Vektorski prostori

Matematika za inženjersku grafiku

Vektorski prostori - definicija

- Važna tema kojom ćemo se baviti u nastavku su linearne transformacije.
- Linearne transformacije su preslikavanja vektorskih prostora.
- Vektorski prostor je algebarska struktura $(V,+,\cdot,P)$, koju definišemo posmatrajući skupove V i P, i binarne operacije $+$ i $\cdot$.
  - Skup V zove se skup vektora.
  - Skup P zove se skup skalara.
  - Operacija $+$ zove se sabiranje u skupu vektora.
  - Operacija $\cdot$ zove se množenje skalara i vektora.

Vektorski prostor - definicija

Osobine koje skupovi i operacije treba da ispune da bi $(V,+,\cdot,P)$, bio vektorski prostor su:

- $(V,+)$ je komutativna grupa;
- $(P,+,\cdot)$ je polje, pri čemu su $+,\cdot$ operacije sabiranja i množenja u skupu P (dakle, definisane nad skalarima);
  - $(P,+)$ je komutativna grupa
  - $(P\setminus\{0\},\cdot)$ je komutativna grupa (0 je neutralmi element za $+$)
  - Važi zakon distributivnosti $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad \forall a,b,c\in P$
- Za operaciju $\cdot: P\times V\to V$ važi

$$\alpha\cdot(a+b)=\alpha\cdot a+\alpha\cdot b,\quad \alpha\in P,\ a,b\in V;$$
$$(\alpha+\beta)\cdot a=\alpha\cdot a+\beta\cdot a;\quad \alpha,\beta\in P,\ a\in V$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot a)=(\alpha\cdot\beta)\cdot a$$
$$1\cdot a=a;$$ (1 je jedinični element za $(P\setminus\{0\},\cdot)$)

Vektorski prostori – neki primeri

- Skup V geometrijskih vektora na poljem **R** realnih brojeva, sa operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom.
- Skup R^n uređeih *n*-torki realnih brojeva,nad poljem skalara **R**, sa operacijama sabiranja *n*-torki i množenja *n*-torki skalarom, definisanih po koordinatama.

  Veza između geometrijskih vektora i uređenih trojki koordinata tačaka, gde tački pridružujemo njen vektor položaja, dala je "inspiraciju" za ime algebarske strukture vektorskog prostora.
- Skup svih polinoma po promenljivoj *x*, stepena manjeg od *n*, sa realnim koeficijentima, i operacijama sabiranja polinima i množenja polinoma brojem definisanim na uobičajeni način.
- Skup svih matrica M formata *mxn*, nad poljem **R** realnih brojeva, sa operacijama sabiranja matrica i množenja matrice skalarom.

Potprostor vektorskog prostora

- Skup W vektora iz vektorskog prostora V nad poljem P je potprostor vektorskog prostora V akko je W u odnosu na operacije definisane na V vektorski prostor nad poljem P.

- Ako je V vektorski prostor nad poljem P, a W njegov neprazan podskup, onda važi:

W je potprostor vektorskog prostora V akko je

$$a + b \in W$$
$$\alpha \cdot a \in W, \quad \forall a, b \in W, \forall \alpha \in P$$

Potprostor vektorskog prostora - primeri

Na osnovu prethodnog tvrđenja zaključujemo da je dovoljno da utvrdimo da je podskup W prostora V **zatvoren** u odnosu na definisane operacije, da bismo utvrdili da je W potprostor vektorskog prostora V.

Neki primeri vektorskih potprostora su:

- Skup svih vektora jedne ravni u 3D prostoru geometrijskih vektora je potprostor tog prostora.
- Skup svih vektora koji pripadaju jednoj pravoj u 3D prostoru geometrijskih vektora je potprostor tog prostora.
- Skup svih polinoma sa realnim koeficijentima stepena manjeg od m je potprostor prostora polinoma stepena manjeg od n, ako je $m<n$.

Potprostor vektorskog prostora - primeri

Navesti neke primere podskupova vektorskih prostora koji **nisu potprostori** tih vektorskih prostora!

Da li svaki vektorski prostor ima potprostor?

Linearna kombinacija vektora

- Za skup vektora vektorskog prostora V i izbor skalara polja P, formiramo **linearnu kombinaciju vektora** na sledeći način:

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n$$

- Za svaki neprazan podskup W vektora vektorskog prostora V, skup svih linearnih kombinacija vektora iz W čini potprostor prostora V. Takav potprostor je **generisan** skupom W.
- Vektori skupa W zovu se još i **generatori** potprostora W.

Primeri:

- U skupu geometrijskih vektora 3D prostora svaka tri nekoplanarna vektora generišu prostor V.
- Dva nekolinearna vektora ovog prostora generišu ravan – potprostor prostora V.
- Jedan ne-nula vektor generiše pravu (potprostor 3D prostora geometrijskih vektora).

Linearna zavisnost vektora

- Skup W vektora vektorskog prostora V je **linearno nezavisan** ukoliko je linearna kombinacija tih vektora jednaka nuli akko su svi skalari u toj kombinaciji istovremeno jednaki nuli.
- Ili: Skup vektora $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset V$ je **linearno zavisan** ukoliko postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P$ od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + ... + \alpha_n \cdot a_n = 0$$

- Ekvivalentna definicija: **Skup vektora koji ne sadrži nula-vektor je linearno zavisan akko se jedan od njih može izraziti kao linearna kombinacija ostalih.**

Linearna zavisnost vektora

Primer:

Utvrditi da li su skupovi vektori iz postora $\boldsymbol{R}^3$

- $\{(1,0,1), (2,1,3), (2,2,4)\}$
- $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

linearno zavisni.

Baza vektorskog prostora

- **Baza vektorskog prostora** V je
    - uređen,
    - linearno nezavisan,
    - generatorni skup

vektora prostora V.

Baza B vektorskog protora je, dakle, minimalan (uređen) generatorni skup prostora V. Ovo znači:

1. Svaki vektor prostora V može se napisati kao linearna kombinacija vektora baze B.
2. Baza B je najmanji skup vektora sa tom osobinom (izuzimanjem bilo kog elementa skupa B on prestaje da bude generatoran za V).

Baza vektorskog prostora - primeri

- Za vektorski prostor svih polinoma sa realnim koeficijentima, stepena manjeg od m, baza je $\{1, x, x^2, ..., x^{m-1}\}$. Svaki polinom stepena manjeg od m može se napisati kao linearna kombinacija elemenata ove baze.
- Za vektorski prostor geometrijskih vektora u 3D svaki skup tri nekoplanarna vektora čini bazu ovog prostora. Uobičajeno je birati tri jedinična uzajamno ortogonalna vektora, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- Za vektorski prostor R^n jednu bazu čine vektori

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad ..., \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ova baza naziva se **standardna baza** protora R^n

Dimenzija vektorskog prostora

- Sve baze jednog vektorskog prostora imaju jednak broj vektora.
- Ako je broj vektora baze vektorskog prostora konačan, vektorski prostor se naziva **konačnodimezionalan**.
- Broj vektora baze konačnodimenzionalnog prostora naziva se **dimenzija** vektorskog prostora.

- **Svaki *n*-dimenzionalan realan vektorski prostor izomorfan je sa vektorskim prostorom** R^n. To omogućava da izučavanje svih *n*-dimenzionalnih vektorskih prostora svedemo na izučavanje prostora R^n.
- Napomena: Izomorfizam dva prostora je bijektivno preslikavanje koje ima osobinu da je slika zbira vektora jednaka zbiru slika tih vektora, i da je slika vektora pomnoženog skalarom jednaka slici vektora pomnoženoj istim skalarom.

Koordinate vektora u datoj bazi

Važna osobina baze B vektorskog prostora V je:

Svaki vektor prostora V se na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze.

S obzirom da je baza **uređen** skup vektora, skalari u svakoj linearnoj kombinaciji tih vektora navode sa određenim redosledom, odnosno, kao uređena *n*-torka. Dakle, ako je za uređen skup $B=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i $x\in V$ zadovoljeno

$$x=\alpha_1\cdot a_1+\alpha_2\cdot a_2+\ldots+\alpha_n\cdot a_n$$

onda uređena *n*-torka $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ predstavlja **koordinate vektora** x u bazi B.

Svakom vektoru odgovara **jedinstvena** *n*-torka koordinata za datu bazu.

Koordinate vektora u datoj bazi

- Uočimo da su koordinate vektora vezane za određenu bazu. Tako za bazu $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ vektorskog prostora V i vektor $v \in V$ za koji je

$$v = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \ldots + \alpha_n \cdot b_n$$

pišemo

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

- Vektori baze ne moraju obavezno da budu ni ortogonalni, ni jedinični (normirani). Ukoliko jesu, koordinate vektora u **ortonormiranoj bazi** možemo odrediti korišćenjem **skalarnog proizvoda** vektora sa svakim od vektora baze.
- Ako baza nije ortonormirana, koordinate se ne mogu odrediti primenom skalarnog proizvoda! (Primer u ravni…)