Linearne transformacije

Matematika za inženjersku grafiku

Linearne transformacije - definicija

- O transformacijama najčešće mislimo u vezi sa geometrijskim objektima u ravni i/ili prostoru, i načinima na koje oni menjaju svoj položaj, i/ili oblik, i/ili veličinu, i druga (geometrijska) svojstva.
- Transformacije ove vrste koje smo pominjali do sada su, recimo, projekcija, simetrija, rotacija, homotetija, translacija, itd. Obično ih nazivamo **geometrijske transformacije**.
- Zahvaljujući Dekartu, imamo na raspolaganju algebarske interpretacije geometrijskih pojmova. Ukoliko uopštimo ono što smo već koristili u radu (računanju) sa vektorima, možemo doći do **algebarske definicije (linearne) transformacije vektorskog prostora**.

Linearna transformacija-definicija

- **Linearna transformacija** vektorskog prostora U u vektorski prostor V, $T:U \to V$, nad poljem P, je preslikavanje sa osobinom da za svako $u_1, u_2 \in U$, i svako $\alpha, \beta \in P$, važi

$$1.\ T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

$$2.\ T(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot T(u_1)$$

ili, ekvivalentno $$T(\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2) = \alpha \cdot T(u_1) + \beta \cdot T(u_2)$$

- Vektorski prostori U, V, koje ćemo najčešće posmatrati su R^n i R^m, a m,n će često biti 2, ili 3. Polje P će najčešće biti skup R.
- Ukoliko je $U \equiv V$, transformacija preslikava prostor sam u sebe, a tada se koristi i termin “linearni operator”.

Linearne transformacije - primeri

- Ispitati da li su

$$1.\ T(v) = \|v\|, \quad T : R^2 \to R$$

$$2.\ T(v) = v + v_0, \quad v_0 \in V, \quad T : R^2 \to R^2$$

$$3.\ T(v) = v, \quad T : R^n \to R^n$$

linearne transformacije.

- Ispitati da li je preslikavanje definisano sa

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2}$$

linearni operator vektorskog prostora svih polinoma sa realnim koeficijentima, stepena manjeg od n.

Linearne transformacije – važne osobine

- Za svaku linearnu transformaciju $T:V\to V$ važi da je

$$T(0)=0$$

Dokaz: $T(x+(-x))=T(x)+T(-x)=T(x)-T(x)=0.$

Napomena: Uočimo da translacija ne očuvava nulu!

- Ako je $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ baza vektorskog prostora V, onda za linearnu transformaciju $T:V\to U$ i svaki vektor $v\in V$ važi da je

$$T(v)=T(\alpha_1\cdot v_1+\alpha_2\cdot v_2+\cdots+\alpha_n\cdot v_n)=\alpha_1T(v_1)+\alpha_2T(v_2)+\cdots+\alpha_nT(v_n)$$

Napomena: Ako je poznato kako linearna transformacija preslikava vektore baze datog prostora, moguće je odrediti slike svih ostalih vektora.

Linearna transformacija definisana pomoću matrice – veoma važan primer

Posmatrajmo proizvoljnu matricu $A_{m\times n}$ i definišimo preslikavanje $T_A : R^n \to R^m$ takvo da je, za $v \in R^n$

$$T_A(v) = Av.$$

Može se pokazati da je ovako definisano preslikavanje linearna transformacija.

Uočavamo:

Svaka matrica definiše jednu linearnu transformaciju.

Primer:

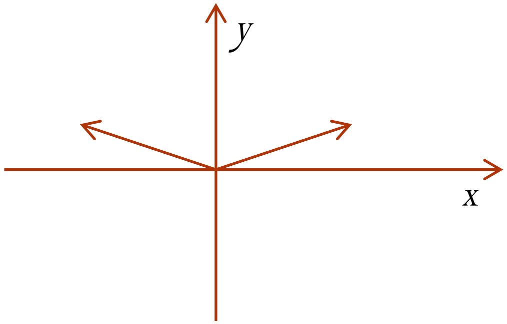
- Linearna transformacija $T_A : R^2 \rightarrow R^2$ definisana matricom

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

realizuje se na sledeći način:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

$$T((x, y)) = (-x, y)$$



Linearna transformacija definisana matricom – zapažanja o primeru

- Uočimo da smo vektor predstavili algebarski, kao uređenu dvojku koordinata.
- Podsetimo se da korišćenje koordinata obavezno podrazumeva korišćenje neke baze vektorskog prostora.
- Ovde smo posmatrali standardnu bazu vektorskog prostora R^2.
- Transformacija vektore ove baze preslikava na sledeći način:

$$T(e_1) = T((1,0)) = (-1,0) = -e_1; \quad A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(e_2) = T((0,1)) = (0,1) = e_2; \quad A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Za svaki drugi vektor v je tada

$$T(v) = T(xe_1 + ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2) = -xe_1 + ye_2 = (-x, y)$$

Linearna transformacija definisana matricom – zapažanja o primeru

- Vezu sa vektorima u ravni obezbeđuje Dekartov pravougli koordinatni sistem.
- Geometrijska interpretacija navedene linearne transformacije definisane pomoću matrice *A* može se dati posmatranjem transformisanih baznih vektora – jediničnih vektora u pravcu koordinatnih osa.
- Transformacija preslikava $T(\vec{i}) = -\vec{i}; \quad T(\vec{j}) = \vec{j}$
- Nije teško uočiti da je ***T*** **osna simetrija** u odnosu na *y*-osu.
- Dakle, linearnu transformaciju zadatu matricom povezali smo sa jednom geometrijskom transformacijom u ravni!

Linearne transformacije i matrice – veoma važna pitanja

- Da li je moguće uraditi obrnuto, odnosno, **da li je moguće za datu linearnu transformaciju rekonstruisati matricu koja je realizuje**?
- **Primer:** Posmatrajmo projekciju na x-osu. Znamo da se ta geometrijska transformacija može definisati kao $T((x,y))=(x,0)$.

  Mogu li da odredim matricu ***A*** takvu da je $T=T_A$, odnosno

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=A\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \quad ?$$

- Pomatrajući vektore baze, zaključujemo $T((1,0))=(1,0)$. $T((0,1))=(0,0)$.
- To znači da za traženu matricu $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ važi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tada je $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Linearne transformacije i matrice -važno tvrđenje

Ako je $T:R^n \to R^m$ linearna transformacija, onda postoji matrica takva da je $A_{m\times n}$

$$T(v) = Av, \quad v \in R^n$$

Uočavamo:

1. Prethodni primer pokazuje kako za datu geometrijsku transformaciju možemo odrediti matricu koja je realizuje.
2. Prethodno tvrđenje kaže da to možemo uraditi za svaku linearnu transformaciju.
3. Dakle, **za svaku linearnu transformaciju postoji matrica koja je realizuje**.
4. Od ranije znamo da se svaka linearna transformacija može realizovati matricom.
5. Između skupa matrica i skupa linearnih transformacija postoji uzajamno jednoznačna korespondencija.

Linearne transformacije i matrice - dokaz važnog tvrđenja

Dokaz: U prostorima R^n, R^m posmatrajmo standardne baze.

Tada za vektor $v \in R^n$ važi:

$$v = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_n \cdot e_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$T(v) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) + \cdots + \alpha_n T(e_n)$$

Pri tome je:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad T(e_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dakle, određene su koordinate slika vektora (standardne) baze polaznog prostora u (standardnoj) bazi rezultujućeg prostora.

Linearne transformacije i matrice - dokaz važnog tvrđenja

Lako je pokazati (direktnom proverom) da je tada matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

tražena **matrica linearne transformacije**.

$$A \cdot v = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + \alpha_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \cdot T(e_1) + \alpha_2 \cdot T(e_2) + \ldots \alpha_n \cdot T(e_n)$$

$$= T(\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots \alpha_n \cdot e_n) = T(v)$$

Linearne transformacije i matrice

Dakle, za svaku linearnu transformaciju postoji matrica koja je realizuje. Da bismo odredili matricu transformacije potrebno je da

1. Datom transformacijom preslikamo vektore (standardne) baze polaznog prostora;
2. Odredimo koordinate preslikanih baznih vektora u bazi rezultujućeg (dolaznog) prostora – ovo se dobija direktno, ukoliko je baza rezultujućeg prostora standardna;
3. Dobijene koordinate navedemo, redom, kao kolone tražene matrice transformacije.

Linearne transformacije i matrice

Primer: Za linearnu transformaciju $T: R^2 \to R^3$ definisanu kao

$$T((x,y)) = (x+3y,\ 0,\ 2x-4y)$$

odrediti matricu ***A***, tako da je $T((x,y)) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Rešenje: Kako su slike baznih vektora

$$T(e_1) = T((1,0)) = (1,0,2),$$
$$T(e_2) = T((0,1)) = (3,0,-4),$$

a to su ujedno i koordinate u standardnoj bazi rezultujućeg prostora, tražena matrica transformacije je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Matrica linearne transformacije za proizvoljnu bazu prostora

Sledeće pitanje je kako odrediti matricu date linearne transformacije za slučaj kada se koriste baze posmatranih prostora koje su različite od standardnih.

Kolone matrice transformacije $T:U\rightarrow V$ sadrže koordinate slika vektora baze $\{u_1,u_2,...,u_n\}$ prostora U, izražene u bazi $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ prostora V.

$$u\in U$$
$$u=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+...+\alpha_n u_n$$
$$T(u)=\alpha_1 T(u_1)+\alpha_2 T(u_2)+...+\alpha_n T(u_n).$$

$$T(u_1)=a_{11}v_1+a_{21}v_2+...+a_{m1}v_m=(a_{11},a_{21},...,a_{m1}),$$
$$T(u_2)=a_{12}v_1+a_{22}v_2+...+a_{m2}v_m=(a_{12},a_{22},...,a_{m2}),$$
$$\vdots$$
$$T(u_n)=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+...+a_{mn}v_m=(a_{1n},a_{2n},...,a_{mn}).$$

Tada je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(u_1)_V & T(u_2)_V & \cdots & T(u_n)_V \\ | & | & & | \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Matrica linearne transformacije za proizvoljnu bazu prostora

Primer: Za linearnu transformaciju $T: R^2 \to R^2$ datu kao

$$T((x,y)) = (x+y,\ -2x+4y)$$

odrediti matricu transformacije za bazu $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$

Rešenje: Posmatrani vektorski prostori imaju istu bazu $\boldsymbol{B}$, koja je različita od standardne. Postupak određivanja matrice transformacije podrazumeva da odredimo slike vektora baze:

$$T(b_1) = T((1,1)) = (2,2) = a_{11}(1,1) + a_{21}(1,2) = 2b_1 + 0b_2 = (2,0),$$
$$T(b_2) = T((1,2)) = (3,6) = a_{12}(1,1) + a_{22}(1,2) = 0b_1 + 3b_2 = (0,3).$$

Dobijene slike su odmah izražene preko vektora baze $\boldsymbol{B}$, a njihove koordinate predstavljaju kolone tražene matrice.

Dakle,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Matrica kompozicije linearnih transformacija

Posmatrajmo sada dve linearne transformacije,

$$F : V \to U \quad \text{i} \quad G : U \to W$$

i njihovu kompoziciju $G \circ F : V \to W$ definisanu kao

$$(G \circ F)(v) = G(F(v)), \quad v \in V.$$

Znamo da postoje matrice transformacija ***F*** i ***G***, takve da je

$$F(v) = [F] \cdot [v] \quad \text{i} \quad G(u) = [G] \cdot [u].$$

Tada je

$$(G \circ F)(v) = G(F(v)) = G([F] \cdot [v]) = [G]([F] \cdot [v])$$
$$= [G] \cdot [F] \cdot [v] = ([G] \cdot [F]) \cdot [v]$$

Dakle, **matrica kompozicije linearnih transformacija jednaka je proizvodu matrica tih transformacija.**

Naglasimo da ni kompozicija preslikavanja, ni množenje matrica nisu komutativne operacije!

Matrica inverzne linearne transformacije

Ako linearna transformacija $T: U \to V$ ima inverznu tzransformaciju $T^{-1}: V \to U$, onda važi da je **matrica inverzne transformacije jednaka inverznoj matrici transformacije**,

odnosno: $\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}$.

Ovo možemo zaključiti na osnovu toga što je

$$(T^{-1} \circ T)(v) = v = I(v),$$
$$\left[T^{-1}\right] \cdot [T] = [I],$$
$$\left[T^{-1}\right] = [T]^{-1}.$$