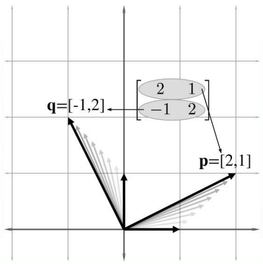
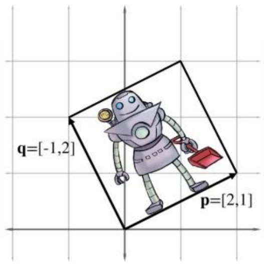
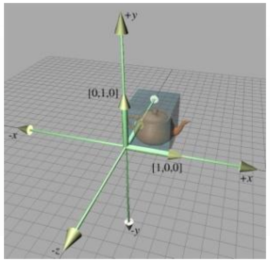
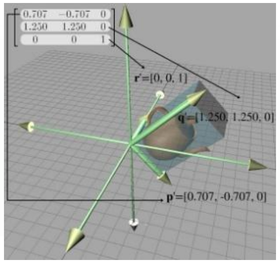








$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 1.250 & 1.250 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uvod (dalje):
Matrice

Definicija, Algebra

- Matrica je pravougaona šema (tabela) skalara.
- Format (dimenziju) matrice određuje broj njenih vrsta (m) i broj njenih kolona (n). Dimenzija je tada mxn.
- Najčešće ćemo koristiti matrice formata 2x2, 3x3 i 4x4.

Elementi matrice

Elementi matrice se navode sa indeksom koji pokazuje kojoj vrsti i kojoj koloni matrice pripada posmatrani element.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrica

- Kvadratna matrica ima isti broj vrsta i kolona.
- Elementi m_{ii} pripadaju glavnoj dijagonali (kvadratne) matrice.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

Dijagonalna matrica

Dijagonalna matrica je ona matrica čiji su svi elementi koji ne pripadaju glavnoj dijagonali jednaki nuli.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vektori kao matrice

- Vektor-vrsta je matrica formata 1 x *n*.
- Vektor-kolona je matrica formata *m* x 1.
- Mada je i dalje dozvoljeno predstavljati i vektore-vrste i vektore-kolone, jasno je da nije u svakoj situaciji svejedno koji oblik koristimo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Transponovana matrica

- Transponovana matrica matrice **M** formata *r* x *c* je matrica formata *c* x *r* koju značavamo sa **M^T^**.
- Dobijamo je tako što vrstama i kolonama matrice zamenimo uloge.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Osobine transponovane matrice

- Za svaku matricu **M** važi: $(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}$.
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$ za svaku dijagonalnu matricu **D**.
- Transponovanjem vektora-vrste dobijamo vektor-kolonu, i obrnuto.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

Množenje matrice skalarom

- Svaka matrica se može pomnožiti skalarom.
- Rezultat je matrica istog formata.
- Matricu množimo tako što skalarom pomnožimo sve njene elemente.

$$k\mathbf{M} = k\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} km_{11} & km_{12} & km_{13} \\ km_{21} & km_{22} & km_{23} \\ km_{31} & km_{32} & km_{33} \\ km_{41} & km_{42} & km_{43} \end{bmatrix}$$

Množenje dve matrice

Množenjem matrice **A** formata *r* x *n* i matrice **B** formata *n* x *c* dobija se matrica **AB** čiji je format *r* x *c*.

$$
\underset{\substack{r \times n \\ 4 \times 2}}{\overset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}}
\quad
\underset{\substack{n \times c \\ 2 \times 5}}{\overset{\mathbf{B}}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}}}
\quad = \quad
\underset{\substack{r \times c \\ 4 \times 5}}{\overset{\mathbf{AB}}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}}}
$$

Množenje dve matrice

- Elementi matrice **C** = [*cij*]= **AB** formata *r* x *c* su jednaki skalarnom proizvodu *i*-te vrste matrice **A** i *j*-te kolone matrice **B**.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix}$$

$$c_{24} = a_{21} b_{14} + a_{22} b_{24}$$

Jedinična matrica

- Jedinična matrica **I** je dijagonalna matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1.
- Važi da je za svaku matricu **M** (odgovarajuće dimenzije) **IM** = **MI** = **M.**
- Jedinična matrica je jedinični (neutralni) element za operaciju množenja matrica.

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica - osobine

- **Nije komutativno**: u opštem slučaju je $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.
- Asocijativno:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

- Asocijativno u odnosu na množenje skalarom:

$$k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

Množenje matrice i vektora

Matricu možemo pomnožiti vektorom-vrstom sa leva. Tada skalarno množimo sa kolonama matrice.

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{21} + zm_{31} & xm_{12} + ym_{22} + zm_{32} & xm_{13} + ym_{23} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

Množenje matrice i vektora

Matricu možemo pomnožiti vektorom-kolonom sa desna. Tada skalarno množimo vrste matrice.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xm_{11} + ym_{12} + zm_{13} \\ xm_{21} + ym_{22} + zm_{23} \\ xm_{31} + ym_{32} + zm_{33} \end{bmatrix}$$

Množenje matrica i vektora

Komutativnost množenja matrica i vektora

$$\mathbf{M}\mathbf{v}^T \neq (\mathbf{v}\mathbf{M})^T, \quad \text{ali} \quad \mathbf{M}\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}\mathbf{M}^T)^T$$

Asocijativnost množenja matrica i vektora

- Ako je **v** vektor-vrsta: $\mathbf{v}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{vA})\mathbf{B}$
- Ako je **v** vektor-kolona: $(\mathbf{AB})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{Bv})$

Uočimo da

$$\mathbf{v}(\mathbf{AB}) \neq (\mathbf{AB})\mathbf{v}^T$$

ali je $\quad (\mathbf{AB})\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}(\mathbf{AB})^T)^T = (\mathbf{v}(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T))^T$

Determinanta matrice

- Determinanta je definisana za kvadratne matrice.
- Determinantu matrice **M** označavamo sa

  |**M**| ili det(**M**).
- Determinanta matriice **M** formata 2x2 je

$$|\mathrm{M}| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$$

Determinanta reda 3 (matrice formata 3x3)

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} \\ & - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \quad & m_{11}(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}) \\ & + m_{12}(m_{23}m_{31} - m_{21}m_{33}) \\ & + m_{13}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) \end{aligned}$$

Determinanta i mešoviti proizvod vektora

Ako vrste matrice formata 3x3 interpretiramo kao vektore, onda je determinanta te matrice jednaka **mešovitom proizvodu** tih vektora:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_y b_z - a_z b_y)\, c_x \\ + (a_z b_x - a_x b_z)\, c_y \\ + (a_x b_y - a_y b_x)\, c_z \end{array} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

Minor

- U matrici **M** formata *r* x *c* izostavimo *i*-tu vrstu i *j*-tu kolonu.
- Dobijamo matricu formata *r*-1 x *c*-1.
- Determinanta dobijene pod-matrice naziva se **minor** M_{ij} matrice **M**.
- Primer: Minor M_{12} date matrice **M** formata 3x3 je

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow M^{\{12\}} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

Kofaktor

- **Kofaktor** C_{ij} kvadratne matrice **M** je

$$C^{\{ij\}} = (-1)^{i+j} M^{\{ij\}}$$

- Determinanta matrice **M**=[m_{ij}] formata *nxn* može se izračunati kao

$$|\mathrm{M}| = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} C^{\{ij\}} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} (-1)^{i+j} M^{\{ij\}}$$

Determinanta reda 4

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

$$= m_{11}\begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} - m_{12}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ m_{13}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{44} \end{vmatrix} - m_{14}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{vmatrix}$$

O determinantama

- Determinanta jedinične matrice jednaka je 1.
- Determinanta proizvoda matrica jednaka je proizvodu determinanti:

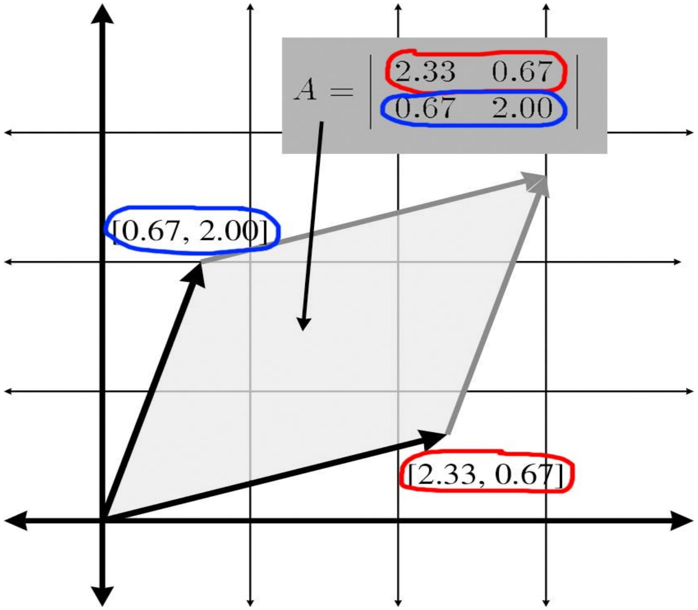
$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|.$$

- Determinanta matrice jednaka je determinanti njoj transponovane matrice:

$$|\mathbf{M}^{\mathbf{T}}| = |\mathbf{M}|.$$

Geometrijska interpretacija, 2D

- U 2D, apsolutna vrednost determinante je jednaka površini paralelograma koji obrazuju (vektori) vrste determinante.



Geometrijska interpretacija, 3D

- U 3D, apsolutna vrednost determinante je jednaka zapremini paralelepipeda čije su ivice (vektori) vrste determinante.

- Povezivanjem matrica sa transformacijama u ravni i prostoru, dovešćemo u vezu determinantu matrice sa promenom veličine objekta pri transformaciji. Determinanta daje informaciju i o vrsti transformacije.

Inverzna matrica

• Inverzna matrica kvadratne matrice **M**, koju označavamo sa $\mathbf{M}^{-1}$, je matrica koja zadovoljava uslov da je

$$\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{M} = \mathbf{I}.$$

•Nema svaka matrica inverznu matricu. Primer je matrica koja sadrzi nula-kolonu ili nula- vrstu.

•Ako matrica ima inverznu matricu, kažemo da je regularna, ili invertibilna. U protivnom je singularna.

Determinanta i inverzna matrica

- Matrica je regularna ako i samo ako je njena determinanta različita od nule.
- Inverzna matrica je tada

$$M^{-1} = adj\ \mathbf{M} \ / \ |\mathbf{M}|$$

gde je *adj* **M** adjungovana matrica matrice **M.**

Adjungovana matrica matrice **M** je transponovana kofaktor matrica te matrice.

Adjungovana matrica, primer

Za matricu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

kofaktori su

$$C^{\{11\}} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 6 \qquad C^{\{12\}} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C^{\{13\}} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$C^{\{21\}} = -\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 9 \qquad C^{\{22\}} = +\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C^{\{23\}} = -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13$$

$$C^{\{31\}} = +\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad C^{\{32\}} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 \qquad C^{\{33\}} = +\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

Adjungovana matrica, primer

Adjungovana matrica matrice M je tada

$$\text{adj } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} C^{\{11\}} & C^{\{12\}} & C^{\{13\}} \\ C^{\{21\}} & C^{\{22\}} & C^{\{23\}} \\ C^{\{31\}} & C^{\{32\}} & C^{\{33\}} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 9 & 1 & 13 \\ 0 & -8 & -8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ -2 & 13 & -8 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica, primer

Za posmatranu matricu:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} = \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & -8 \\ -2 & 13 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & -3/8 & 0 \\ 1/12 & -1/24 & 1/3 \\ 1/12 & -13/24 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Druge metode izračunavanja inverzne matrice

- Inverznu matricu možemo izračunati i postupkom koji se zasniva na Gausovom postupku eliminacije.
- Ovaj postupak je veoma popularan i u širokoj upotrebi. Pogodan je kada su matrice sa kojima radimo velikog formata, ili pogodne strukture.
- Za “male” matrice, formata 2x2, 3x3 i 4x4, sa kojima se najčešće i susrećemo u računarskoj grafici, metod koji koristi adjungovanu matricu je brži i zbog toga pogodniji.

Neke osobine inverzne matrice

- Za regularnu matricu **M** važi: $(\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M}$.
- Jedinična matrica je sama sebi inverzna: $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$.
- Postoje i druge matrice koje su same sebi inverzne, tj. za koje je $\mathbf{M}^2 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{I}$.

Sa nekima ćemo se sretati kada budemo govorili o transformacijama.

- Inverzna matrica transponovane matrice je jednaka transponovanoj inverznoj matrici:

$$(\mathbf{M}^{T})^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^{T}$$

Još neke osobine inverzne matrice

- Inverzna matrica proizvoda matrica jednaka je proizvodu inverznih matrica u obrnutom redosledu:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- Determinanta inverzne matrice jednaka je recipročnoj vrednosti determinante matrice:

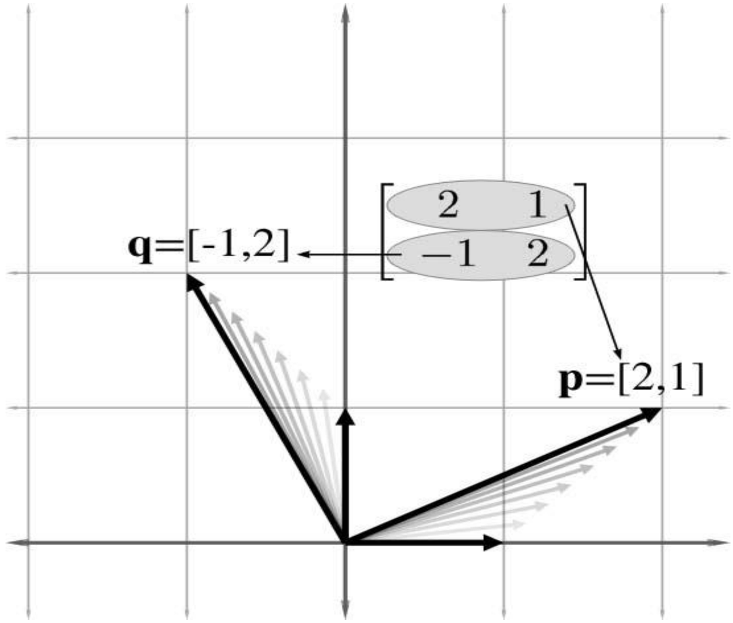
$$|\mathbf{M}^{-1}| = 1/|\mathbf{M}|.$$

Primer geometrijske interpretacije, 2D

- Šta “radi” sledeća matrica?

(Preciznije, pitanje bi trebalo da bude
 ”Koju transformaciju u ravni realizuje data matrica”,
ali o tome još nismo pričali...)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



- Vektori vrste matrice **M** su

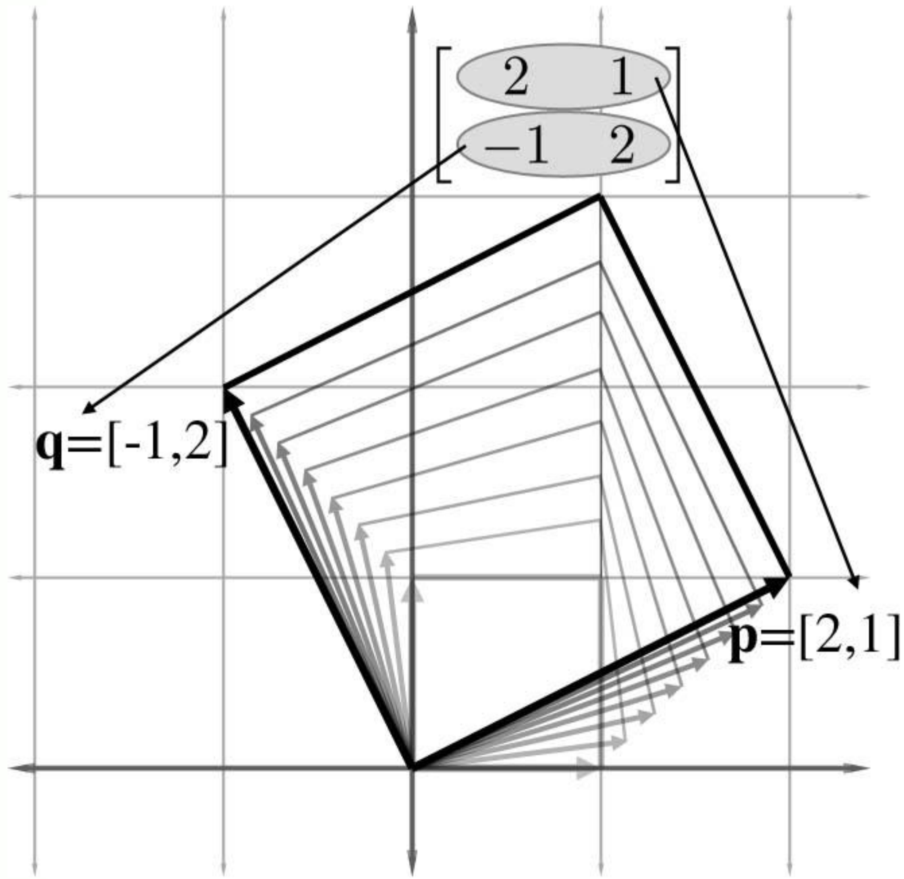
p = [2 1]

q = [-1,2]

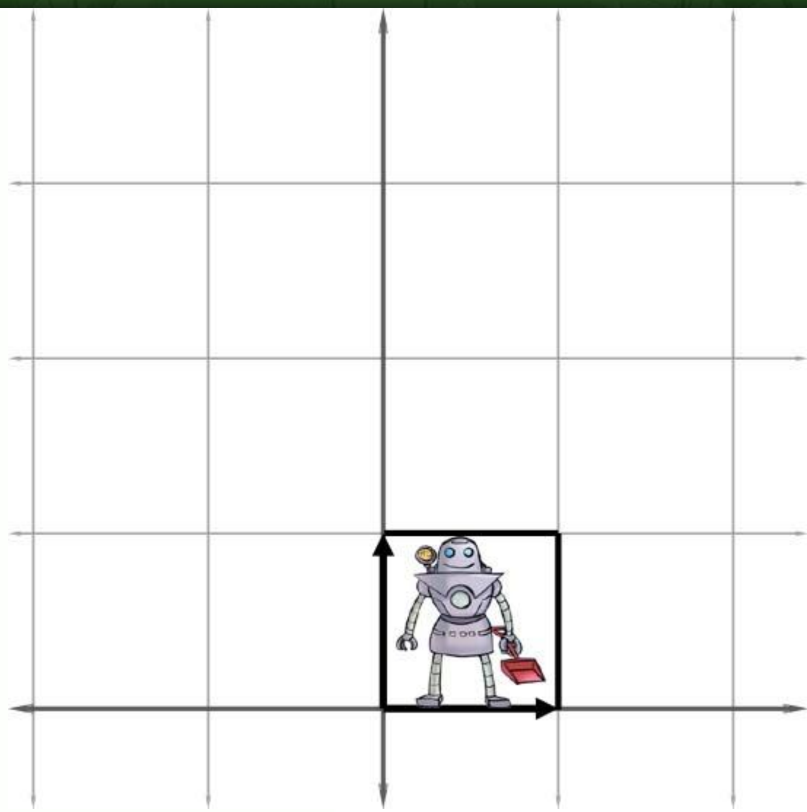
Primer geometrijske interpretacije, 2D

- Interpretirajmo sliku tako što uočimo da se jedinični vektori koordinatnih osa [1, 0] i [0, 1] (koji su ortonormirana baza posmatranog prostora) transformišu, **množenjem matrice M**, u vektore **p** i **q.**
- Na isti način transformišemo celu ravan (koordinatni sistem i sve vektore).
- Možemo vizuelno pratiti jedinični kvadrat i njegovu transformaciju. U ovom slučaju, on se preslikava u kvadrat, ali veći i rotiran.

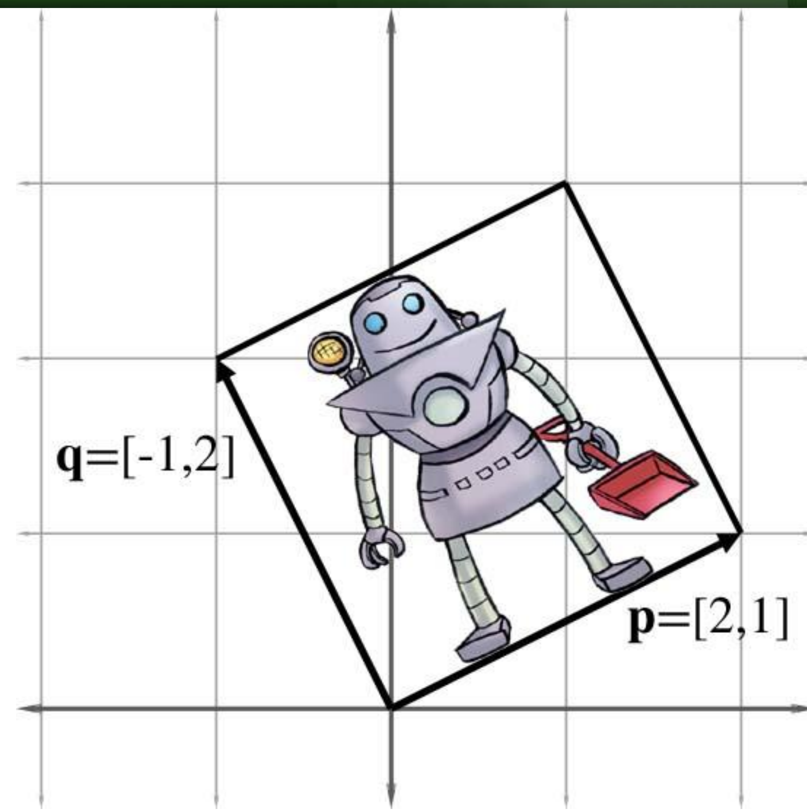
Primer geometrijske interpretacije, 2D



Primer geometrijske interpretacije, 2D



Pre



Posle

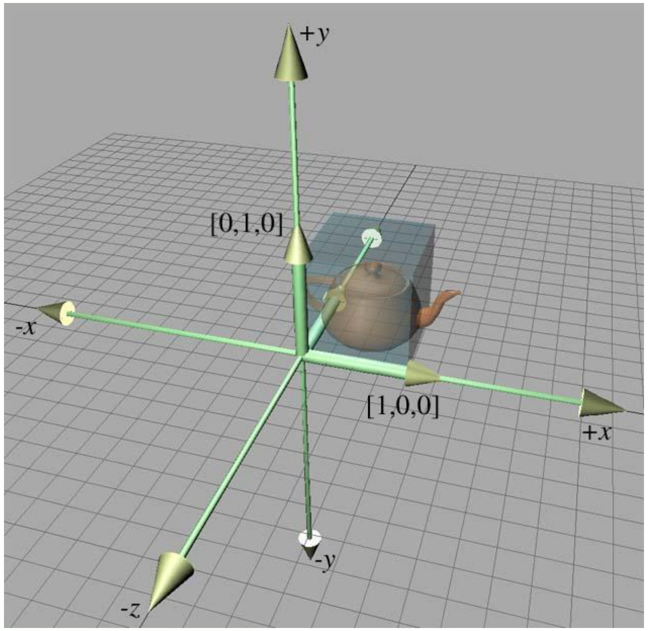
Dakle, šta realizuje navedena matrica?

"Primenjena" na vektore ravni, matrica ih

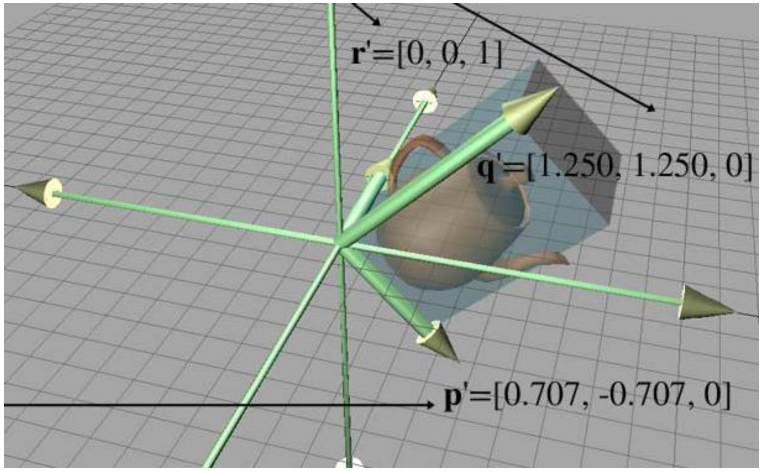
- rotira suprotno od smera kazaljke na satu, za neki ugao, i
- povećava njihovu dužinu (intenzitet) 2 puta.

Matricu smo "primenili" na vektore tako što smo vektore pomnožili matricom.
Zgodno je što je dovoljno da pomnožimo samo bazne vektore!

Primer geometrijske interpretacije, 3D

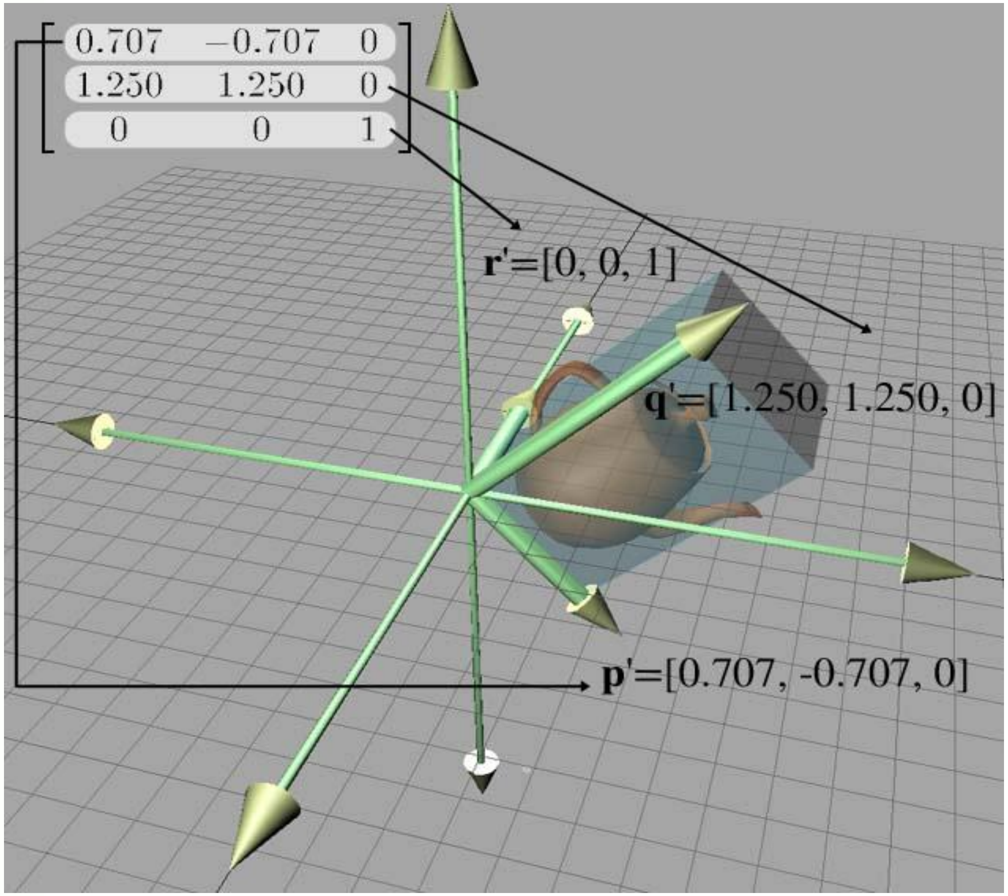


Pre



Posle

Primer geometrijske interpretacije, 3D



Primer geometrijske interpretacije, 3D

Formiramo matricu čije su vrste vektori u koje su se preslikali jedinični vektori koordinatnih osa:

$$\begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 \\ 1.250 & 1.250 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ova matrica realizuje transformaciju koja

- Rotira objekat u smeru kazaljke na satu za ugao 45°.
- Povećava (skalira) objekat (samo) u pravcu *y* ose.