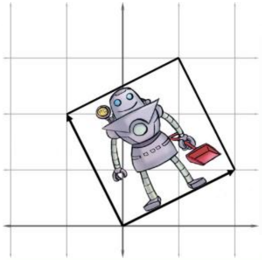
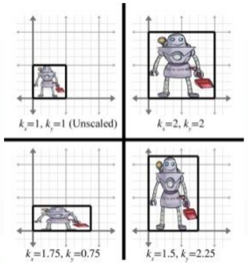
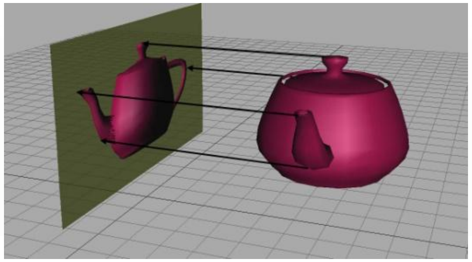
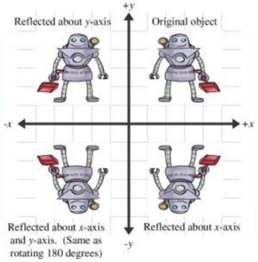
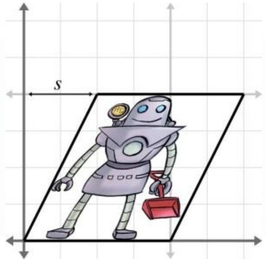
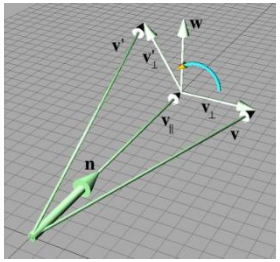



Geometrijske transformacije

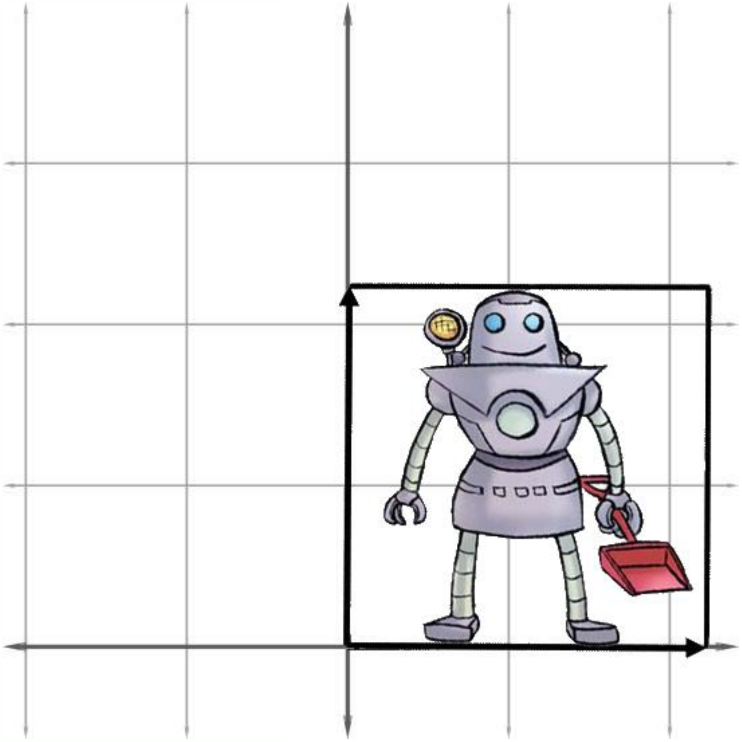
Rotacija

Matrice i linearne transformacije

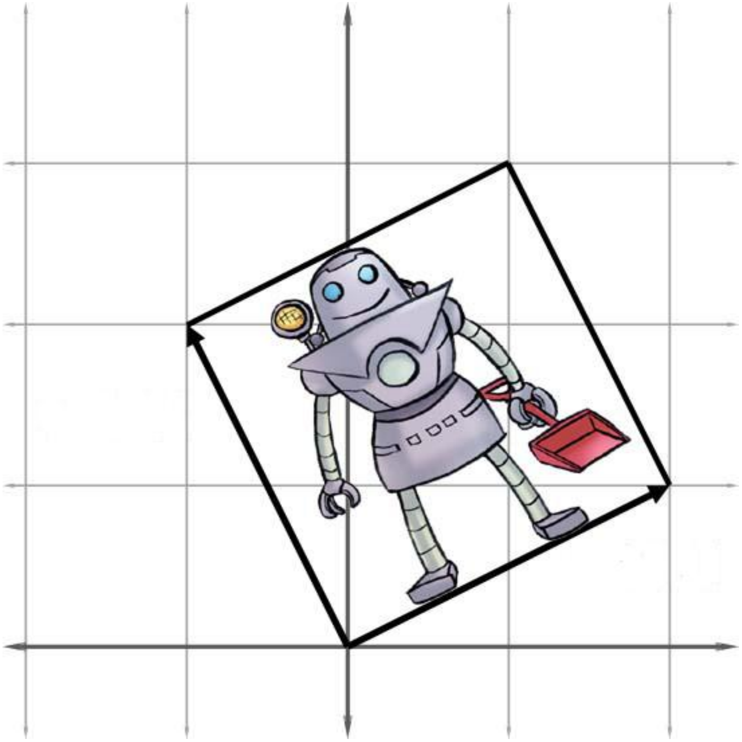
- Svaka linearna transformacija može se prikazati matricom transformacije.
- Kolone matrice transformacije su transformisani vektori baze polaznog prostora, izraženi u bazi rezultujućeg prostora.

- Za datu matricu, posmatramo kako „deluje“ na vektore standardne baze, čitajući kolone matrice. Ovim „vizuelizujemo“ matricu – pridružujemo joj transformaciju (2D ili 3D) prostora.

2D Rotacija oko tačke

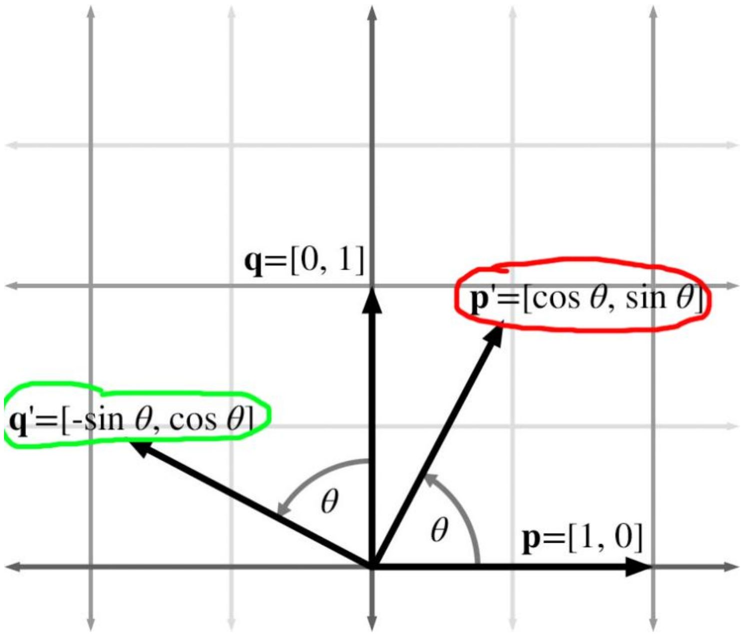


Pre



Posle

Matrica rotacije u ravni (2D)

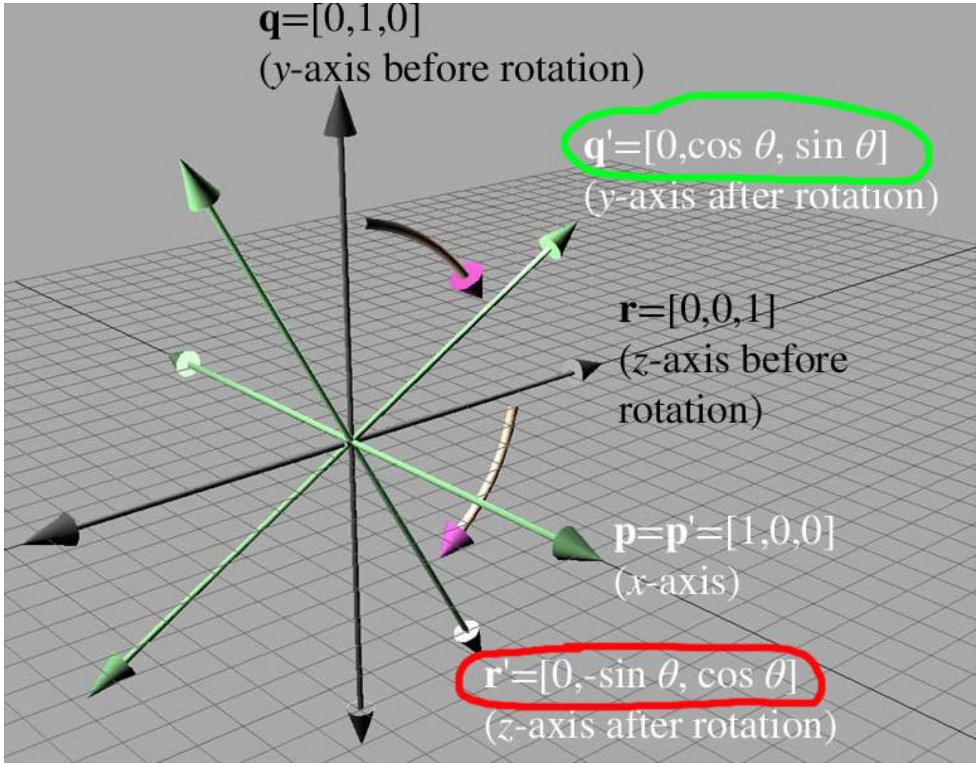


$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Rotacija u 3D oko koordinatne ose

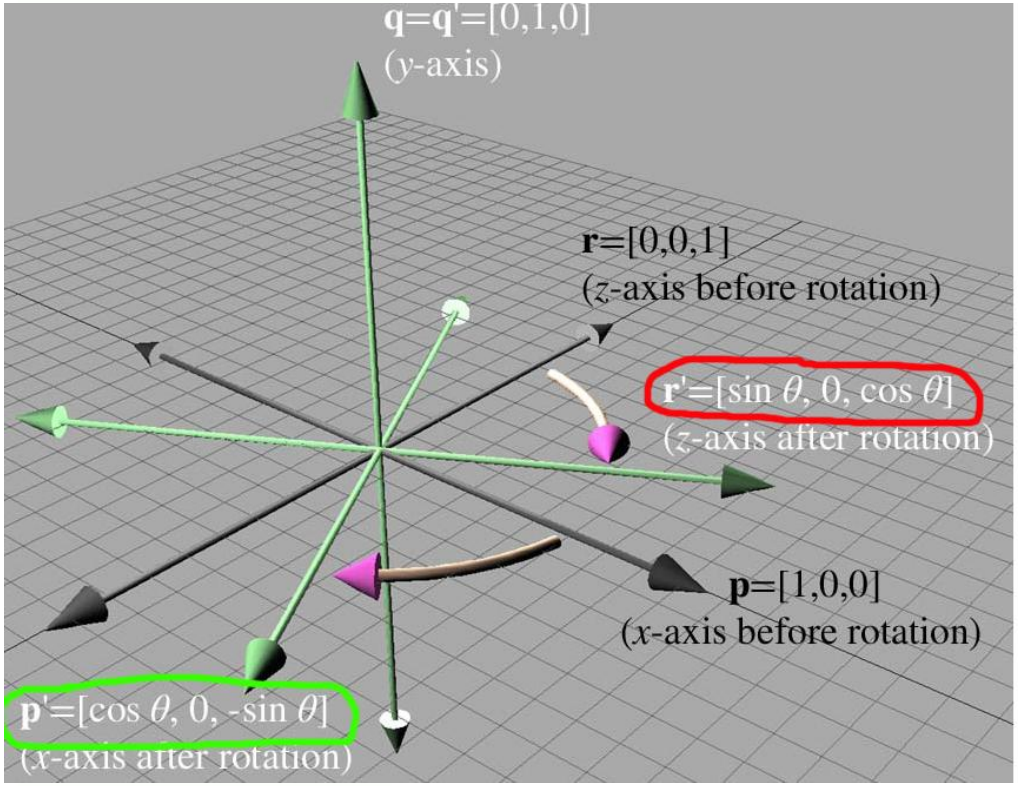
- U 3D posmatramo rotaciju oko ose, mnogo češće nego oko centra (kao u 2D).
- Najčešće posmatramo najjednostavniju rotaciju oko jedne od koordinatnih osa.
- Vodimo računa o smeru rotacije („pozitivna“ ili „negativna“).
- Možemo da se opredelimo za levi ili desni koordinatni sistem, čime definišemo i smer pozitivne rotacije.

3D Rotacija oko *x*-ose za pozitivan ugao θ



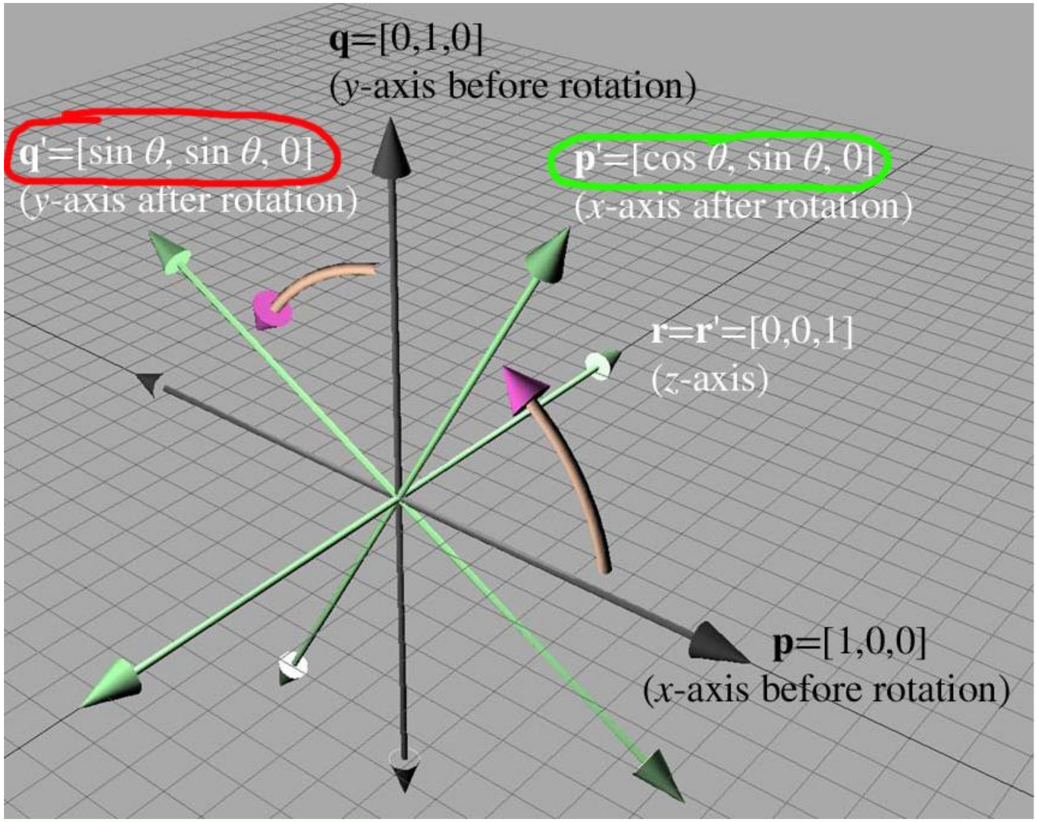
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3D Rotacija oko *y*-ose za pozitivan ugao θ



$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3D Rotacija oko *z*-ose za pozitivan ugao θ



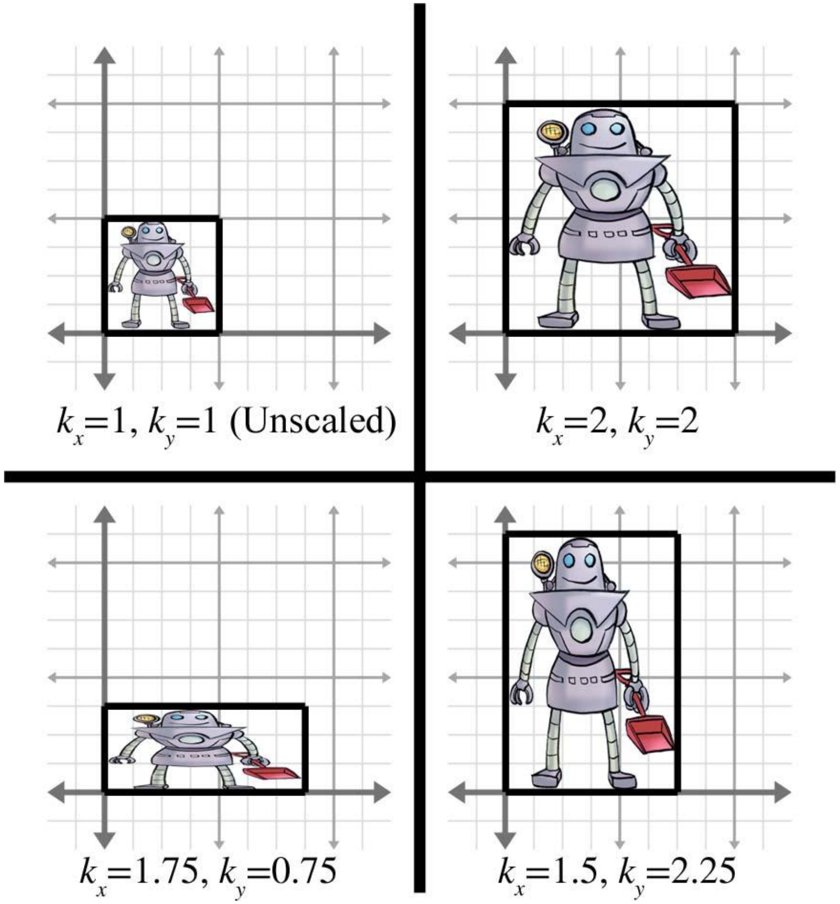
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3D Rotacija oko proizvoljne ose

- Moguće je definisati i rotaciju oko ose koja nije koordinatna osa. Ovim ćemo se pozabaviti malo kasnije.
- Ukoliko osa rotacije prolazi kroz koordinatni početak, ideja je da rotiramo koordinatni sistem tako da osa rotacije dođe u položaj koordinatne ose, izvršimo rotaciju oko koordinatne ose na već poznat način, a zatim primenimo inverznu transformaciju i "vratimo" koordinatni sistem u polazni položaj.
- Veoma je važno što imamo efikasan način za realizovanje kompozicije transformacija ali i da vodimo računa o redosledu primene transformacija! (Proizvod matrica, komutativnost ne važi)

Homotetija (Scaling)

Homotetija u 2D, izotropna i neizotropna, u pravcu vektora baze



Transformacija vektora baze (homotetija)

- Bazni vektori se transformišu nezavisno jedan od drugog, svaki u skladu sa odgovarajućim **koeficijentom homotetije.**
- Kolone matrice homotetije su transformisani vektori baze:

$$S(k_x, k_y) = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

$$S(k_x, k_y, k_z) = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

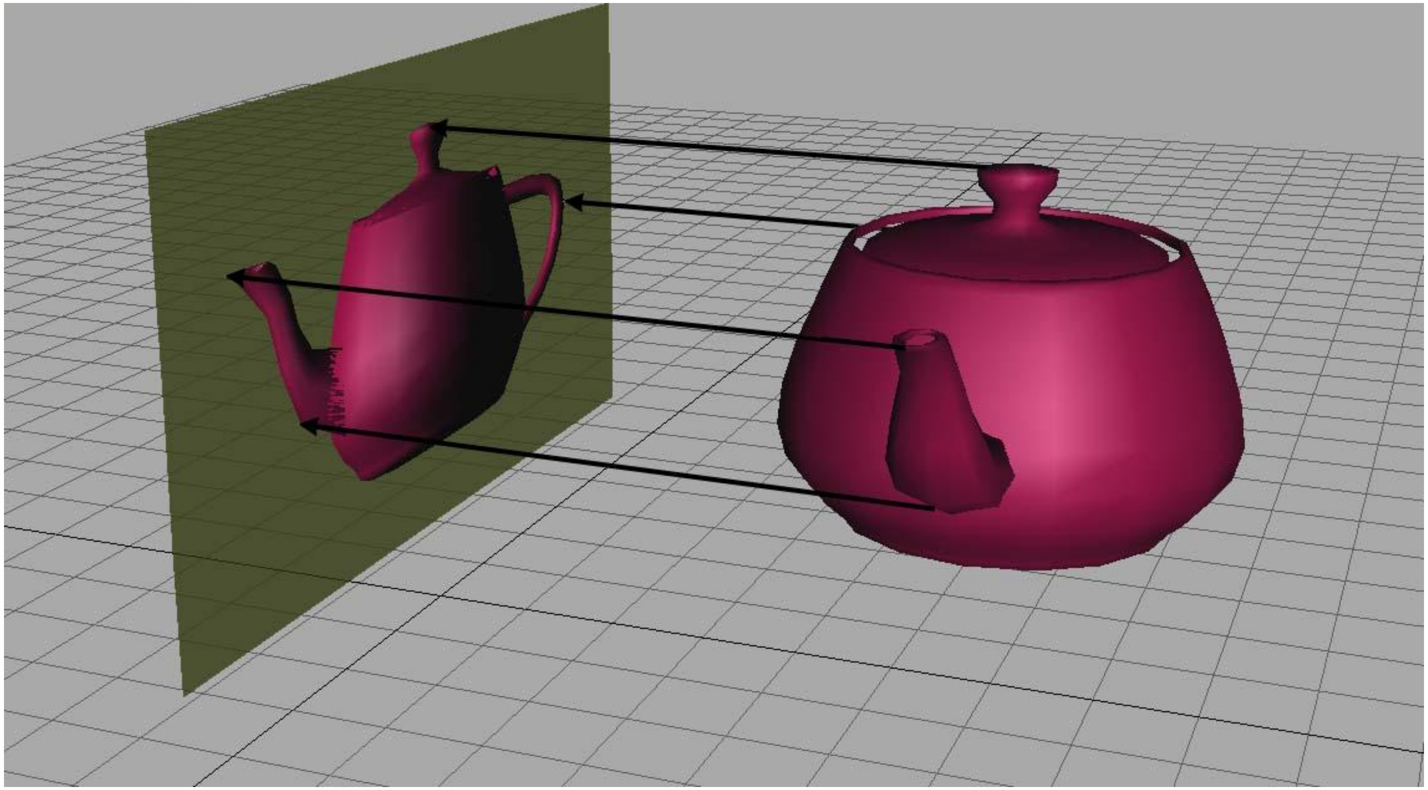
Homotetija u proizvoljnom pravcu

- Homotetija se može zadati u proizvoljnom pravcu, za dati koeficijent. Ovim ćemo se pozabaviti kasnije!

- Intuitivno, možemo rotirati koordinatni sistem tako da se zadati pravac transformiše u pravac koordinatne ose, primeniti homotetiju u pravcu te ose, sa datim koeficijentom, kako je prethodno opisano, a zatim primeniti rotaciju u suprotnom smeru, odnosno za ugao suprotan uglu koji dati pravac obrazuje sa posmatranom koordinatnom osom.
- Kompozicija transformacija se veoma pogodno realizuje kao proizvod matrica.

Ortografska projekcija

Ortografska projekcija



Ortografska (paralelna) projekcija

- U opštem slučaju, projekcija je operacija kojom se smanjuje dimenzionalnost posmatranog prostora.

- Projektovanje skupa na neku od koordinatnih osa (ili koordinatnih ravni) može se realizovati homotetijom sa koeficijentom 0 u pravcu ortogonalnom na osu projekcije.

Paralelna projekcija na koordinatnu osu ili koordinatnu ravan

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

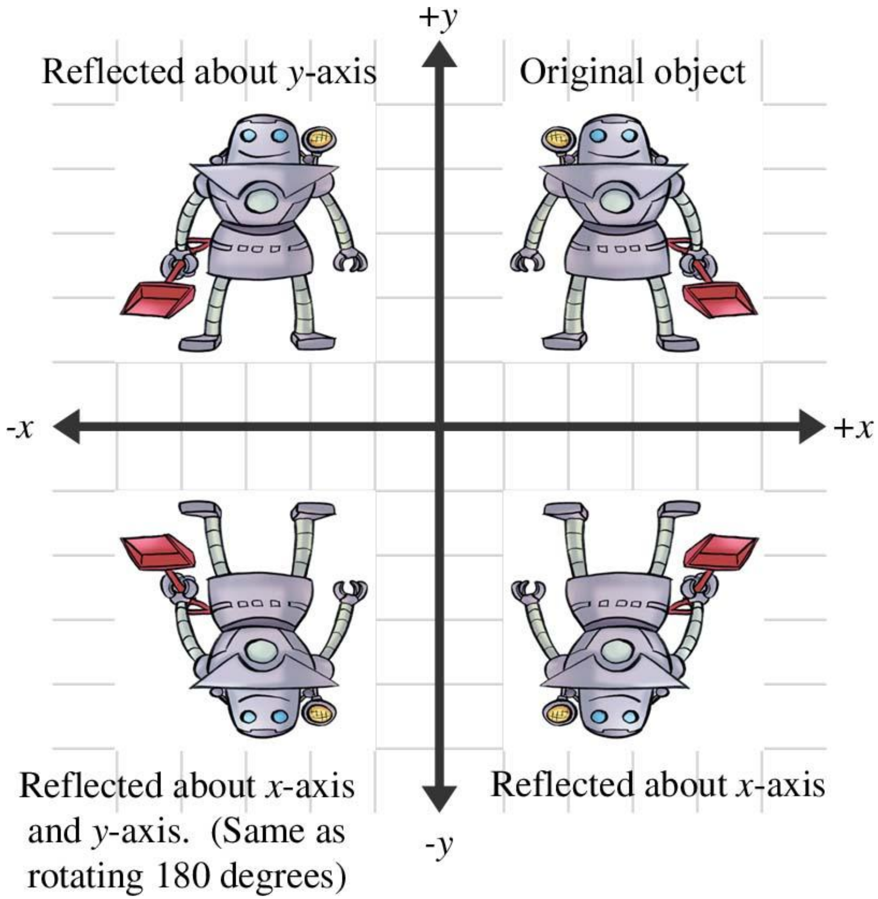
$$P_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{xz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_{yz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paralelna projekcija na proizvoljnu osu ili proizvoljnu ravan

- Projekcija je određena jediničnim vektorom normale na pravu ili ravan projekcije.
- S obzirom da se projekcija može realizovati homotetijom sa koeficijentom 0 u pravcu ortogonalnom na osu projekcije, možemo iskoristiti prethodno dobijene matrice homotetije u datom (proizvoljnom) pravcu i uvrstiti koeficijent homotetije 0.
- Alternativno, možemo primeniti odgovarajuću kompoziciju transformacija (rotacija, projekcija na koordinatnu pravu ili ravan, suprotna rotacija).

Simetrija

Simetrija u odnosu na koordinatne ose



Osna simetrija u 2D

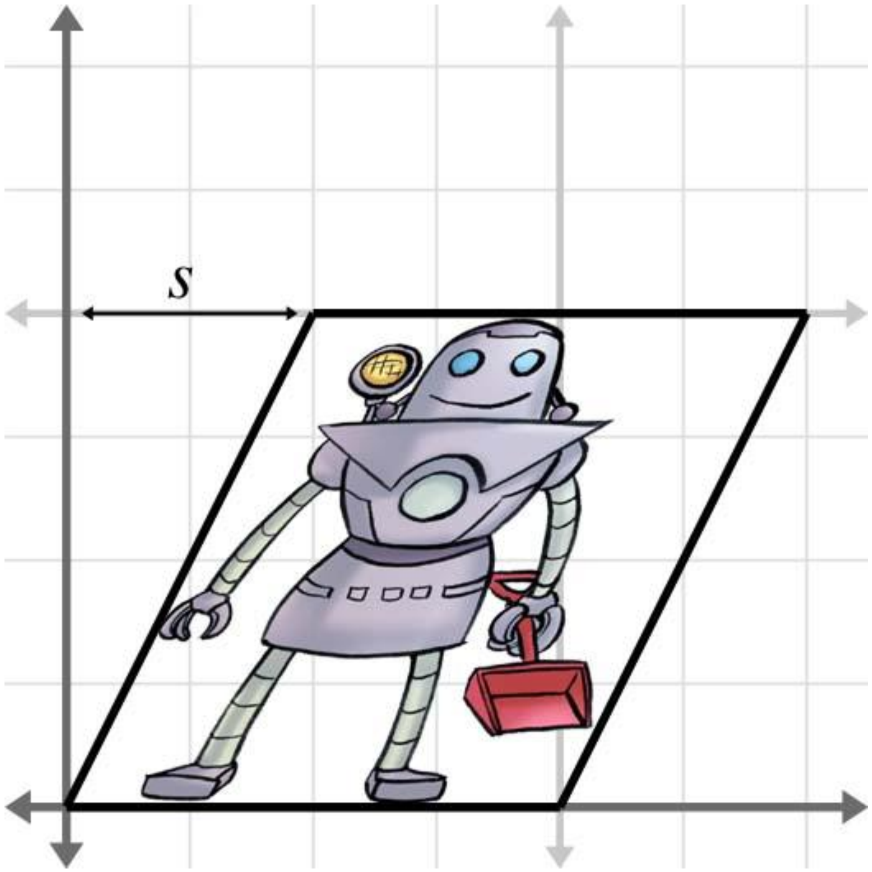
- Osna simetrija se može realizovati kao homotetija u pravcu ortogonalnom na pravac ose simetrije, sa koeficijentom -1.
- Za dati jedinični vektor pravca ose simetrije **n,** koja prolazi kroz koordinatni početak, matricu simetrije dobijamo koristeći matricu homotetije.
- Alternativno, primenjujemo kompoziciju rotacije, simetrije u odnosu na koordinatnu osu, i još jedne rotacije, suprotne prvoj. (Kasnije! ☺)

Ravanska simetrija u 3D

- U 3D posmatramo, umesto osne, ravansku simetriju.
- Napisati matrice simetrija u odnosu na koordinatne ravni!
- Simetrija u odnosu na ravan koja sadrži koordinatni početak i koja je normalna na (jedinični) pravac **n** realizuje se matricom koja je jednaka proizvodu matrica rotacije kojom se vektor **n** dovodi u položaj jednog od koordinatnih jediničnih vektora, simetrije u odnosu na odgovarajuću koordinatnu ravan, i rotacije koja je suprotna (inverzna) prvoj – **u obrnutom redosledu**.

Shearing (smicanje)

Shearing



Shear u 2D

- “Shearing” je transformacija koja “iskrivljuje” koordinatnu ravan, ne-uniformno je istežući.
- Ova transformacija ne očuvava uglove, ali očuvava površine (i zapremine).
- Transformacija se realizuje tako što se umnožak jedne koordinate tačke doda drugoj koordinati.

Shear u 2D – matrice transformacija

Matrice transformacija koje jednoj koordinati dodaju drugu koordinatu, prethodno pomnoženu sa *s*:

$$H_x(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H_y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$$

Shear u 3D – matrice transformacija

- U 3D, “shear” se može realizovati tako što se dvema koordinama doda treća, prethodno pomnožena dvema različitim vrednostima.
- Oznaka *Hxy* odgovara transformaciji u kojoj su *x* i *y* koordinate koje su “iskrivljene” sabiranjem sa umnošcima koordinate z.

$$H_{xy}(s,t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & s\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad H_{xz}(s,t)=\begin{bmatrix}1 & s & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & t & 1\end{bmatrix} \qquad H_{yz}(s,t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ s & 1 & 0\\ t & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Kompozicija transformacija

Kompozicija transformacija

- Transformacija koja je rezultat **kompozicije** linearnih transformacija može se realizovati matricom koja je jednaka **proizvodu matrica** posmatranih transformacija u kompoziciji.
- Matrično množenje, a samim tim i kompozicija linearnih transformacija, je asocijativno, ali nije komutativno.