Transformacija baze vektorskog prostora

Matematika za inženjersku grafiku

Zapažanja:

- (Linearna) transformacija postoji nezavisno od matrice kojom je prikazana.
- Ako je linearna transformacija prikazana matricom, podrazumeva se da smo se opredelili za bazu polaznog, i rezultujućeg, vektorskog prostora – kolone matrice su transformisani vektori polaznog prostora, izraženi u bazi drugog prostora.
- Dakle, jednu istu linearnu transformaciju možemo prikazati različitim matricama – svakom izboru baze prostora odgovara jedna matrica.
- **Promena izbora baze menja matricu linearne transformacije, iako ne menja samu transfomaciju!**

Pitanje:

Ako se ista linearna transformacija može prikazati pomoću više različitih matrica, prirodno je očekivati da među tim matricama postoji neka veza.

Dakle, pitanjeje:

Kakva veza postoji između različitih matrica koje realizuju istu linearnu transformaciju (u odnosu na različite baze prostora)?

Motivacija… ili zapažanje ☺

Ukoliko smo u mogućnosti da imamo na raspolaganju sve različite matrice koje realizuju istu transformaciju, odnosno da znamo kakva veza postoji među tim matricama i kako da neke od njih generišemo polazeći od nekih drugih, to znači da smo u prilici da **biramo pogodne matrice transformacija**, umesto nekih manje pogodnih.

Uočimo da možemo reći i da možemo da biramo – ili, da menjamo – bazu vektorskog prostora.

Kako se menja matrica transformacije pri promeni baze vektorskog prostora?

Posmatrajmo vektorski prostor V i linearnu transformaciju $T: V \to V$.

Posmatrajmo dve različite baze vektorskog prostora V:

$B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ i $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$.

Neka $[T]_B$ označava matricu transformacije T u odnosu na bazu ***B***.

Neka $[T]_C$ označava matricu transformacije T u odnosu na bazu ***C***.

Dalje, označimo sa: V_B posmatrani vektorski prostor, sa bazom ***B***;

V_C posmatrani vektorski prostor, sa bazom ***C***.

Dakle, u prostoru V_B koristimo matricu $[T]_B$ da prikažemo $T: V_B \to V_B$.

u prostoru V_C koristimo matricu $[T]_C$ da prikažemo $T: V_C \to V_C$.

Svaka od matrica transformacija se formira tako što njene kolone odredimo
Kao slike vektora baze, $T(b_1), T(b_2), ..., T(b_n),$ odnosno $T(c_1), T(c_2), ..., T(c_n).$

Dakle: $[T]_B = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(b_1)_B & T(b_2)_B & \cdots & T(b_n)_B \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix},$ $[T]_C = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ T(c_1)_C & T(c_2)_C & \cdots & T(c_n)_C \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}.$

Šema posmatranih transformacija:
$\boldsymbol{T}$ – posmatrana transformacija
$\boldsymbol{I}$ – identičko preslikavanje, $I(v) = [I] \cdot v = v$

$$\begin{array}{ccc} V_B & \xrightarrow{T} & V_B \\ \uparrow I & & \downarrow I \\ V_C & \xrightarrow{T} & V_C \end{array}$$

Posmatramo:

$I : V_B \to V_C$ $\quad$ $I : V_C \to V_B$
$I(v) = v$ $\quad$ $I(v) = v$

Ovo su identička preslikavanja, jer ne menjaju vektore, već samo način njihovog zapisivanja.

Za svaki vektor $v \in V$ je $T(v) = I \circ T \circ I(v)$.

Ako navedenu kompoziciju transformacija realizujemo kao proizvod odgovarajućih matrica transformacija, vodeći računa o tome da koristimo različite baze prostora, dobijamo:

$$[T]_C = [I]_{BC} \cdot [T]_B \cdot [I]_{CB}$$

pri čemu je

$[I]_{BC}$ - matrica prelaska sa baze ***B*** na bazu ***C;***

$[I]_{CB}$ - matrica prelaska sa baze ***C*** na bazu ***B.***

Kolone matrice $[I]_{BC}$ su vektori baze B (transformisani identičkim preslikavanjem), izraženi kao lin. kombinacija baze C.

Kolone matrice $[I]_{CB}$ su vektori baze C (transformisani identičkim preslikavanjem), izraženi kao lin. kombinacija baze B.

To znači da su matrice prelaska sa jedne baze prostora na drugu sledećeg oblika:

$$[I]_{BC} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ [b_1]_c & [b_2]_C & \cdots & [b_n]_c \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}, \qquad [I]_{CB} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ [c_1]_B & [c_2]_B & \cdots & [c_n]_B \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}.$$

Kao što smo već napomenuli, svaka od prethodnih matrica je matrica identičkog preslikavanja i, kao takva, očuvava svaki vektor prostora. Međutim, kako je

$$I_{CB} \circ I_{BC} = I_{BC} \circ I_{CB} = I,$$
$$[I_{CB}] = [I_{BC}]^{-1}$$

zaključujemo da su ove matrice jedna drugoj inverzne.

Uočimo da su matrice transformacija uvek invertibilne, što je posledica činjenice da su im kolone linearno nezavisne.
Dakle, baza prostora se uvek preslikava u (neku drugu) bazu tog prostora.

Ukoliko dve matrice, [A] i [B], predstavljaju istu transformaciju $T : V \to V$, onda važi da je

$$[A] = [P]^{-1} \cdot [B] \cdot [P]$$

za neku matricu [P].

Takođe, kada za dve matrice [A] i [B] postoji matrica [P] takva da je

$[A] = [P]^{-1} \cdot [B] \cdot [P]$, onda [A] i [B] predstavljaju istu transformaciju.

Matrice [P] i $[P]^{-1}$ predstavljaju matrice transformacija dveju baza prostora V, onih u odnosu na koje su definisane matrice [A] i [B].

Slične matrice

- Matrice A i B, za koje postoji (regularna) matrica Q takva da je $B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ kažemo da su **slične**. To zapisujemo: A~B.
- Sličnost matrica je **relacija ekvivalencije**:
  - A~A jer je $A = I^{-1} \cdot A \cdot I$
  - A~B implicira B~A, jer je

$$A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$$
$$Q \cdot A \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^{-1} \cdot B \cdot Q \cdot Q^{-1}$$
$$Q \cdot A \cdot Q^{-1} = B$$

  - A~B i B~C implicira A~C, jer

$$\left.\begin{array}{l} A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q \\ B = R^{-1} \cdot C \cdot R \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A = Q^{-1} \cdot (R^{-1} \cdot C \cdot R) \cdot Q = (Q^{-1} \cdot R^{-1}) \cdot C \cdot (R \cdot Q)$$
$$= (R \cdot Q)^{-1} \cdot C \cdot (R \cdot Q) = K^{-1} \cdot C \cdot K$$

Sličnost matrica

- Dakle, relacija ~ sličnosti u skupu matrica, kao relacija ekvivalencije, vrši particiju skupa matrica na klase ekvivalencije. Klasi ekvivalencije pripadaju sve matrice koje realizuju istu linearnu transformaciju.
- Izučavanje transformacija i njihovih značajnih svojstava se sada može svesti na ispitivanja osobina koje su zajedničke svim međusobno sličnim matricama. Kažemo još da su to osobine koje su **invarijante za transformacije sličnosti**.

Sličnost matrica i izbor matrice linearne transformacije

- S obzirom da više različitih matrica realizuje istu geometrijsku transformaciju, i da imamo mogućnost da lako pređemo sa jedne takve matrice na drugu, otvara se mogućnost da sami biramo bazu prostora u kojoj želimo da radimo.
- Dakle, bez obzira na to koja je "zadata" baza prostora koji transformišemo, možemo odgovarajućom matricom prelaza preći na, recimo, standardnu bazu, i nastaviti rad.
- Takođe je interesantno ispitati da li mogu da pređem na neku matricu (bazu) "zgodnu" za rad (dakle, da biram ono što je pogodno, a ne obavezno ono na šta sam "navikla"!)

Sličnost matrica i izbor matrice linearne transformacije

- Ukoliko matricama izražavamo linearne transformacije, često je potrebno da množimo i invertujemo te matrice. U takvim situacijama najzgodnije je raditi sa **dijagonalnim** matricama.
- Dakle, korisno je znati kako odrediti dijagonalnu matricu sličnu datoj matrici, ukoliko takva matrica postoji.
- Ako je A data matrica, a D dijagonalna matrica

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

potrebno je odrediti matricu Q takvu da je

$$A = Q^{-1} \cdot D \cdot Q$$

Ovim ćemo se pozabaviti nakon što uradimo nekoliko primera.

Primer 1

Data je baza $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ vektorskog prostora $V \equiv R^3$.

Dat je vektor v čije su koordinate u strandardnoj bazi $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix}$.
Odrediti koordinate vektora v u bazi B.

Rešenje: Da bismo rešili zadatak, iskoristićemo matricu prelaza sa jedne baze na drugu. Naravno, zadatak se može rešiti i na druge načine!

$[I]_{SB}$ je matrica prelaza sa standardne baze na bazu B. Njene kolone sadrže vektore standardne baze izražene u bazi B.

Primer 1 - nastavak

$[I]_{BS}$ je matrica prelaza sa baze B na standardnu bazu. Njene kolone sadrže vektore baze B izražene u standardnoj bazi.

Dakle

$$[I]_{BS} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

i pri tome je $[I]_{BS} \cdot [v]_B = [v]_S \quad \Rightarrow \quad [v]_B = [I]_{BS}^{-1} \cdot [v]_S = [I]_{SB} \cdot [v]_S$

Dakle,

$$[I]_{BS}^{-1} = [I]_{SB} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odatle je

$$[v]_B = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Primer 2

Neka je $T : R^3 \to R^3$ linearna transformacija koja projektuje vekore prostora na ravan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ paralelno vektoru $(1,1,2)$. Odrediti matricu ove transformacije u odnosu na standardnu bazu.

Rešenje: Odredićemo prvo matricu transformacije u pogodno izabranoj bazi prostora R^3, a zatim iskoristiti matricu prelaza sa te baze na standardnu bazu.

Izabraćemo, prvo, pogodnu bazu, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, tako da je $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, odnosno, dati vektor pravca projekcije, a vektori b_2, b_3 su proizvoljno izabrani vektori ravni $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ na koju projektujemo. Lako je proveriti da su tako izabrana tri vektora nekoplanarna, pa predstavljaju bazu posmatranog prostora.

Primer 2 - nastavak

Izaberimo, na primer, vektore $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ iz ravni $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (lako je proveriti da pripadaju ravni).

Transformisani vektori baze *B*, izraženi u istoj toj bazi *B*, su:

$$T(b_1) = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(b_2) = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(b_3) = b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pa je matrica transformacije, čije su kolone transformisani vektori baze

$$[T]_B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(b_1)_B & T(b_2)_B & T(b_3)_B \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 2 - nastavak

Sledeći korak podrazumeva da "promenimo" bazu, za šta je potrebno da formiramo odgovarajuću matricu prelaza iz baze *B* u standardnu bazu *S*. Ta matrica sadrži vektore baze B sa koordinatama datim u standardnoj bazi:

$$[I]_{BS} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odmah određujemo i inverznu matricu navedene matrice prelaza:

$$[I]_{BS}^{-1} = [I]_{SB} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Primer 2 - nastavak

Sada je $[T]_S = [I]_{BS} \cdot [T]_B \cdot [I]_{SB} = [I]_{BS} \cdot [T]_B \cdot [I]_{BS}^{-1}$

odnosno,

$$[T]_S = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

što je **tražena matrica transformacije** (projekcije na datu ravan, u datom pravcu) **u standardnoj bazi**.

Dakle, i “ulaz” i “izlaz” za ovu transformaciju predstavljaju koordinate vektora date u standardnoj bazi, a preslikavanje se realizuje množenjem vektora navedenom matricom.

Matricu je bilo jednostavnije generisati koristeći drugu, pogodniju, bazu i matrice prelaza, nego određujući koordinate slika vektora standardne baze pri navedenom projektovanju na datu ravan u datom pravcu.

Primer 3

Posmatrajmo, kao i u prethodnom primeru, ravan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

i pravac $(1,1,2)$. Posmatrajmo transformaciju koja skraćuje vektore u ravni na polovinu njihove dužine, a izdužuje 5 puta vektore u pravcu datog vektora $(1,1,2)$.

Potrebno je da odredimo matricu ove transfomacije u standardnoj bazi.

Rešenje:

Zadatak ćemo i u ovom slučaju rešiti korišćenjem pogodno izabrane baze i matrica prelaska sa odabrane baze na standrdnu, i obrnuto.

Primer 3 - nastavak

Uočimo da za posmatranu transformaciju važi:

$T(v)=\frac{1}{2}v,$ ako v pripada datoj ravni,

$T(v)=5v,$ ako v pripada datom pravcu.

Zaključujemo da su ovim identifikovani **karakteristični koreni i karakteristični vektori** transformacije (tj., matrice transformacije):

- karakteristični koreni su $5, \frac{1}{2}$;
- karakteristični vektori su oni koji pripadaju ravni i pravcu.

Posmatramo istu bazu $B=\{b_1, b_2, b_3\}$, kao i u prethodnom primeru, i određujemo koordinate transformisanih vektora baze (određene u istoj bazi B).

Primer 3 - nastavak

Dobijamo:

$$T(b_1) = 5b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(b_2) = \frac{1}{2} b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(b_3) = \frac{1}{2} b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Matrica transformacije (za bazu *B)* je, dakle,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} | & | & | \\ T(b_1)_B & T(b_2)_B & T(b_3)_B \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je ovo dijagonalna matrica, i zato izuzetno pogodna kao matrica transformacije!

Primer 3 - nastavak

Matrice prelaska sa posmatrane baze na standardnu, i obrnuto, smo već odredili u prethodnom primeru:

$$[I]_{BS} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad [I]_{BS}^{-1} = [I]_{SB} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, sada je: $[T]_S = [I]_{BS} \cdot [T]_B \cdot [I]_{SB} = [I]_{BS} \cdot [T]_B \cdot [I]_{BS}^{-1}$

$$[T]_S = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 13 & 9 & 9 \\ 9 & 13 & 9 \\ 18 & 18 & 22 \end{bmatrix}.$$

Važna zapažanja

- Uočili smo da je matrica transformacije koju smo generisali u prethodnom primeru dijagonalna matrica. Za takve matrice smo već komentarisali da su pogodne za rad, jer se lako množe i invertuju.
- Pitanja koje smo već postavili, a još uvek su bez odgovora, su:
  - **Da li možemo uvek (za svaku transformaciju) da odaberemo matricu transformacije koja je dijagonalna?**
  - **Kako da odredimo elemente dijagonalne matrice transformacije?**
- Jasno je da pitanje izbora ove matrice u stvari predstavlja pitanje izbora odgovarajuće baze.
- Korišćenjem matrica prelaska sa jedne baze na drugu možemo "kombinovati" rad u standardnoj bazi sa drugom, pogodno odabranom, bazom.

Baza prostora za koju je matrica transfomacije dijagonalna matrica

Dakle, za datu matricu transfomacije A, želimo da odredimo njoj sličnu dijagonalnu matricu

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

što znači da treba da važi da je, za neku matricu $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$

zadovoljeno $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$.

Tada je $A \cdot Q = Q \cdot D$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Baza prostora za koju je matrica transfomacije dijagonalna matrica

Dakle, važi da je

$$A\cdot\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 q_{11} & \lambda_2 q_{12} & \cdots & \lambda_n q_{1n} \\ \lambda_1 q_{21} & \lambda_2 q_{22} & \cdots & \lambda_n q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 q_{n1} & \lambda_2 q_{n2} & \cdots & \lambda_n q_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ A\cdot Q_1 & A\cdot Q_2 & \cdots & A\cdot Q_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \lambda_1 Q_1 & \lambda_2 Q_2 & \cdots & \lambda_n Q_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

a to znači da je $A\cdot Q_i = \lambda_i Q_i$

odnosno da su **na dijagonali matrice *D* karakteristični koreni matrice transformacije *A*, a da su kolone matrice *Q* karakteristični vektori transformacije *A*.**

Uočimo da karakteristični vektori (pravci)transformacije ostaju očuvani (invarijantni su) pri transformaciji *A*.

Baza prostora za koju je matrica transfomacije dijagonalna matrica

Dakle, za datu matricu transformacije A u odnosu na standardnu bazu S možemo odrediti **dijagonalnu matricu transformacije** D i njoj odgovarajuću bazu B tako što:

1. Odredimo karakteristične korene i vektore matrice (transformacije) A;
2. Formiramo matricu D tako što za elemente njene glavne dijagonale uzmemo karakteristične korene matrice A;
3. Odredimo elemente baze B kao karakteristične vektore (u istom poretku kao karakter. korene) matrice A;
4. Matrica prelaza iz baze B u standardnu bazu S sadrži karakteristične vektore matrice A;
5. Matrica prelaza iz baze S u bazu B je inverzna matrici prelaza iz B u S.
6. Odgovarajući matrični proizvod tri formirane matrice realizuje istu transformaciju kao i A; prednost korišćenja matrice D je u njenom pogodnom obliku.