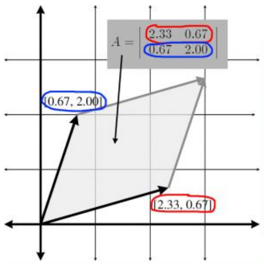
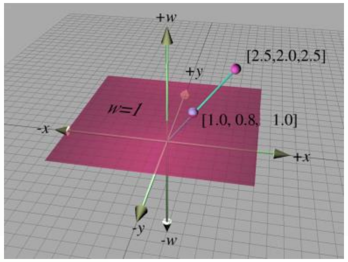
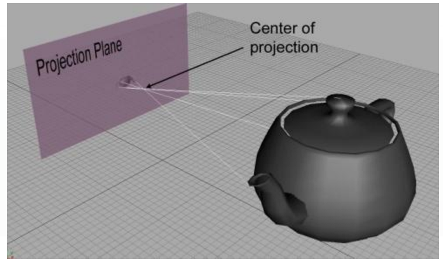
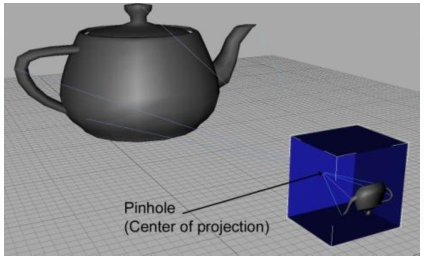
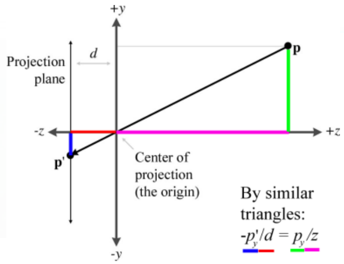



# Homogene koordinate, translacija i afine transformacije

# Projektivna geometrija

- U Euklidskoj geometriji (i Euklidskoj ravni) dve paralelne prave nemaju zajedničkih tačaka.
- Svakoj pravoj dodajemo još jednu tačku, koju zovemo **beskonačno dalekom** tačkom.
- Dve paralelne prave imaju zajedničku beskonačno daleku tačku.

- Sve beskonačno daleke tačke svih pravih Euklidske ravni pripadaju beskonačno dalekoj pravoj. Euklidska ravan sa beskonačno dalekom pravom naziva se **projektivna ravan**.

- U projektivnoj ravni se svake dve prave seku!

# Projektivna ravan

- Prava se može opisati jednačinom oblika

$$Ax+By+C = 0.$$

Koeficijent pravca ove prave je jednak –A/B.

- Presek dve prave je rešenje sistema jednačina

$$Ax+By+C = 0,$$
$$A_1x+B_1y+C_1 = 0.$$

- Paralelnim pravama odgovara sistem jednačina

$$Ax+By+C = 0,$$
$$Ax+By+C_1 = 0,$$

koji je (za $C \neq C_1$ ) protivrečan.

- Koeficijent pravca svake od ovih pravih je –A/B.

# Projektivna ravan

- Ako posmatrane paralelne prave predstavimo sistemom jednačina

$$Ax+By+Cw = 0,$$

$$Ax+By+C_1w = 0,$$

dobijamo rešenje u obliku $(C-C_1)w = 0$, odnosno, $w=0$ (za $C \neq C_1$ ) .

- Presek paralelnih pravih je, dakle, tačka sa koordinatama $(x,y,0)$.
- Ovo su koordinate beskonačno daleke tačke.

# Projektivna ravan

- Euklidsku ravan postavimo u Euklidski 3D (*xyw*) prostor tako da jednačina ravni bude $w=1$.
- Tačke u Euklidskoj ravni zadržavaju svoje uobičajene osobine, a njihov zapis u posmatranom 3D prostoru je sada $(x,y,1)$.
- Posmatrajmo pravu određenu koordinatnim početkom 3D prostora i proizvoljnom tačkom $(x,y,1)$ Euklidske ravni.
- Sve tačke na toj pravoj imaju oblik $(tx,ty,t)$.
- Koeficijent pravca ove prave je jednak $y/x$.

# Projektivna ravan

• Sve tačke posmatrane prave smatramo ekvivalentnim. One predstavljaju **homogene** tačke koje odgovaraju jednoj istoj tački Euklidske ravni – tački ($x,y$) na koju se projektuju.

• Tačka ($x,y,0$) je beskonačno daleka tačka svake prave sa koeficijentom pravca $y/x$.

•Tačka $(x,y,1)$ je homogena tačka (tačka projektivne ravni) koja odgovara tački Euklidske ravni.

•Projektivna tačka predstavlja klasu ekvivalencije. Jednoj klasi pripadaju sve tačke uočene prave, odnosno sve tačke oblika (tx,ty,t), za t ≠0.

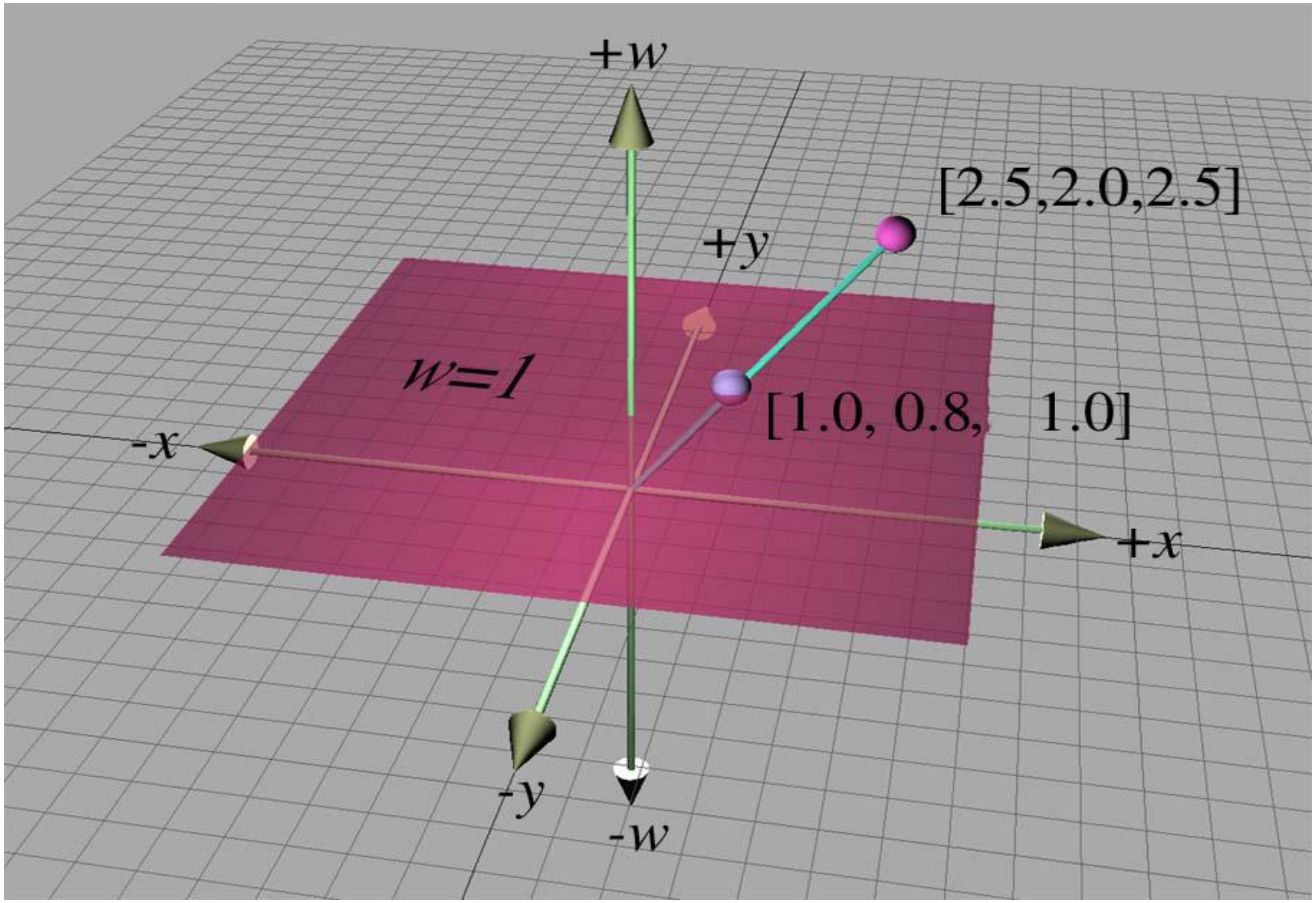
# Projektivna ravan

- Kako sve tačke oblika $(tx,ty,t)$ za proizvoljno $t \neq 0$ pripadaju istoj pravoj oblika $Atx+Bty+Ct=0$, zaključujemo da je i svaka tačka oblika $(tx,ty,t)$ **homogena reprezentacija tačke** $(x,y)$.

- Ako je data tačka čije su homogene koordinate $(x,y,w)$, i $w \neq 0$, onda je u Euklidskoj ravni ta tačka predstavljena koordinatama $(x/w,y/w)$.

- Euklidska ravan je ravan $w=1$ projektivnog prostora.

# Projektivna ravan



# 2D homogene koordinate

- Homogene koordinate (Euklidske) tačke $(x,y)$ *su* sve tačke oblika $(xt, yt, t) = (x,y,1)$, za $t \neq 0$.
- Tački sa homogenim koordinatama $(p, q, r)$ , za $r \neq 0$, odgovara Euklidska tačka $(p/r, q/r)$.
- Tačka oblika $(0,0,0)$ nije dozvoljena (definisana).
- Tačke oblika $(x,y,0)$ su beskonačno daleke tačke.

# 3D homogene koordinate

- Ideju uvođenja homogenih koordinata prirodno možemo uopštiti na 3D Euklidski prostor.
- Homogena tačka $(x, y, z, w)$, $w \neq 0$, odgovara tački Euklidskog prostora sa koordinatama $(x/w, y/w, z/w, 1)$.
- Euklidski 3D prostor je projekcija projektivnog prostora na hiperravan $w=1$.
- Tačka sa homogenim koordinatama $(x,y,z,0)$ *je* **beskonačno daleka tačka**.
- Beskonačno daleke tačke prostora obrazuju beskonačno daleku ravan. Toj ravni pripada presek svake dve paralelne Euklidske ravni.

# Zbog čega uvodimo homogene koordinate?

- Translacija nije linearna transformacija. Nismo mogli da je predstavimo kao matrično množenje.
- Posledica: gubimo mogućnost elegantnog predstavljanja svih geometrijskih transformacija pomoću odgovarajućih matrica i matričnih množenja.

- Reprezentacija tačaka pomoću homogenih koordinata omogućiće da translaciju predstavimo matričnim množenjem, baš kao i linearne transformacije.

# Zbog čega uvodimo homogene koordinate?

- Svakoj tački Euklidskog prostora pridružićemo homogenu reprezentaciju.

- 2D

  tačku $(x, y)$ predstavljamo reprezentacijom $(x, y, 1)$.
- 3D

  tačku $(x, y, z)$ predstavljamo reprezentacijom $(x, y, z, 1)$.

# Matrice transformacija u homogenim koordinatama

3x3 matrice linearnih transformacija u 3D prostoru predstavićemo 4x4 matricama oblika

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Linearna transformacija u Euklidskom prostoru

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z \\ m_{21}x + m_{22} + m_{23}z \\ m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

# Linearna transformacija u homogenim koordinatama

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z \\ m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z \\ m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Matrica translacije u homogenim koordinatama

Translaciju tačke *(x,y,z)* za vektor $(t_x,t_y,t_z)$ realizujemo matričnim množenjem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+t_x \\ y+t_y \\ z+t_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Kompozicija transformacija

- Translacija se sada može primeniti kao deo kompozicije transformacija primenom proizvoda odgovarajućih matrica transformacija.
- Važno je uvek imati na umu da množenje matrica nije komutativno i da je redosled primene transformacija bitan!

- Da bismo tačku **v** rotirali, a zatim translirali, do novog položaja **v**′, primenićemo transformaciju

$$\mathbf{v}' = \mathbf{TRv}.$$

- Da bismo tačku **v** translirali, a zatim rotirali, do novog položaja **v**′, primenićemo transformaciju

$$\mathbf{v}' = \mathbf{RTv}.$$

# Beskonačno daleke tačke

- *w*-koordinata beskonačno dalekih tačaka jednaka je 0.
- Množenjem matricom rotacije ove tačke se preslikavaju u odgovarajuće beskonačno daleke tačke.
- Množenjem matricom translacije ove tačke se preslikavaju u same sebe.
- Translacija nema uticaja na beskonačno daleke tačke!

# Beskonačno daleke tačke

- Uočimo da tačke (lokacije) želimo da transformišemo translacijom, a da vektore (pravce kretanja) ne želimo da transformišemo translacijom.
- Homogene koordinate omogućavaju da razlikujemo tačke i vektore.

- Beskonačno daleke tačke ($w=0$) koristimo da prikažemo vektore, a “obične” tačke ($w \neq 0$) da prikažemo lokacije (tačke).

# 3x4 Matrice?

- Poslednja vrsta u 4x4 matrici kojom prikazujemo transformaciju u homogenim koordinatama je uvek oblika [0, 0, 0, 1].
- Iako deluje redundantno, neophodno je navoditi je, ukoliko se oslanjamo na metode i zakone linearne algebre.
- Nije neobično, međutim, da se u praksi ova vrsta izostavlja i da se navodi 3x4 matrica. Ipak, pišući 3x4 matricu, podrazumevamo 4x4 matricu čija je poslednja vrsta oblika [0, 0, 0, 1].

- 3x4 matrica nema inverznu. Matrice formata 3x4 se ne mogu međusobno pomnožiti.
- Proizvod 3x4 matrice i 4x1 vektora je 3x1 vektor.

# Afine transformacije

- A*fina* transformacija je linearna transformacija praćena translacijom.
- Dakle, skup afinih transformacija je nadskup skupa linearnih transformacija: svaka linearna transformacija je afina, ali nije svaka afina transformacija linearna.
- Afina transformacija može se zapisati u obliku

$$\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{b}.$$

# Afine transformacije

Afina transformacija je kompozicija linearne transformacije i translacije.

Koristeći proizvode 4 x 4 matrica i mogućnost da pomoću takvih matrica prikažemo i translaciju i linearne transformacije kao matrična množenja, možemo napisati matrice transformacija koje odgovaraju opštim afinim transformacijama.

# Afine transformacije

Afine transformacije koje često primenjujemo:

•Rotacija (u 3D) oko proizvoljne ose koja ne prolazi kroz koordinatni početak.
•Simetrija u odnosu na ravan koja ne prolazi kroz koordinatni početak.
•Ortografska projekcija na ravan koja ne prolazi kroz koordinatni početak.

# Afine transformacije

Algoritam:

1. Translirati centar transformacije u centar koordinatnog početka.
2. Primeniti linearnu transformaciju.
3. Translirati centar transformacije na polaznu poziciju primenom inverzne transformacije.

Matrica transformacije **M** je tada oblika

$$\mathbf{M = T^{-1}LT}$$

T - matrica translacije,

L - matrica odgovarajuće linearne transformacije

$T^{-1}$ - matrica translacije za vektor suprotan vektoru koji određuje T.

# Matrica afine transformacije

Blokovski prikaz matrica transformacija omogućava nam da uočimo strukturu matrice opisane afine transformacije:

$$T^{-1} \cdot L_{4x4} \cdot T = \begin{bmatrix} I_{3x3} & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{3x3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{3x3} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_{3x3} & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{3x3} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{3x3} & L_{3x3}t - t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$