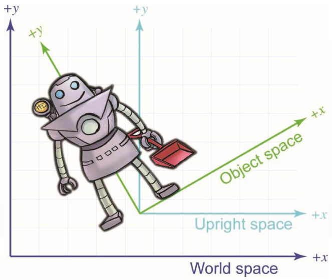
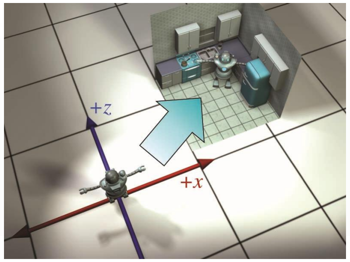
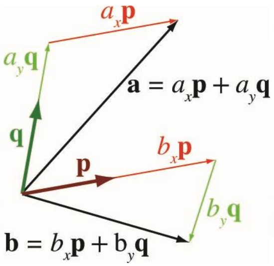






Različiti prostori i koordinatni sistemi

Odakle različiti koordinatni sistemi?

- Transformacije postoje, nezavisno od matričnih (algebarskih) reprezentacija.
- Matrične reprezentacije podrazumevaju izbor vektora baze, odnosno koordinatnog sistema i koordinata.
- Jednu transformaciju možemo prikazati pomoću različitih matrica, u zavisnosti od izbora baze.
- **U kakvoj su vezi matrice koje predstavljaju istu transformaciju?**

Zašto različiti koordinatni sistemi?

- Izborom odgovarajućeg koordinatnog sistema možemo pojednostaviti neka razmatranja i analize.

- Ponekad postoji i potreba za istovremenim razmatranjem više koordinatnih sistema.
- Ovo je uobičajena potreba i praksa u računarskoj grafici i animaciji.

Neki prostori koje posmatramo

- Univerzalni (globalni) prostor- World space
- Prostor objekta - Object space
- Prostor kamere - Camera space
- Uspravni prostor - Upright space

Svaki prostor ima svoj jedinstven koordinatni sistem. Potrebne su nam koordinate tačaka u različitim koordinatnim sistemima (prostorima).

Univerzalni prostor - World Space

- Univerzalni prostor je snabdeven globalnim koordinatnim sistemom.
- U ovom prostoru se nalaze svi objekti koje posmatramo i u njemu se određuju i prate sve pozicije i sva kretanja, u međusobnim odnosima.

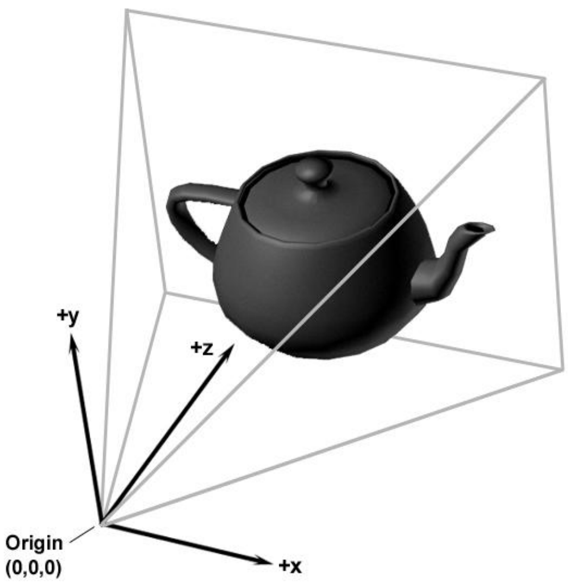
- Ovaj prostor je jedinstven.
- To je najveći prostor koji nas u datom trenutku interesuje.

Prostor objekta

Za svaki posmatrani objekat možemo definisati:
•njegovu lokaciju
•njemu odgovarajuće pravce “gore”, “desno”, “napred”.

•Ovim definišemo koordinatni sistem objekta (modela, tela).
•U ovom koordinatnom sistemu opisujemo i pratimo (lokalna) kretanja objekta.
•Najčešće posmatramo veći broj objekata, i njihovih prostora, istovremeno.

Prostor kamere



Prostor objekta – kamere (posmatrača).

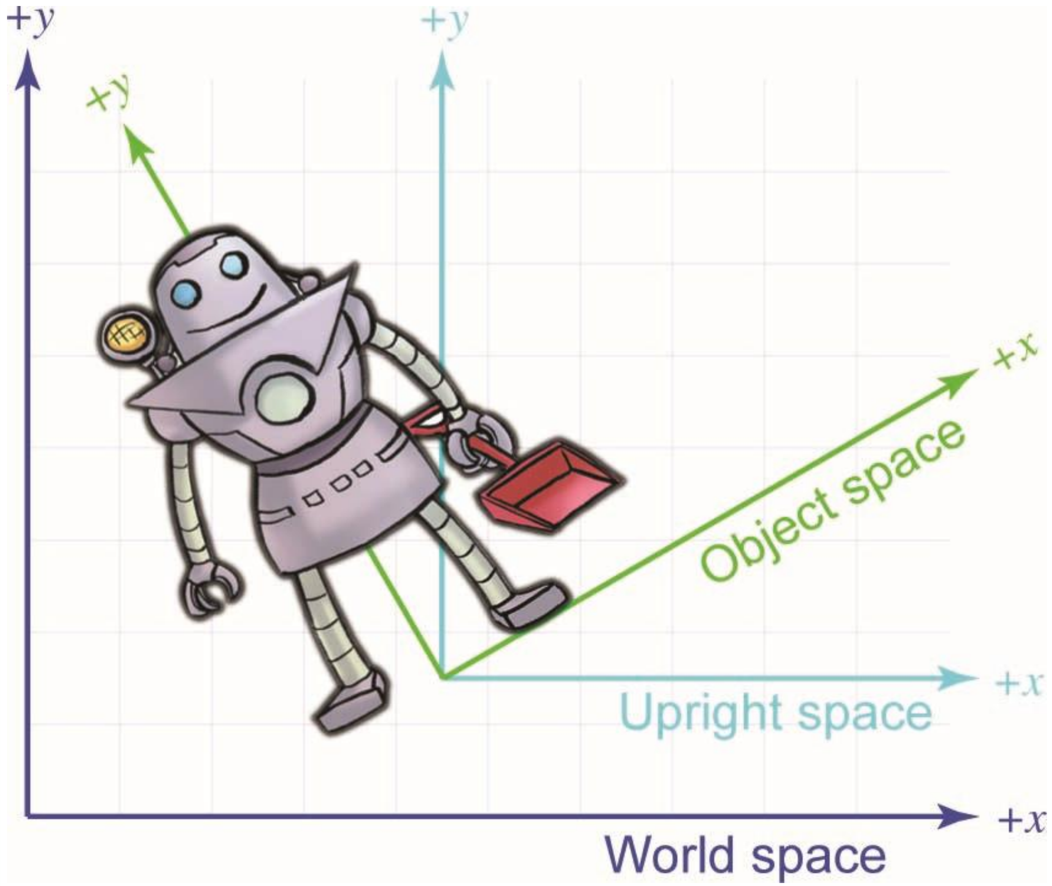
Koordinatni početak je lokacija kamere.
z-osa je usmerena ka ekranu (vidnom polju kamere).
y-osa je usmerena naviše u odnosu na kameru.

Uspravni prostor

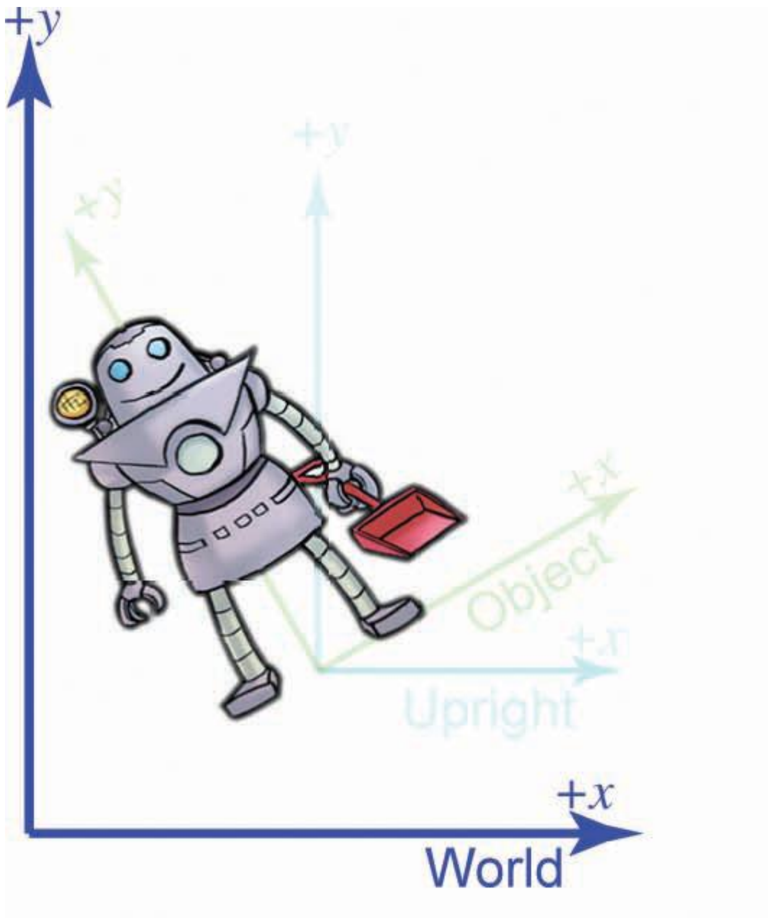
- Nestandardni prostor (za razliku od prethodna tri). Mnogi ga ne koriste.

- Uspravni prostor je “prelazni” između univerzalnog prostora i prostora objekta.
- Uspravni prostor ima
  - zajednički koordinatni početak sa prostorom objekta;
  - iste pravce koordinatnih osa kao univerzalni prostor.

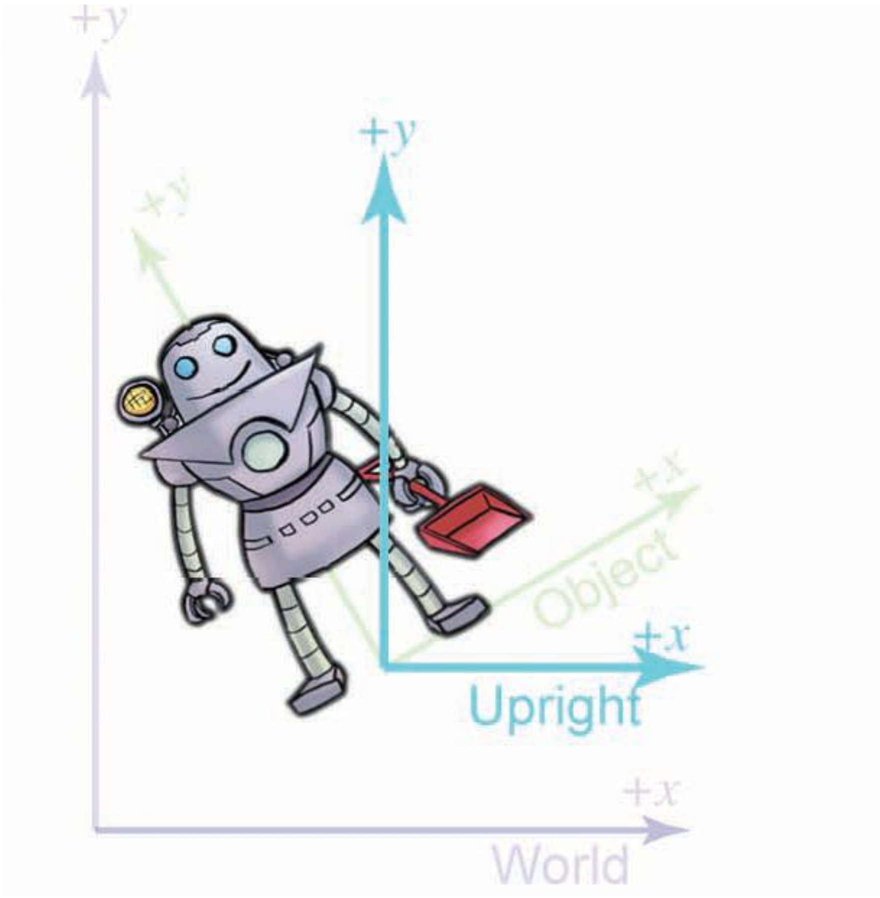
Prostor objekta, uspravni i globalni prostor



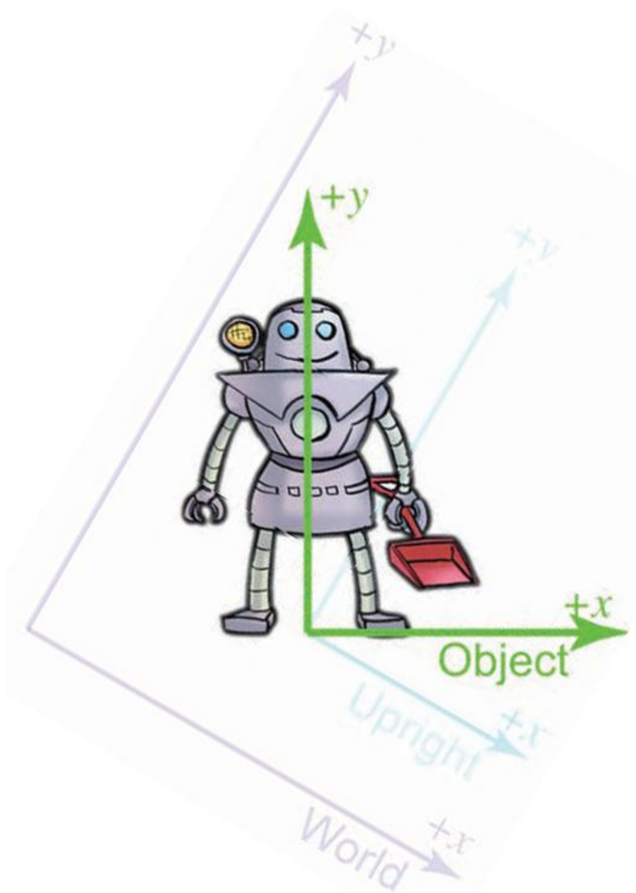
Robot u univerzalnom prostoru



Robot u (odgovarajućem) uspravnom prostoru



Prostor objekta - robota



Zašto uspravni prostor?

- Uspravni prostor se
  - translacijom dovodi u položaj globalnog prostora;
  - rotacijom dovodi u položaj prostora objekta.

- Korišćenje uspravnog prostora omogućava da se **transformacija prostora objekta u globalni prostor** realizuje kao kompozicija dve elementarne transformacije: jedne rotacije i jedne translacije.

Transformacije koordinatnih sistema

•Često su nam poznati podaci koji se odnose na samo jedan koordinatni sistem.
•Ponekad je u jednom koordinatnom sistemu mnogo jednostavnije formulisati problem i doći do rešenja, nego u drugom, a rešenje nam je potrebno u drugom koordinatnom sistemu.

•Kada radimo sa više objekata koji su definisani u svojim prostorima i odgovarajućim koordinatnim sistemima, najčešće je potrebno "smestiti ih" u jedan zajednički globalni prostor i prikazati koordinatama u globalnom koordinatnom sistemu.
• Na taj način dovodimo u međusobnu vezu nezavisne koordinate posmatranih objekata.

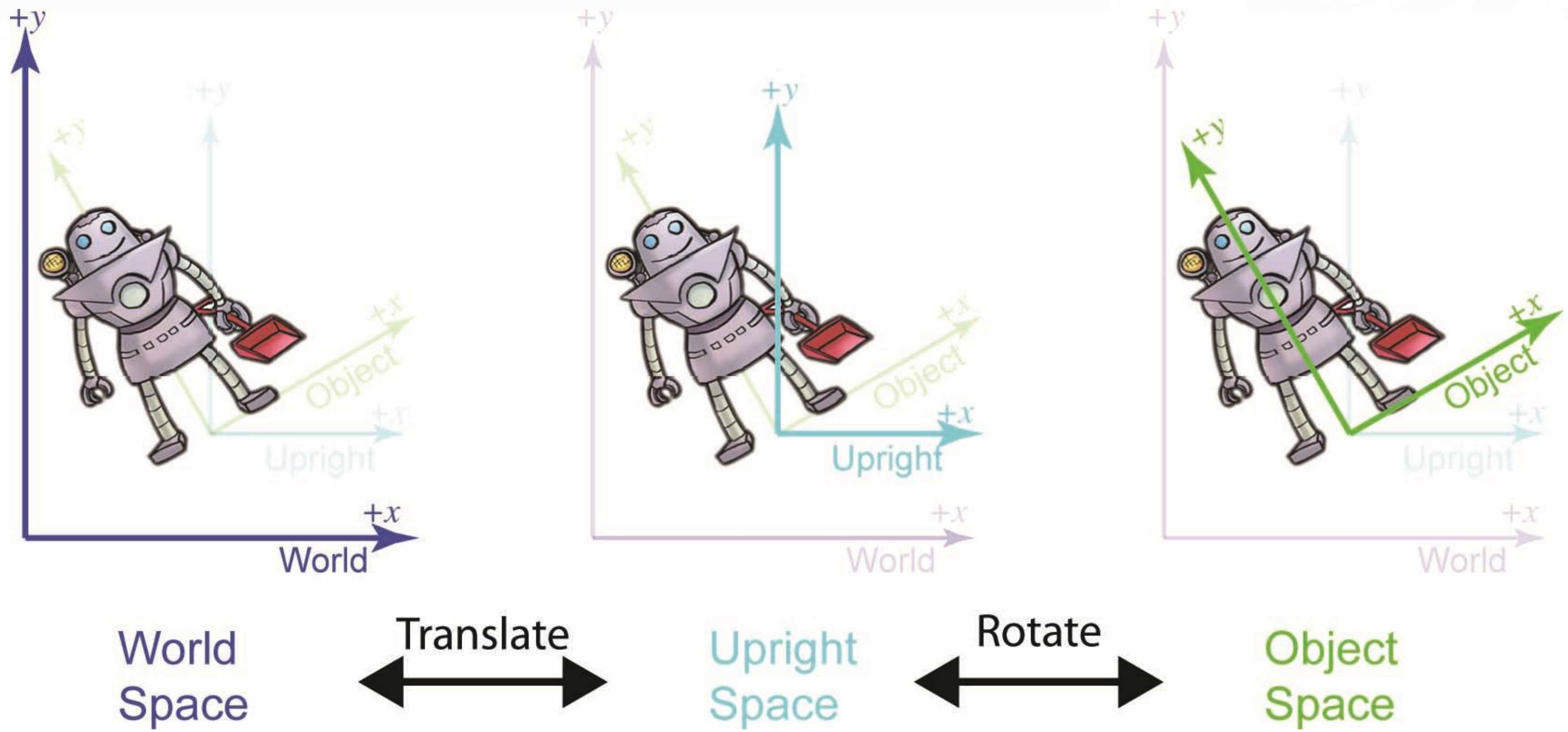
Transformacije koordinatnih sistema

•Jedna mogućnost da transformaciju posmatramo kao kretanje objekata u nepokretnom koordinatnom sistemu. Promena koordinata ne menja koordinatni sistem, nego menja položaj objekta. Ovo je **aktivna** transformacija.
•Druga mogućnost je da promenu položaja objekta interpretiramo kao transformaciju koordinatnog sistema. Objekat je nepokretan, a promena koordinata podrazumeva da smo promenili položaj koordinatnog sistema. Ovo je **pasivna** transformacija.
•Transformacija objekta ima isti efekat na njegove koordinate kao i suprotna transformacija koordinatnog sistema.
•Oba pristupa se koriste.

Transformacije koordinatnih sistema

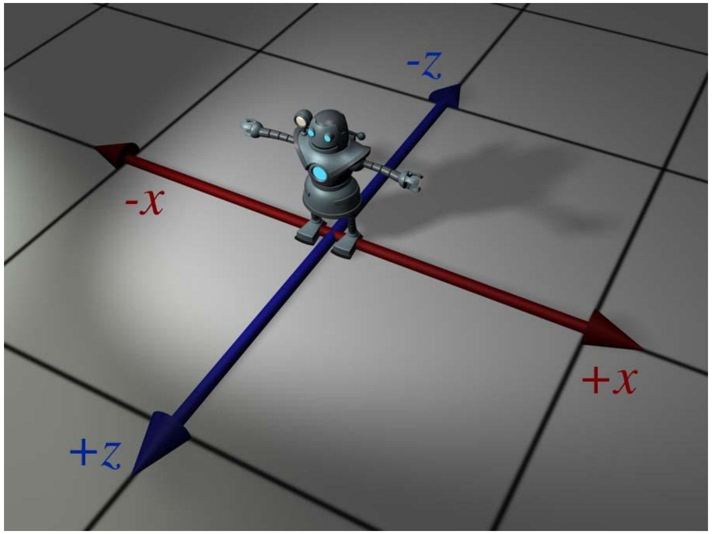
Najvažnije i najčešće korišćene transformacije koje primenjujemo na koordinatni sistem su:

- Translacija
  - Menja se položaj koordinatnog sistema.
  - Koordinatni početak ima novu lokaciju.
- Rotacija
  - Menja se orijentacija koordinatnog sistema.
  - Koordinatne ose imaju nove pravce.


+y
+x
World
Upright
Object
World Space
Translate
Upright Space
Rotate
Object Space

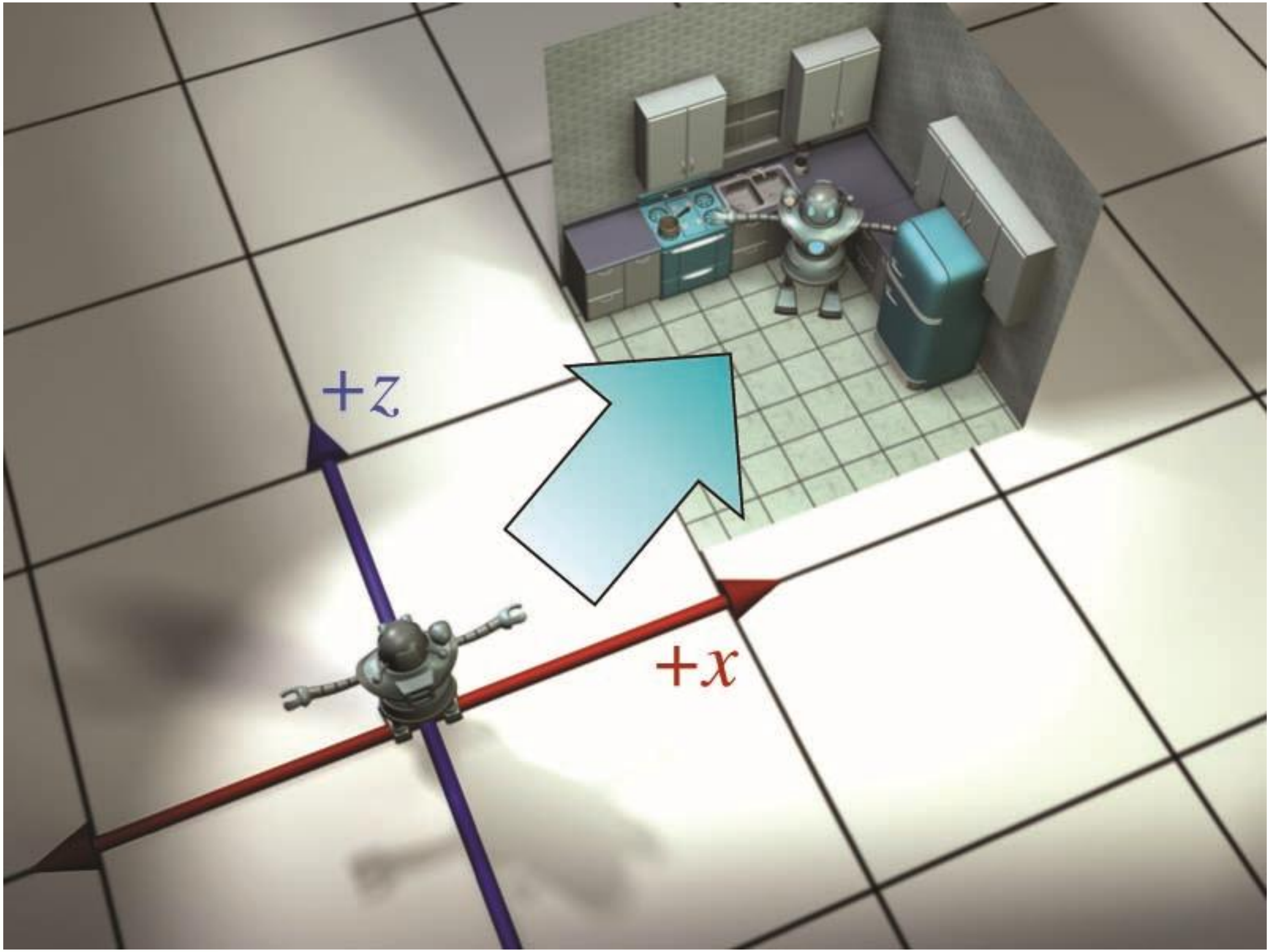
Primer

•Posmatramo objekat koji je u svom koordinatnom sistemu, u osnovnoj poziciji.
•Postavimo koordinatni sistem objekta tako da se poklapa sa globalnim koordinatnim sistemom. S obzirom da nemamo drugih objekata, ovo je prirodan izbor.
•U ovom slučaju, i uspravni koordinatni sistem je u istom položaju (po definiciji).



Prvi zadatak

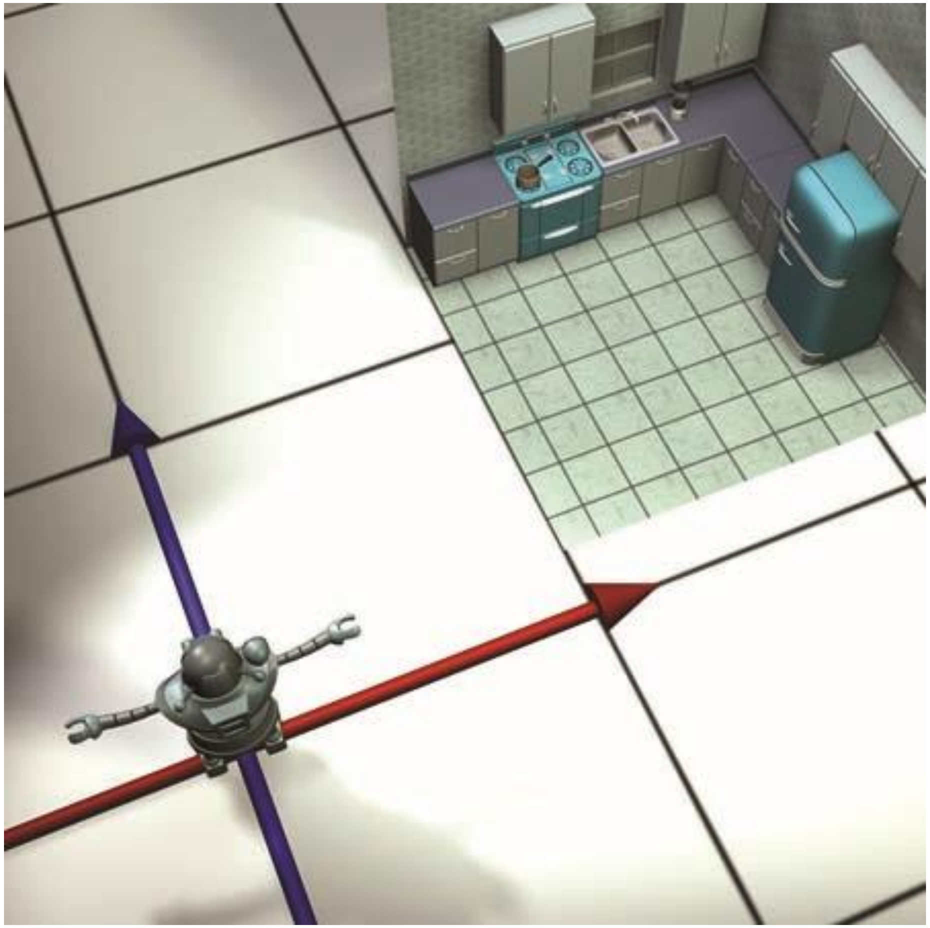
•Cilj nam je da utvrdimo kako transformišemo objekat iz posmatrane (polazne) pozicije u neku novu poziciju u (globalnom) prostoru.
•U posmatranom primeru, želimo da robot bude u zadatom delu globalnog prostora – modelu kuhinje.


+z
+x

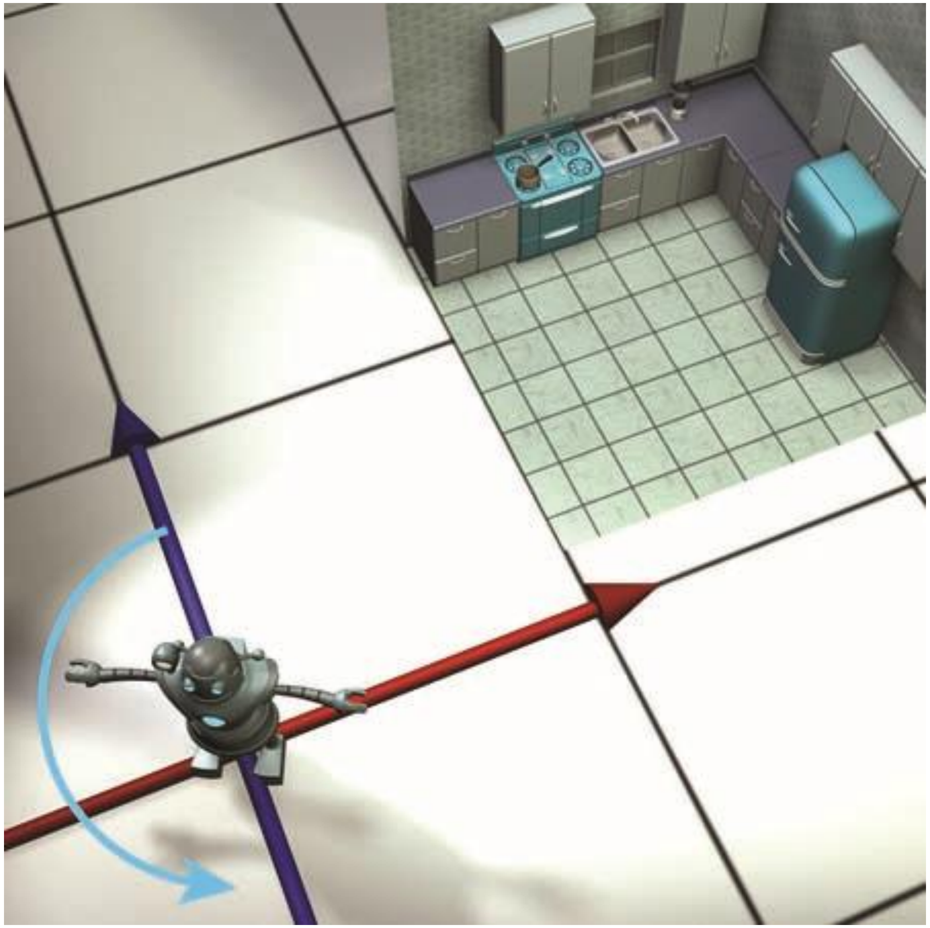
Realizacija prvog zadatka

- Utvrđujemo da je potrebno
    - rotirati objekat (u smeru kazaljke na satu za 120°),
    - zatim translirati objekat za određeno rastojanje
- S obzirom da se krećemo u globalnom koordinatnom sistemu, pomeranje opisujemo razlažući ga na pomeranje istočno, i pomeranje severno (ove odrednice su “apsolutne”).
- Ovo pomeranje prikazujemo vektorom (translacije) - ovde, npr., sa koordinatama [18, 0, 10].

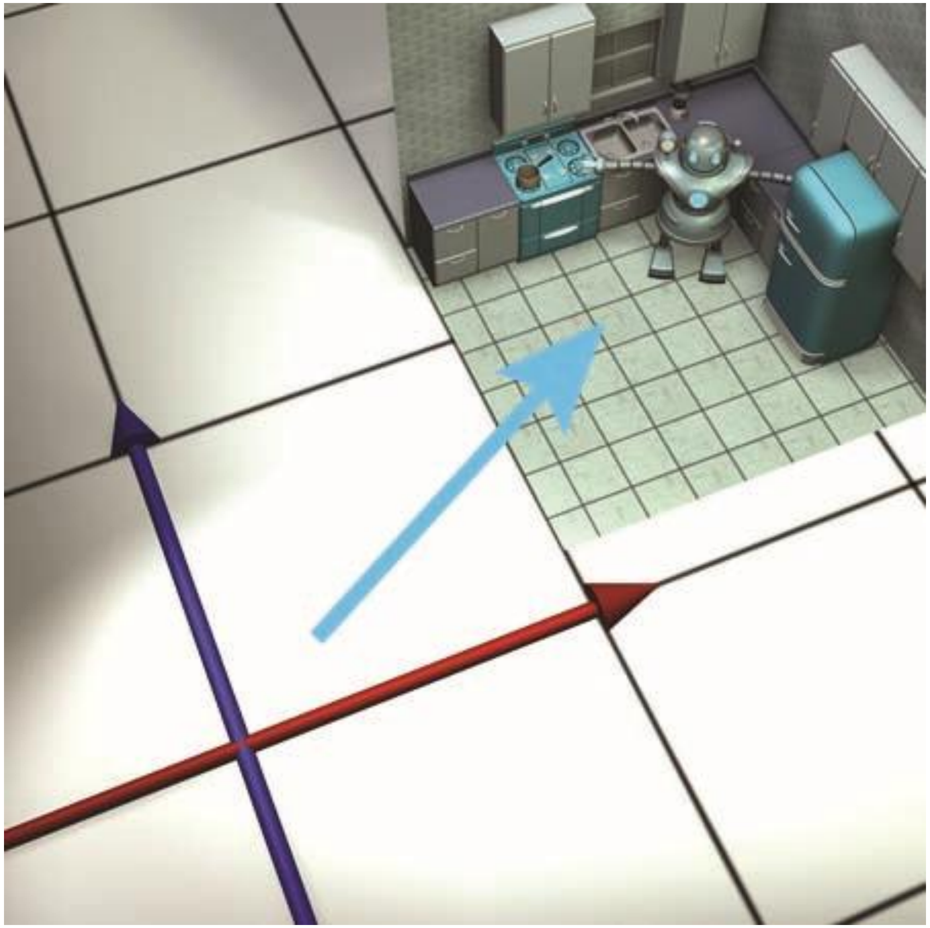
Polazna pozicija



Rotacija



...a zatim translacija



Rotacija pre translacije?

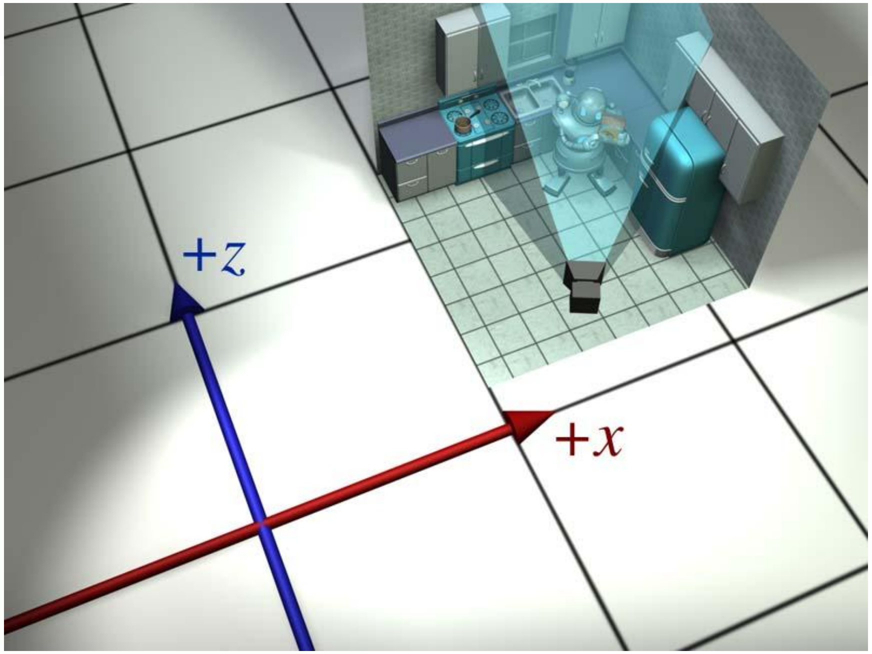
- Zašto rotiramo pre translacije, a ne obrnuto?
- Rotacija oko koordinatnog početka je jednostavnija nego rotacija oko proizvoljne tačke.
- Svaku rotaciju (uz pomoć translacije) svodimo na rotaciju oko koordinatnog početka.
- U ovom primeru imamo mogućnost da odmah rotiramo oko koordinatnog početka – to koristimo.

- Rotacija oko koordinatnog početka je linearna transformacija.
- Rotacija oko proizvoljne tačke je afina transformacija.

Prostor kamere

- Navedenim transformacijama smo postavili model robota na željeno mesto u globalnom prostoru.
- Da bismo ga prikazali na ekranu, što nam je krajnji cilj, potrebno je da ga transformišemo u prostor kamere.
- Dakle, potrebne su nam koordinate (tačaka) objekta izražene (relativno) u odnosu na položaj kamere.

- Na primer, ako je neka tačka objekta (robota) na rastojanju 9 ispred kamere i na rastojanju 3 desno od kamere, to ćemo zapisati navodeći da su *z* i *x* koordinate temena u prostoru kamere, redom, 9 i 3.



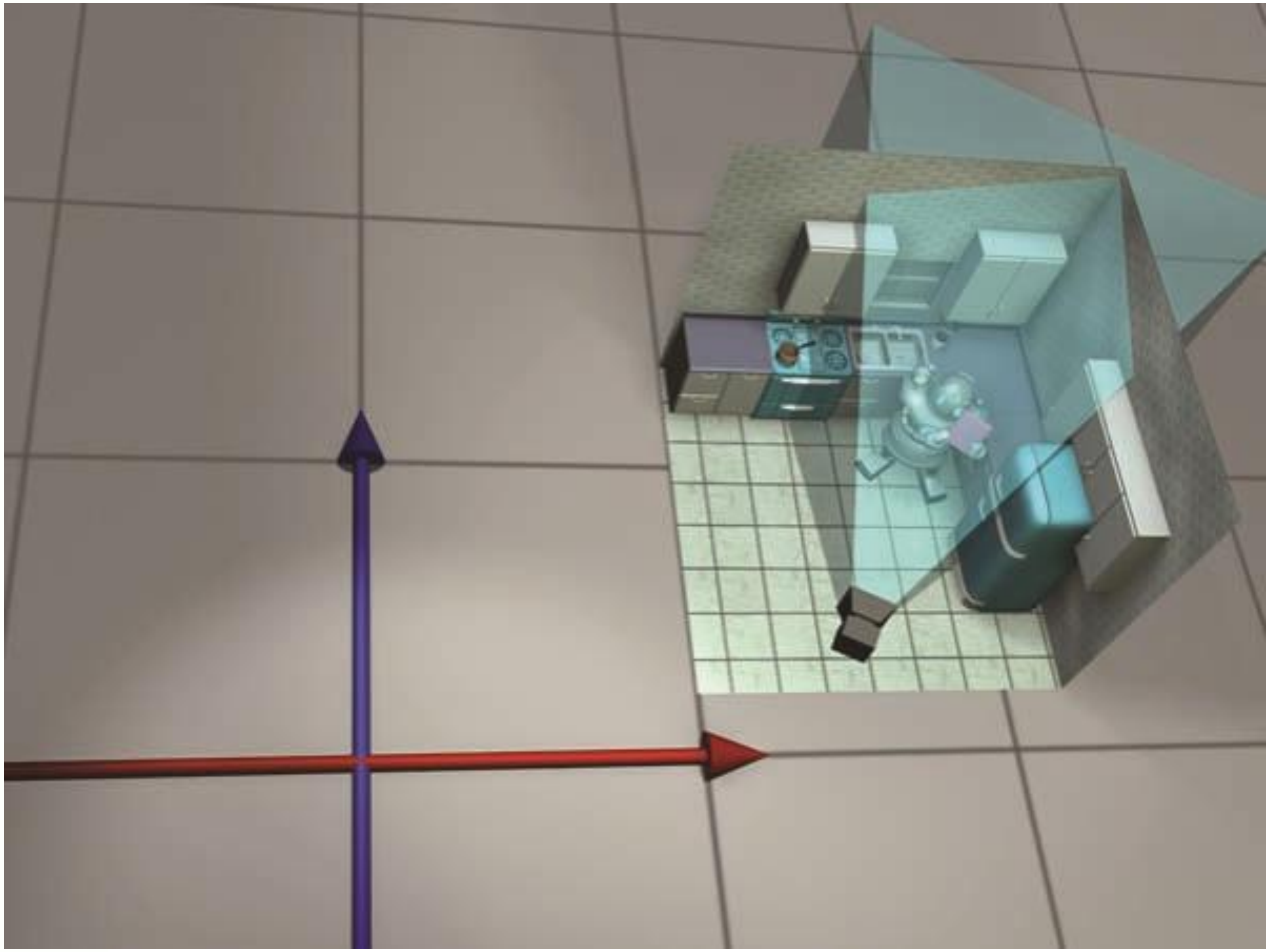
Položaj kamere

Vidno polje kamere

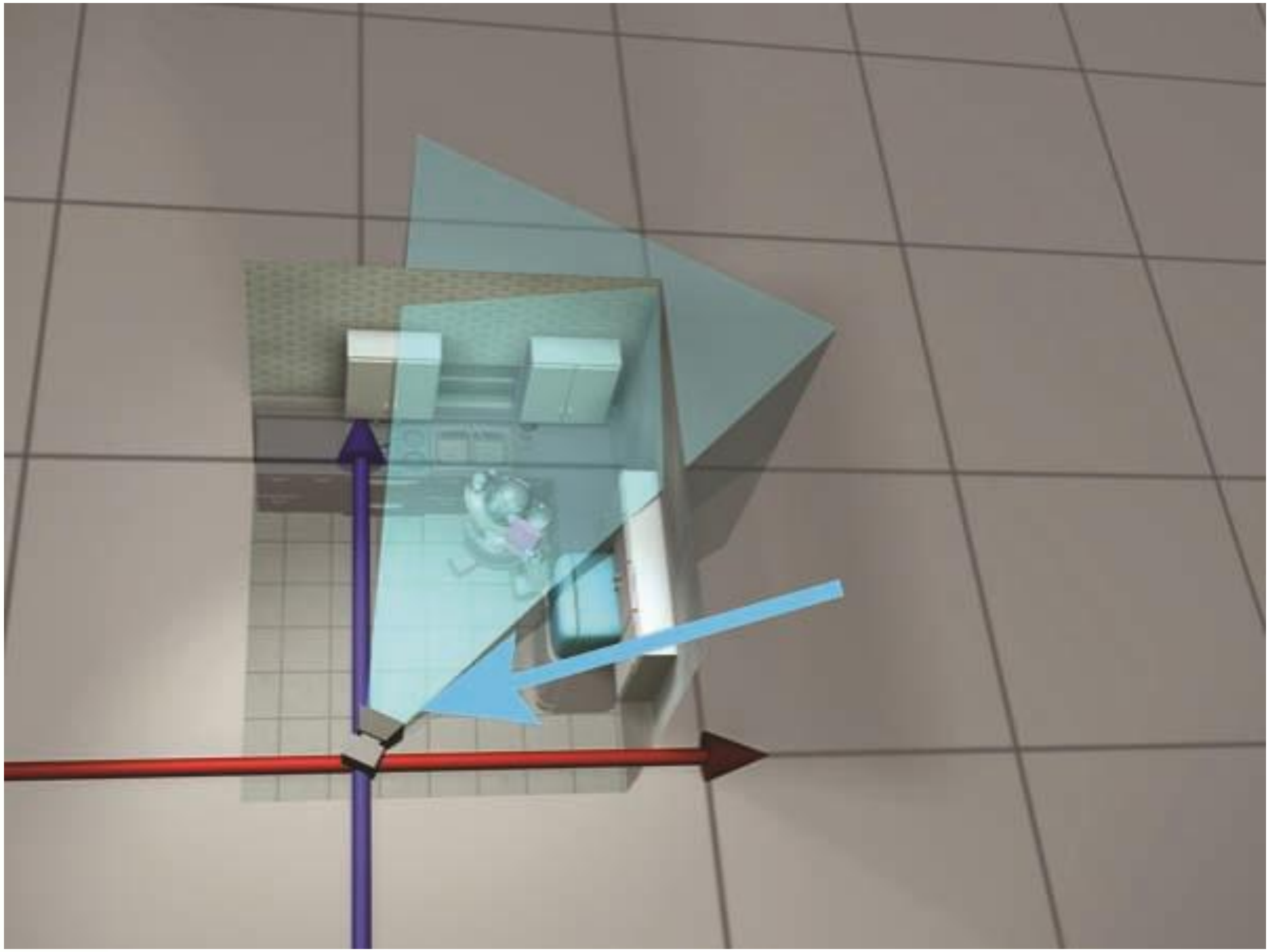
Prostor kamere

•Pogodno je posmatrati kameru koja je u koordinatnom početku, sa vidnim poljem u pravcu *z*-ose. Tako je postavljen koordinatni sistem kamere.
•Zgodno je da i u globalnom sistemu kamera bude u koordinatnom početku, sa vidnim poljem u pravcu *z*-ose.
•Objekat i kamera su već u željenom uzajamnom odnosu, pa dalja pomeranja realizujemo kao transformacije koordinatnih sistema.
•Zbog toga pomeramo globalni koordinatni sistem tako da kamera bude u njegovom koordinatnom početku.
•Prvo transliramo, a zatim rotiramo – i ovog puta redosled transformacija obezbeđuje da rotaciju primenjujemo oko koordinatnog početka.

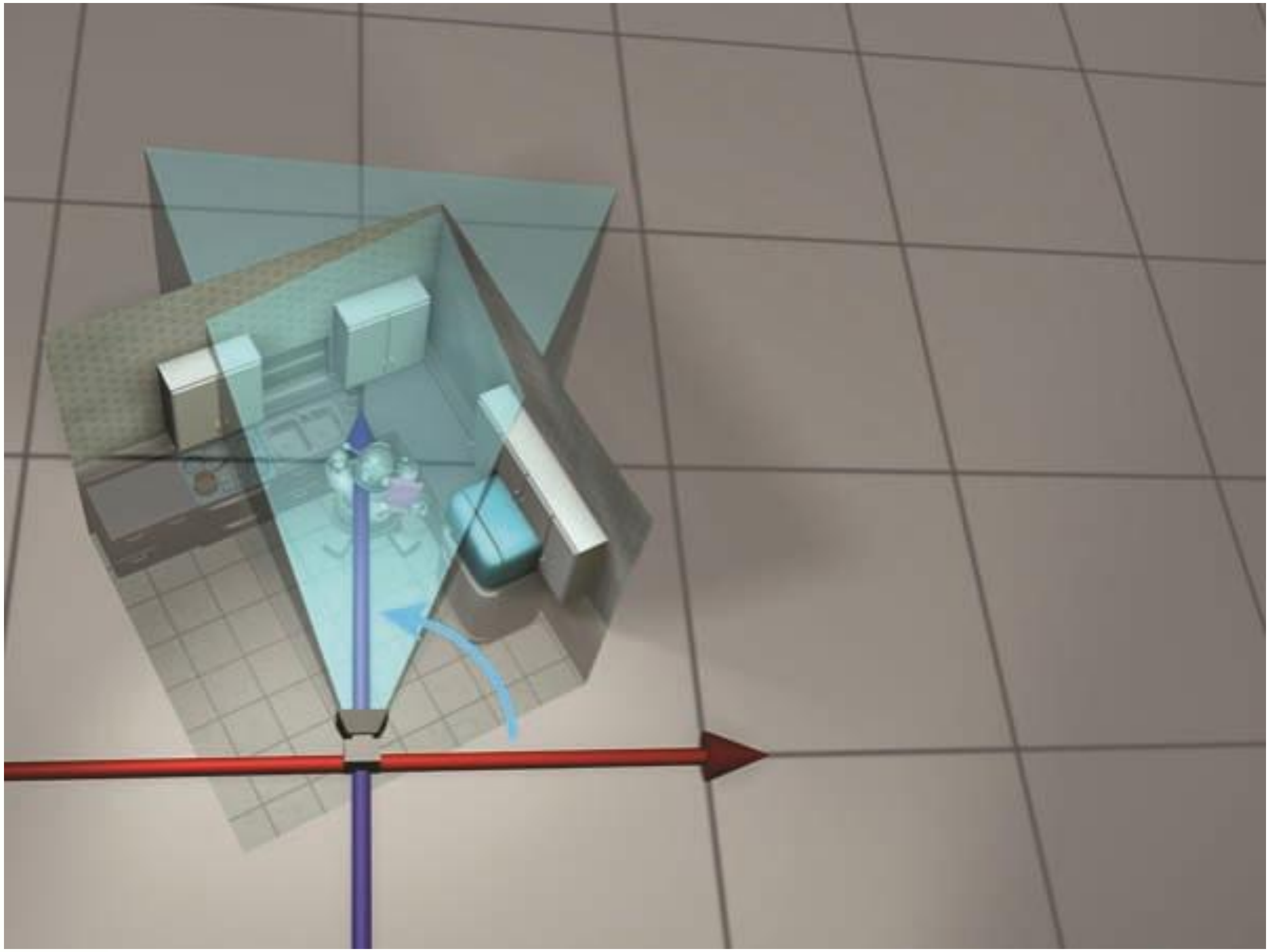
Polazna pozicija



Translacija globalnog prostora



Rotacija globalnog prostora



Predstavljanje koordinatnog sistema

- Koordinatni sistem je određen lokacijom koordinatnog početka **u hijerarhijski višem koordinatnom sistemu.**
- Dakle, koordinatni početak prostora objekta prikazujemo u globalnom koordinatnom sistemu.
- Koordinatne ose opisujemo njihovim vektorima pravca, opet u **hijerarhijski višem koordinatnom sistemu**.
- Za prostor objekta, vektori kojima opisujemo koordinatne ose su zadati koordinatama u uspravnom (a samim tim i globalnom) koordinatnom sistemu.

Transformacije koordinatnih sistema i vekori baze prostora

•Koordinate vektora baze su uvek

p = [1, 0, 0], **q** = [0, 1, 0] i **r** = [0, 0, 1]

U koordinatnom sistemu koji je postavljen u odnosu na ove vektore. Ovo su koordinate **standardne baze** prostora.

•Ukoliko bazne vektore **p,q,r** posmatramo u koordinatnom sistemu koji je postavljen u odnosu na neku drugu bazu, njihove koordinate neće biti koordinate standardne baze.

•Kada koordinatne vektore prostora objekta prikažemo u uspravnom ili globalnom koordinatnom sistemu, koordinate tih (baznih) vektora nisu koordinate standardne baze.

•Podrazumevamo da su koordinate vektora globalnog prostora izražene u odnosu na standardnu bazu.

Transformacije koordinatnih sistema i vekori baze prostora

- Kada koristimo više koordinatnih sistema, to podrazumeva da koristimo i više različitih skupova baznih vektora.
- Ono što nam je uvek potrebno su koordinate vektora jedne baze izražene u drugom koordinatnom sistemu.

- **Uočimo da je prethodnim opisan "sadržaj" kolona matrice transformacije baze.**

Primer

Pretpostavimo da je objekta na poziciji (1,10,3), a da su njemu odgovarajući pravci “desno”, “gore”, “napred” opisani, redom, vektorima (0.866,0,-0.5) ; (0,1,0); (0.5,0,0.866).

Ako su koordinate tačke A u prostoru objekta jednake (-1,2,0), odrediti koordinate ove tačke u uspravnom i globalnom prostoru.

Ako su koordinate tačke B u globalnom prostoru date sa (2,11,4), odrediti koordinate ove tačke u uspravnom prostoru i u prostoru objekta.

Rešenje (prvi deo)

•Transformacija koordinata tačke date u koordinatnom sistemu objekta u koordinate tačke u uspravnom prostoru (i obrnuto) podrazumevaju samo transformaciju vektora baze (koordinatni počeci ovih prostora se poklapaju).

•Ovakva transformacija se realizuje matricom koja sadrži bazu prostora objekta izraženu u standardnoj bazi (primenjujemo je na tačku iz prostora objekta i dobijamo tačku iz uspravnog prostora), ili inverznu matricu ove matrice (primenjujemo je na tačku uspravnog prostora i dobijamo tačku u prostoru objekta).

Rešenje (drugi deo)

- Transformacija koordinata tačke date u koordinatnom sistemu objekta u koordinate tačke u globalnom prostoru (i obrnuto) podrazumevaju kompoziciju transformacija.
- Jedna transformacija preslikava koordinatni sistem objekta i uspravni koordinatni sistem (ili obrnuto), a druga transformaciju uspravnog koordinatnog sistema u globalni (ili obrnuto).

- Ovakva transformacija se realizuje proizvodom dve matrice.

- Jednu matricu smo već odredili kao matricu transformacije baze prostora objekta u bazu uspravnog prostora (ili obrnuto).

Rešenje (treći deo)

- Druga matrica je matrica translacije, s obzirom da su bazni vektori uspravnog i globalnog sistema kolinearni. Ova translacija pomera koordinatni početak jednog koordinatnog sistema u drugi, i time transformiše jedan koordinatni sistem u drugi.
- Primenom matrice translacije koja koordinatni početak globalnog sistema dovodi u položaj koordinatnog početka uspravnog sistema na tačke date koordinatama u uspravnom sistemu dobijamo tačke u globalnom sistemu.
- Primenom matrice translacije koja koordinatni početak uspravnog sistema dovodi u položaj koordinatnog početka globalnog sistema na tačke date koordinatama u globalnom sistemu dobijamo tačke u uspravnom sistemu.

Rešenje (četvrti deo)

U datom primeru je

Matrica transformacije baze prostora objekta u bazu uspravnog prostora

$$[I]_{ou} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 \end{bmatrix}$$

Matrica translacije koja “konvertuje” tačke uspravnog prostora u globalni

$$[T]_{ug} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektor translacije je (1,10,3), koji određuje poziciju koordinatnog početka uspravnog sistema u globalnom.

Rešenje (peti deo)

Matrica transformacije baze prostora objekta u bazu uspravnog prostora, u homogenim koordinatama je

$$[I]_{ou} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovo je istovremeno i matrica koja “konvertuje” koordinate tačke prostora objekta u koordinate (iste) tačke u uspravnom prostoru, pa je odgovor na prvo postavljeno pitanje

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.866 \\ 2 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rešenje (šesti deo)

Odnosno:
Ako su koordinate tačke A u prostoru objekta jednake (-1,2,0), koordinate ove tačke u uspravnom prostoru su (-0.866,2,0.5).

(Ovde nije bilo eksplicitne potrebe za korišćenje homogenih koordinata, ali ni prepreka da ih koristimo.)

Rešenje (sedmi deo)

Kako je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.134 \\ 12 \\ 3.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

odgovor na pitanje: “Ako su koordinate tačke A u prostoru objekta jednake (-1,2,0), koje su koordinate ove tačke u globalnom prostoru” je **(0.134,12,3.5).**

Rešenje (osmi deo)

Da bismo odgovorili na preostala dva pitanja, potrebno je koristimo odgovarajuće inverzne transformacije.

Za transformaciju koordinata tačaka iz globalnog u uspravni prostor koristimo matricu translacije

$$[T]_{gu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

koja transformiše koordinatni početak uspravnog prostora u koordinatni početak globalnog prostora (time transformiše i ceo koordinatni sistem).

Rešenje (deveti deo)

Tako je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a tada je odgovor na treći zadatak “Ako su koordinate tačke B u globalnom prostoru date sa (2,11,4), odrediti koordinate ove tačke u uspravnom prostoru” uređena trojka **(1,1,1).**

Konačno, ako nakon opisane translacije primenimo i matricu transformacije baze uspravnog prostora u bazu prostora objekta, dobićemo odgovor i na četvrto pitanje.

Rešenje (deseti deo)

Dakle, kako je

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.366 \\ 1 \\ 1.366 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gde je iskorišćeno da je $\left[I\right]_{uo} = \left[I\right]_{ou}^{-1}$

zaključujemo da je odgovor na četvrto pitanje “Ako su koordinate tačke B u globalnom prostoru date sa (2,11,4), odrediti koordinate ove tačke u prostoru objekta” dat uređenom trojkom **(0.366,1,1.366).**

Transformacije koordinatnih sistema i vekori baze prostora

- Opisali smo uvedene koodinatne sisteme (objekta, kamere, globalni, uspravni) kao **pravougle**.
- Transformacije koje jedan dovode u položaj drugog su rotacija i translacija – takozvane transformacije čvrstog tela (očuvavaju rastojanja i uglove).

- Uočimo, međutim:
  - Vektori baze su često uzajamno ortogonalni, ali to ne moraju da budu.
  - Bazni vektori su obično jedinični, ali ne moraju da budu.

Transformacije koordinatnih sistema i vekori baze prostora

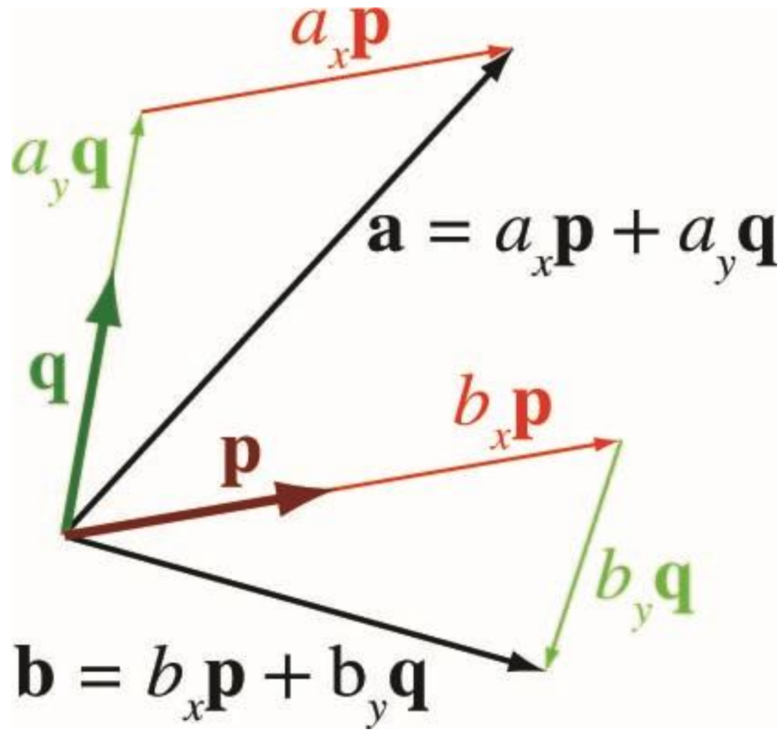
- Nije obavezno, ni uvek moguće, a ni uvek pogodno, koristiti bazu čiji su vektori uzajamno ortogonalni.
- Situacije kada želimo da modelujemo deformacije objekta (npr. istezanja i sabijanja, koje nisu transformacije čvrstog tela) nameću korišćenje koordinatnog sistema prostora objekta gde su bazni vektori prilagođeni da modeluju ovakve promene objekta.
- Bazni vektori u tom slučaju najverovatnije nisu ni ortogonalni, a ni jednake dužine.

Vektori baze u 2D prostoru

- Vektori **p** i **q** su linearno nezavisni i predstavljaju bazu prostora vektora ravni.

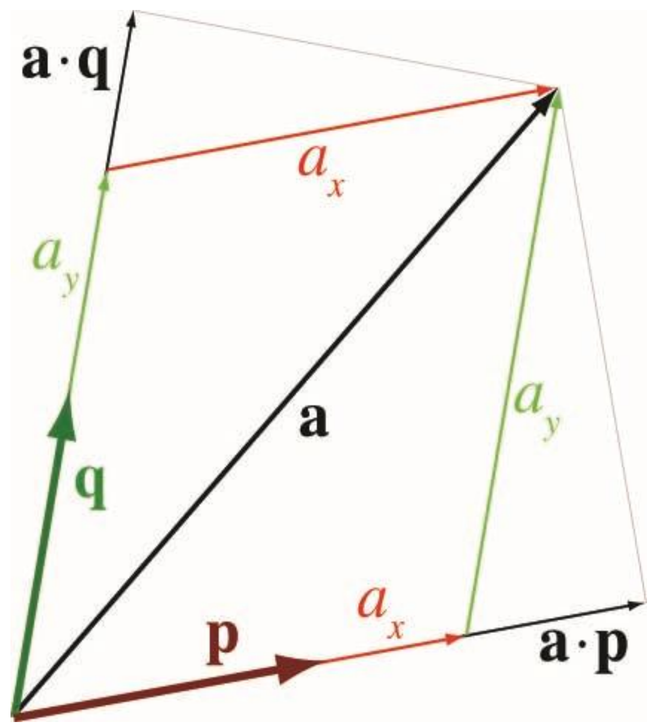
- Svaki vektor ravni može se prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.

- Primeri su vektori **a** i **b**.



Koordinate i baza koja nije ortonormirana

- Pretpostavimo da su **p** i **q** jedinični vektori koji **nisu ortogonalni**.
- Skalarni porizvodi **a·p** i **a·q** razlikuju se od koordinata a_x i a_y u razlaganju vektora **a** u pravcu baznih vektora **p** i **q**.
- Pomeranje određeno vektorom **a** u pravcu vektora **p,** odnosno **q**, nije jednako koordinatama tog vektora!



Skalarni proizvod i koordinate vektora

- Osobine skalarnog proizvoda su blisko povezane sa određivanjem koordinata vektora u nekoj bazi.
- Skalarni proizvod vektora **v** na jedinični vektor **p** jednak je **ortogonalnoj projekciji** vektora **v** na pravac vektora **p.** Dobijena vrednost odgovara “količini pomeranja” u pravcu vektora **p**.
- Ukoliko bazni vektori nisu ortogonalni, pomeranje u pravcu koordinatne ose nije jednako odgovarajućoj koordinati vektora.

Ortonormirane baze

•Ukoliko su bazni vektori ortogonalni i jedinični, koordinate vektora **v** u toj bazi su jednake projekcijama vektora na bazne vektore, odnosno skalarnom proizvodu vektora **v** sa baznim vektorima.

•Prethodna zapažanja jasno ističu važne prednosti **ortonormiranih baza**.

• Koordinate vektora u ortonormiranoj bazi su međusobno nezavisne i svaka se može odrediti kao skalarni proizvod posmatranog vektora i odgovarajućeg baznog vektora.

Ortogonalne matrice

- Kvadratna matrica M je **ortogonalna** ako i samo ako važi da je $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$.
- Ako je matrica ortogonalna, njena inverzna matrica je jednaka njenoj transponovanoj matrici: $\mathbf{M}^{T} = \mathbf{M}^{-1}$.
- Dakle, ako znamo da je M ortogonalna, određivanje njoj inverzne matrice se svodi na transponovanje matrice.
- Uočimo da je u opštem slučaju određivanje inverzne matrice računski (relativno) skup postupak.
- Primeri ortogonalnih matrica su matrica rotacije i matrica simetrije.

Provera ortogonalnosti

Da bismo utvrdili da li je matrica **M** formata 3 x 3 ortogonalna, treba da utvrdimo da li je $\mathbf{M}\mathbf{M}^{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uvedimo oznake za vrste matrice **M**

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_1- \\ -\mathbf{r}_2- \\ -\mathbf{r}_3- \end{bmatrix}$$

Provera ortogonalnosti

Uslov ortogonalnosti se svodi na proveru sledećih uslova izraženih u obliku skalarnih proizvoda:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = 1 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 & \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = 0 \\ \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = 0 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = 1 & \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = 0 \\ \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = 0 & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_2 = 0 & \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3 = 1 \end{array}$$

Provera ortogonalnosti

- Skalarni proizvod vektora sa samim sobom jednak je kvadratu njegovog intenziteta.
- Dakle, svaki od posmatranih vektora-vrsta je jedinični vektor.
- Dalje, skalarni proizvod dva (ne-nula) vektora jednak je nuli akko su vektori ortogonalni.
- Dakle, svaka dva posmatrana vektora su uzajamno ortogonalna.

Ortogonalne matrice

- Dakle, da bi matrica bila ortogonalna, mora da važi:
  1. Svaka vrsta (kolona) matrice je jedinični vektor.
  2. Svake dve vrste (kolone) su međusobno ortogonalni vektori.

- Matrica je ortogonalna ukoliko njene vrste (kolone) predstavljaju skup ortonormiranih vektora.

Napomene

- Ukoliko znamo da je matrica sa kojom radimo ortogonalna, ta informacija će nam biti veoma korisna.
- Ukoliko ne znamo da li je matrica ortogonalna, uglavnom to ni ne proveravamo (najčešće nije, što proveru čini skupom).
- Treba imati na umu i da računanja sa približnim vrednostima mogu u praksi narušiti osobinu ortogonalnosti, čak i ako je ona teoretski zadovoljena.

Ortogonalne matrice u praksi

- Matrice rotacija su teoretski ortogonalne
- Približne vrednosti i greške zaokrugljivanja u praksi vode do numeričke nestabilnosti.
- Ortogonalne matrice nisu uvek baš sasvim ortogonalne...
- Postupkom **ortogonalizacije** matricu transformišemo tako da ona bude ortogonalna, a da se od polazne razlikuje što je moguće manje.

- Postupak ortogonalizacije: **Gram-Šmitov postupak**

Gram-Šmitov postupak
Koraci 1 i 2

- Korak 1: Normalizuj vektor $\mathbf{r}_1$. Rezultat je jedinični vektor $\mathbf{r}_1'$, istog pravca kao $\mathbf{r}_1$.
- Korak 2: Zameni r_2 sa

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2)\, \mathbf{r}_1'$$

- $\mathbf{r}_2'$ je ortogonalan na $\mathbf{r}_1'$ jer je

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2' &= \mathbf{r}_1' \cdot (\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2)\, \mathbf{r}_1') \\ &= \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_1') \\ &= \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Gram-Šmitov postupak
Koraci 3, 4 i 5

- Korak 3: Normalizuj $\mathbf{r}_2'$
- Korak 4: Zameni $\mathbf{r}_3$ by

$$\mathbf{r}_3' = \mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_1' - (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_2'$$

- Korak 5: Normalizuj $\mathbf{r}_3'$

$\mathbf{r}_3'$ je ortogonalan na $\mathbf{r}_1'$ jer je

$$\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3' = \mathbf{r}_1' \cdot (\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_1' - (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_2')$$
$$= \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3)\, (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_1') - (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3)\, (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_2') = \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3 - 0 = 0$$

$\mathbf{r}_3'$ je ortogonalan na $\mathbf{r}_2'$ jer je

$$\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3' = \mathbf{r}_2' \cdot (\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_1' - (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3)\, \mathbf{r}_2')$$
$$= \mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{r}_3)\, (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_1') - (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3)\, (\mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_2') = \mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3 - 0 - \mathbf{r}_2' \cdot \mathbf{r}_3 = 0$$