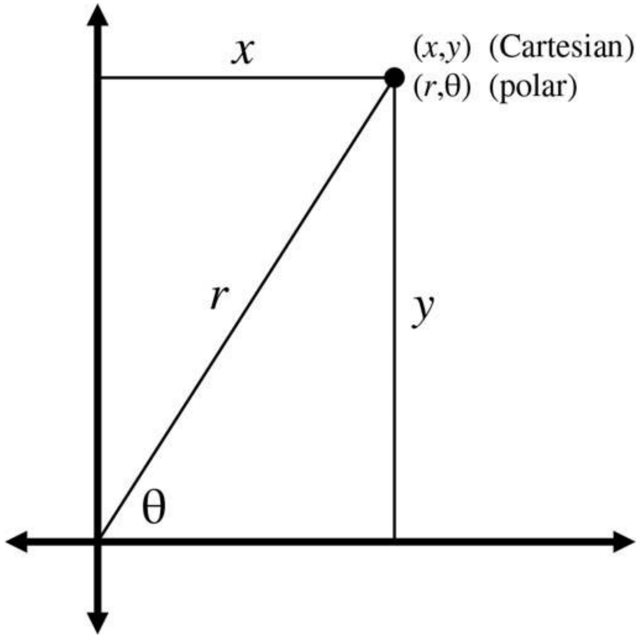
Polarne koordinate tačke uvek možemo izraziti u kanoničkom obliku.

Transformacija iz polarnih u pravougle koordinate tačaka ravni

Veza između polarnih koordinata (r, θ) i odgovarajućih pravouglih koordinata (x, y) date tačke je data formulama

$x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$



Transformacija pravouglih koordinata u polarne koordinate tačke u ravni

- Opredeljujemo se za kanoničke polarne koordinate tačke (u protivnom, odgovor nije jedinstven).
- Tada je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$y/x = \tan\theta$$

$$\theta = \arctan(y/x)$$

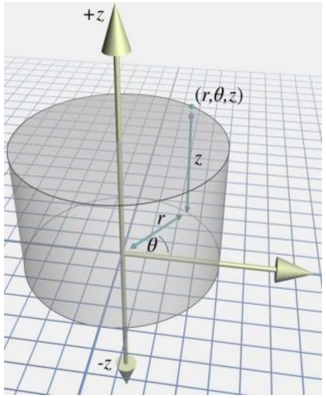
Transformacija pravouglih koordinata u polarne koordinate

- Za $x = 0$, deljenje nije definisano.
- Vrednosti funkcije *arctg* su u intervalu (–90°, +90°).
- Korišćenjem vrednosti y/x umesto vrednosti x i y, ignorišemo korisnu informaciju.
  - U zavisnosti od znaka x i y, tačka sa koordinatama (x,y) nalazi se u jednom od četiri kvadranta. Deljenjem svodimo položaje na samo dva kvadranta.

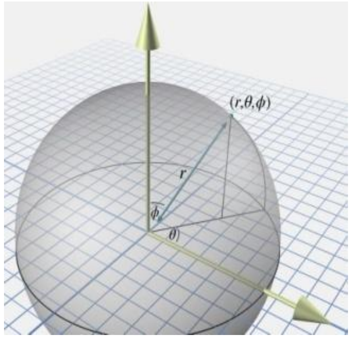
- Vodeći računa (i) o predznaku pravouglih koordinata (položaju tačke u koordinatnom sistemu), određujemo odgovarajuće polarne koordinate.

Polarne koordinate – uopštenje u 3D

Najčešće korišćena uopštenja polarnih koordinata u 3D prostoru su

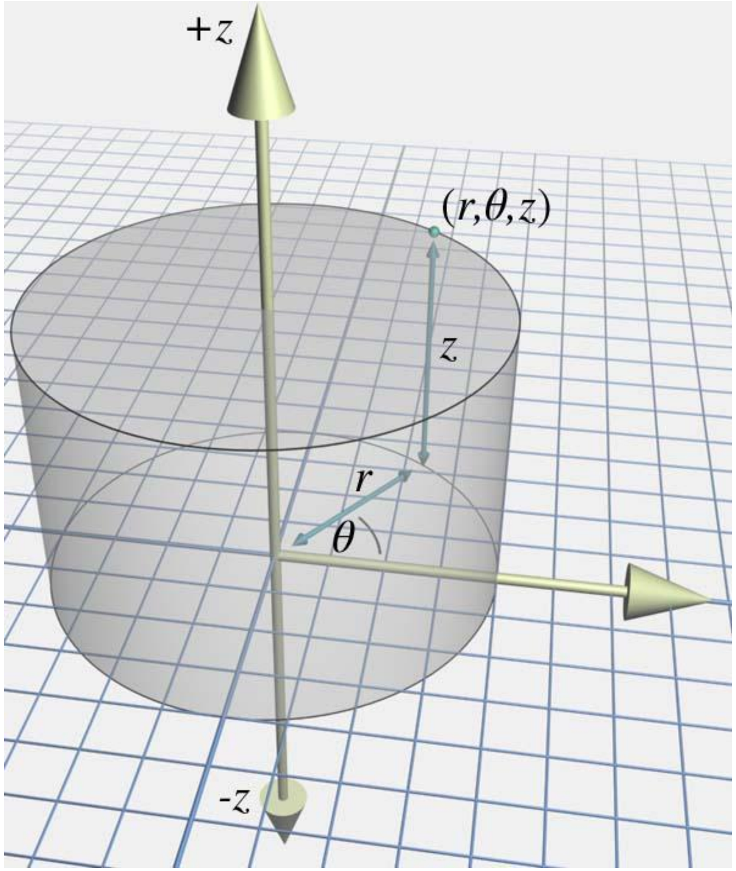


1. **Cilindrične** koordinate
   - Koriste 1 ugao i 2 rastojanja
2. **Sferne** koordinate
   - Koriste 2 ugla i 1 rastojanje



Cilindrične koordinate u 3D prostoru

Pozicija tačke opisana je cilindričnim koordinatama (r, θ, z) tako što r i θ imaju isto značenje kao kod polarnih koordinata, a z predstavlja (vertikalno) pomeranje u pravcu *z-ose*.



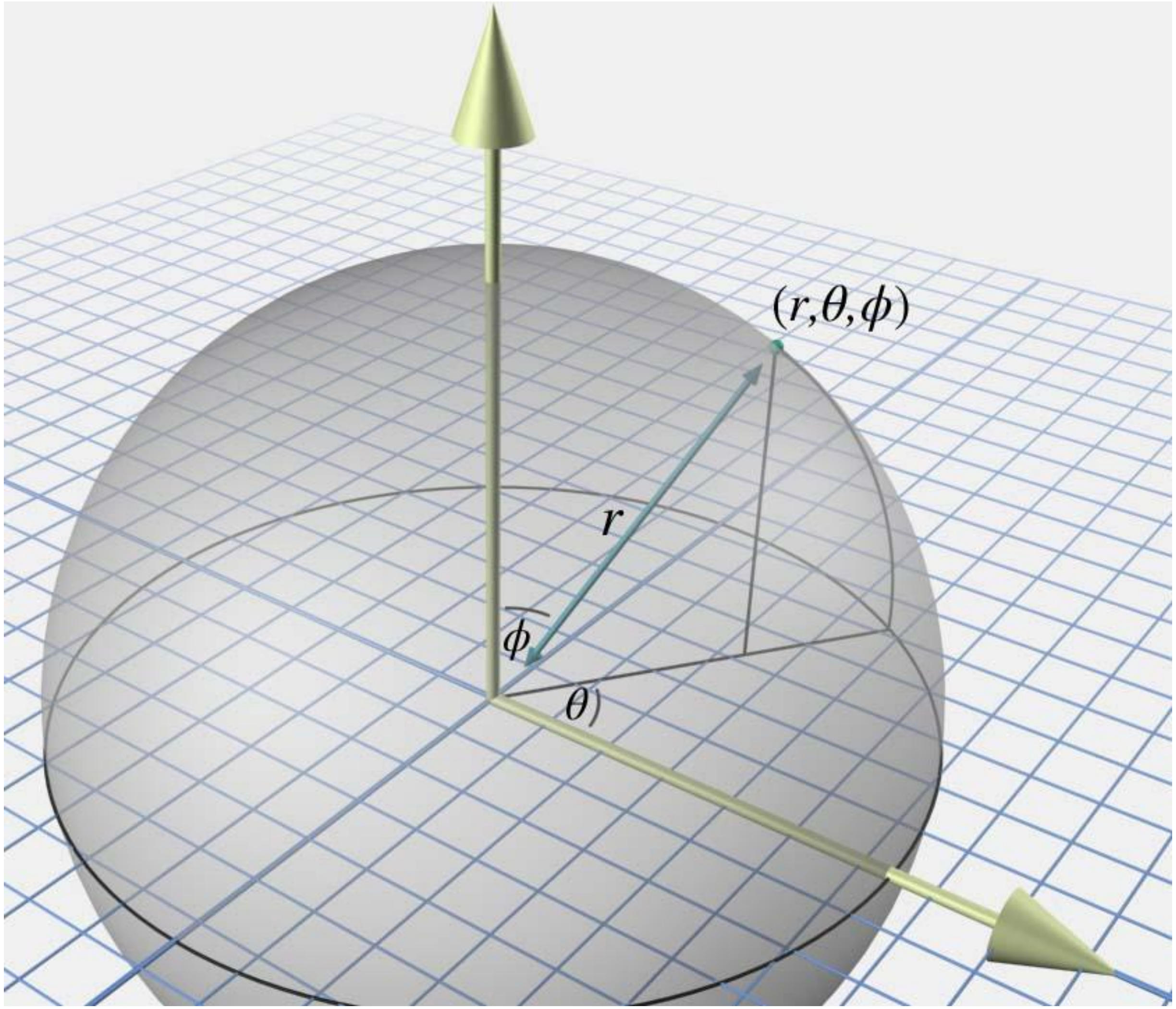
Sferne koordinate u 3D prostoru

- Sferne koordinate (kao i polarne i cilindrične) definišu položaj tačke u prostoru koristeći ugao i rastojanje.
- Sferne koordinate, međutim, položaj tačke opisuju pomoću pravca koji definišu **dva** ugla.
- Sferni koordinatni sistem ima dve polarne ose:
    1. Prva polarna osa je horizontalna i odgovara polarnoj osi 2D polarnog koordinatnog sistema, odnosno pozitivnom smeru *x*-ose u pravouglom koordinatnom sistemu;
    2. Druga polarna osa je vertikalna i odgovara pozitivnom smeru *z*-ose u pravouglom koordinatnom sistemu.

Određivanje položaja tačke sa koordinatama (ρ, θ, ϕ)

1.Početni položaj je u koordinatnom početku, sa orijentacijom u smeru horizontalne polarne ose. Vertikalna polarna osa usmerena je direktno naviše.
2.Sledi rotacija u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu za ugao θ.
3.U ovoj poziciji posmatramo rotaciju vertikalne polarne ose-poluprave sa osnovnim položajem naviše. Rotiramo je za ugao (određen veličinom i smerom) ϕ.
4.Vertikalna osa je ovako dovedena u položaj određen uglovima θ, ϕ.
5.Na ovom pravcu određujemo tačku na rastojanju ρ od koordinatnog početka. Dobijena tačka ima sferne koordinate (ρ,θ,ϕ).

Napomena:
Umesto r koristimo
oznaku ρ
za radijalno rastojanje
kod sfernih koordinata



Višeznačnost sfernih koordinata (Aliasing)

- Očigledan način da se dobiju različite sferne koordinate iste tačke 3D prostora je da se uglovima dodaju celobrojni umnošci od 360°.

- Postoje još dva “izvora” višeznačnosti. Oni su posledica međusobne zavisnosti koordinata.

Višeznačnost i singulariteti

- Kao i u 2D, višeznačnost sfernih koordinata može nastati i kao posledica promene predznaka radijalnog rastojanja i korišćenja odgovarajućeg ugla.
- **Singularitet** (kao i u 2D) postoji u koordinatnom početku: ako je radijalno rastojanje jednako nuli, vrednosti oba ugla su irelevantne.

Višeznačnost i singulariteti

- Ne samo da postoje različite vrednosti pojedinačnih koordinata koje odgovaraju uglovima, a koje opisuju poziciju iste tačke – postoje i različite **kombinacije** uglova koje opisuju poziciju iste tačke.

  Primer: (ρ,θ,φ) i $(\rho, \theta+180°, 360°-\varphi)$ označavaju položaj iste tačke.

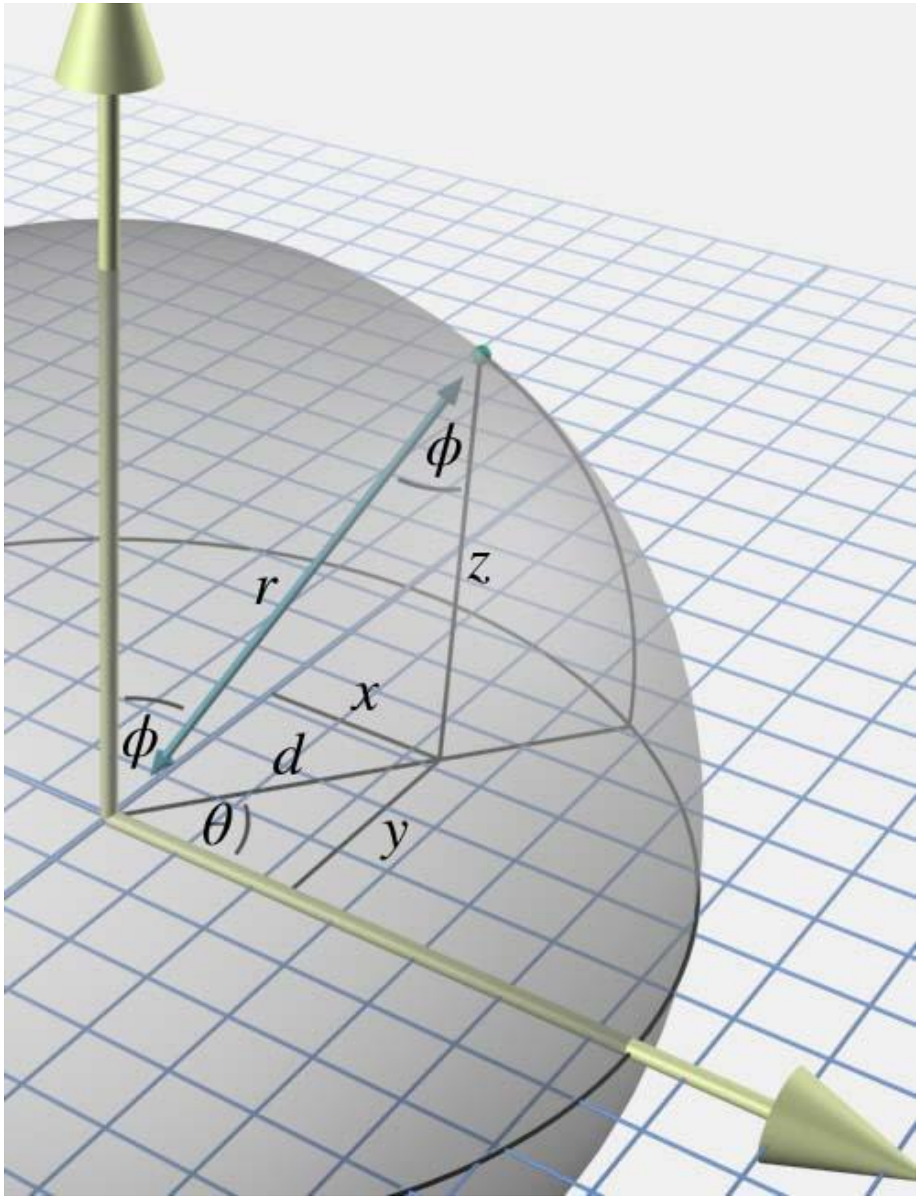
- Singularitet nastaje kada je $\varphi = 0$. Orijentacija koja je ovim opisana je vertikalna (naviše ili naniže). Vrednost ugla θ je irelevantna.

Kanonički oblik sfernih koordinata

- Postavljanjem ograničenja na vrednosti koordinata definišemo kanoničke sferne koordinate, za koje važi da su u jednoznačno određene za svaku tačku 3D prostora:

   1. Ugao φ pripada intervalu $[0, \pi]$.
   2. Ako je $\varphi=0$ ili $\varphi=\pi$, smatramo da je $\theta=0$.
   3. Ako je $\rho=0$, smatramo da je $\theta=0$ i $\varphi=0$.

Napomena:
Umesto *d* koristimo *r*
Umesto *r* koristimo ρ

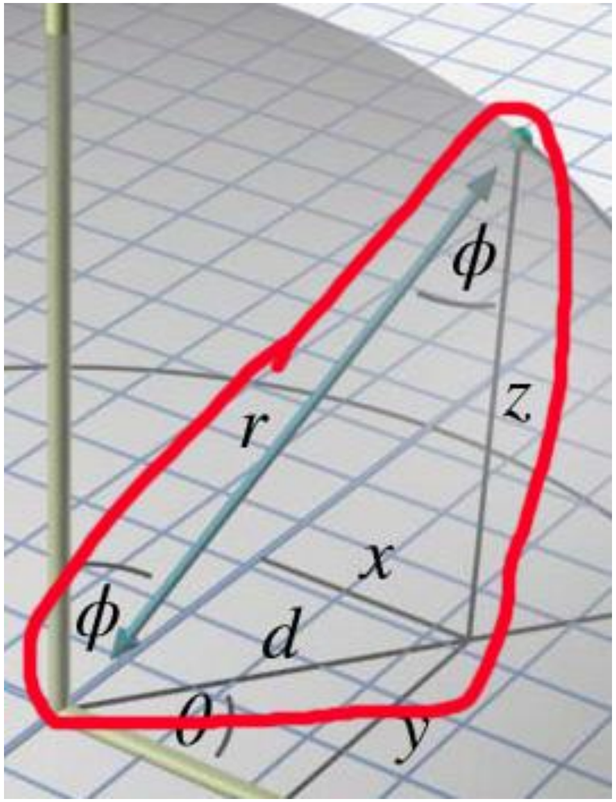


Izračunavamo *z*

Iz pravouglog trougla sa hipotenuzom ρ (na slici označena sa *r*) i katetama *r* (na slici d) i *z*, zaključujemo da je $z/\rho = \cos \phi$, odnosno

$z = \rho\cos \phi$.

Takođe, $r = \rho\sin\phi$



Izračunavamo *x* i *y*

- U horizontalnoj (xy-) ravni posmatramo polarne koordinate.
- Radijalno rastojanje je označeno sa *r*.

- Tada je $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

Veza između sfernih i pravouglih koordinata

Sferne koordinate tačke (x,y,z) su definisane jednačinama

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

za $\rho \geq 0$,

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \phi \leq \pi$

Sferne koordinate (ρ,θ,φ) koje odgovaraju pravouglim koordinatama (*x*,*y*,*z*)

- Za slučaj kada je *(x,y,z) ≠(0,0,0),* dobijamo

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Ugao θ računamo na isti način kao u slučaju 2D polarnih koordinata, koristeći da je $\frac{y}{x} = tg\,\theta$

- Koristimo informaciju o predznaku koordinata *x* i *y*, pri određivanju vrednosti ugla θ.
- Konačno, iz jednačine $\frac{z}{\rho} = \cos\phi$ dobijamo vrednost ugla ϕ.