Perspektivna projekcija

Centralna projekcija i homogene koordinate

- Nakon što smo uveli homogene koordinate, koristili smo samo vrednosti $w = 1$ i $w = 0$.
- Nije iznenađujuće da i drugi izbori vrednosti w mogu da budu interesantni.
- Pozabavićemo se perspektivnom projekcijom i uočiti dalje mogućnosti korišćenja homogenih koordinata.
- Podsećamo se da smo do sada pominjali ortografsku (paralelnu) projekciju.

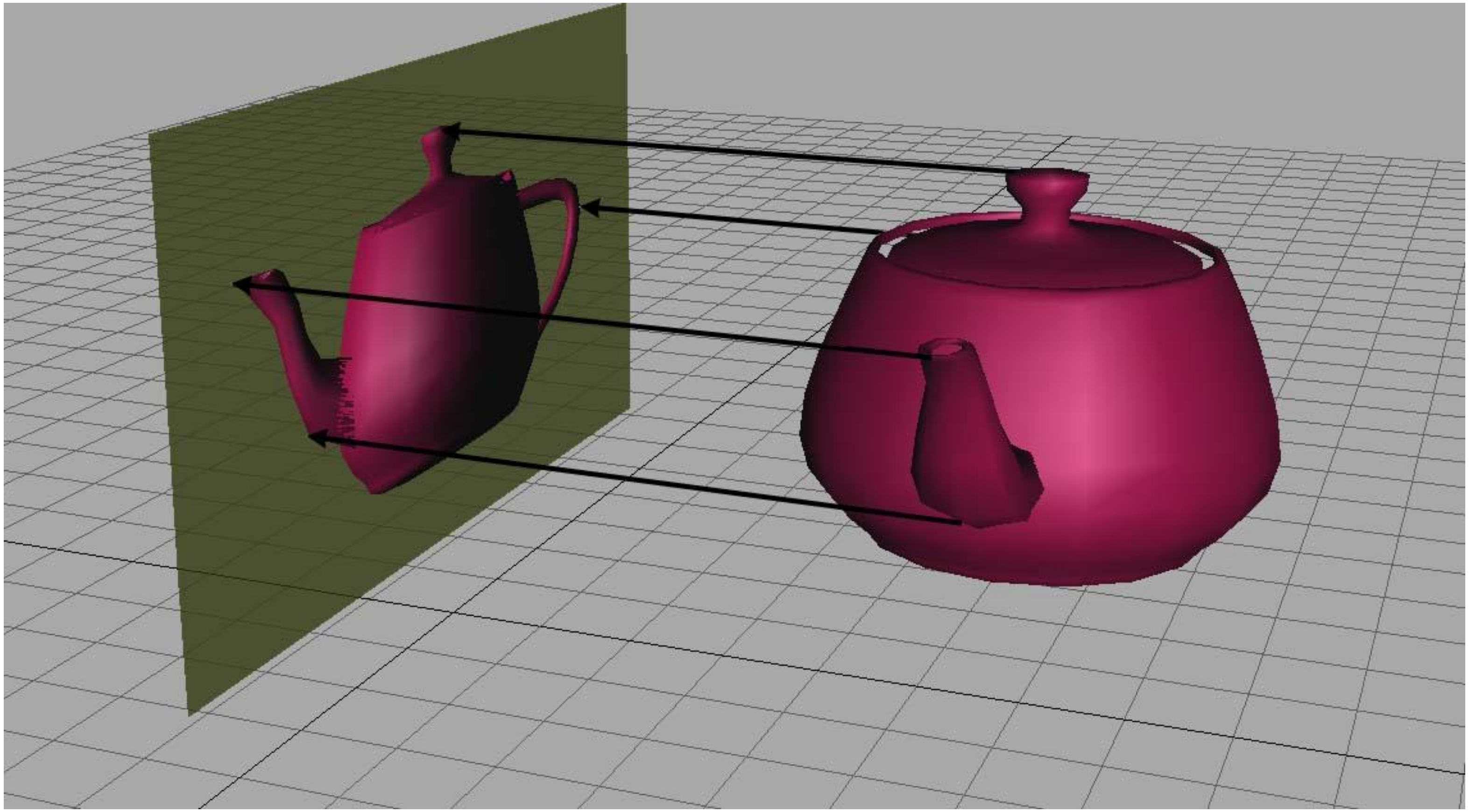
Ortografska projekcija

•Ortografsku projekciju karakterišu **paralelni projektori.**
Projektori su prave određene odgovarajućim parom tačaka-originalom koji pripada skupu koji projektujemo i slikom koja se nalazi u ravni na koju projektujemo.

•Projekcija je uvek iste veličine kao original, nezavisno od rastojanja između objekta i projekcijske ravni.

•Često je, međutim, potrebno da se sa povećanjem rastojanja slike objekata smanjuju.

Ortografska projekcija

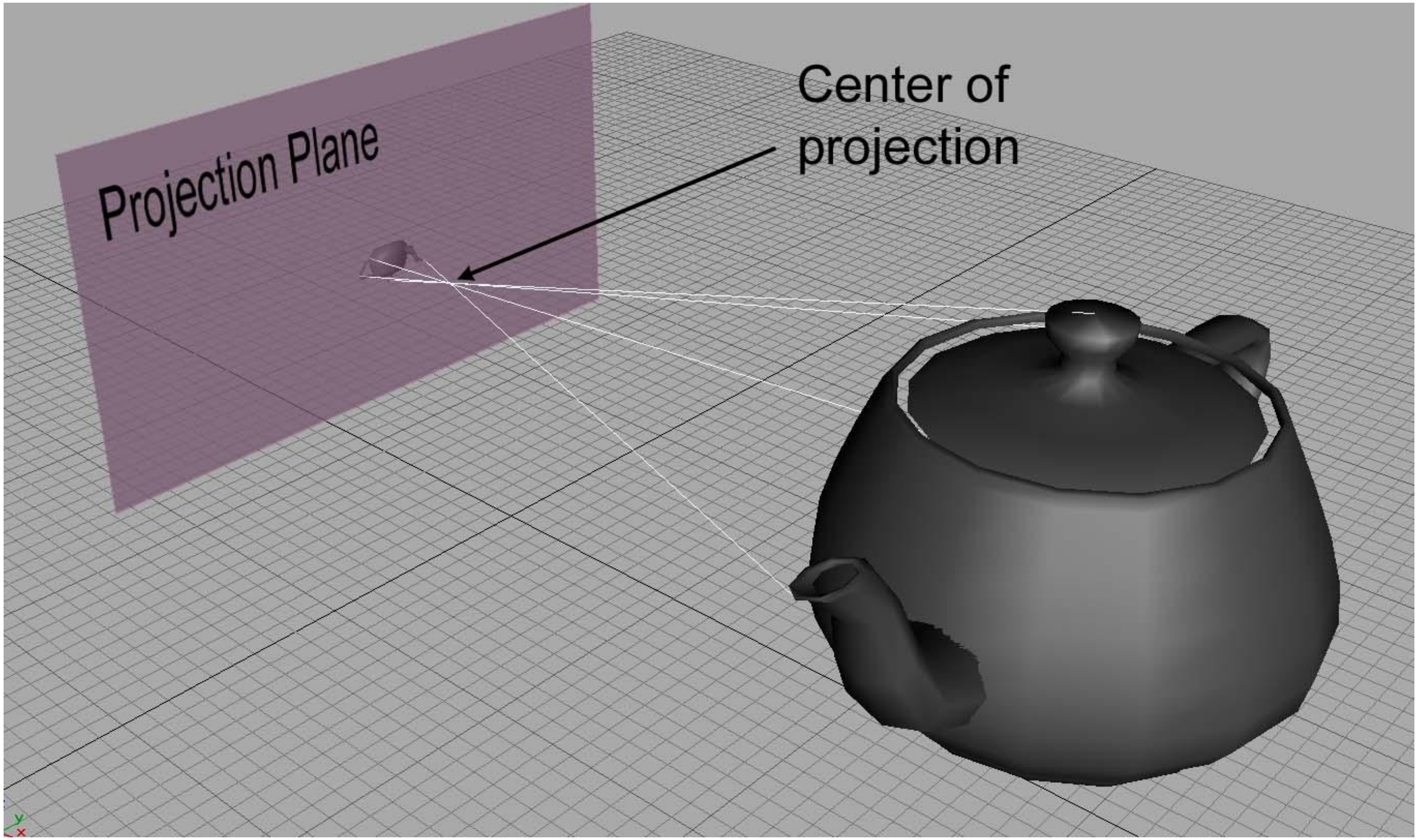


Perspektivna projekcija

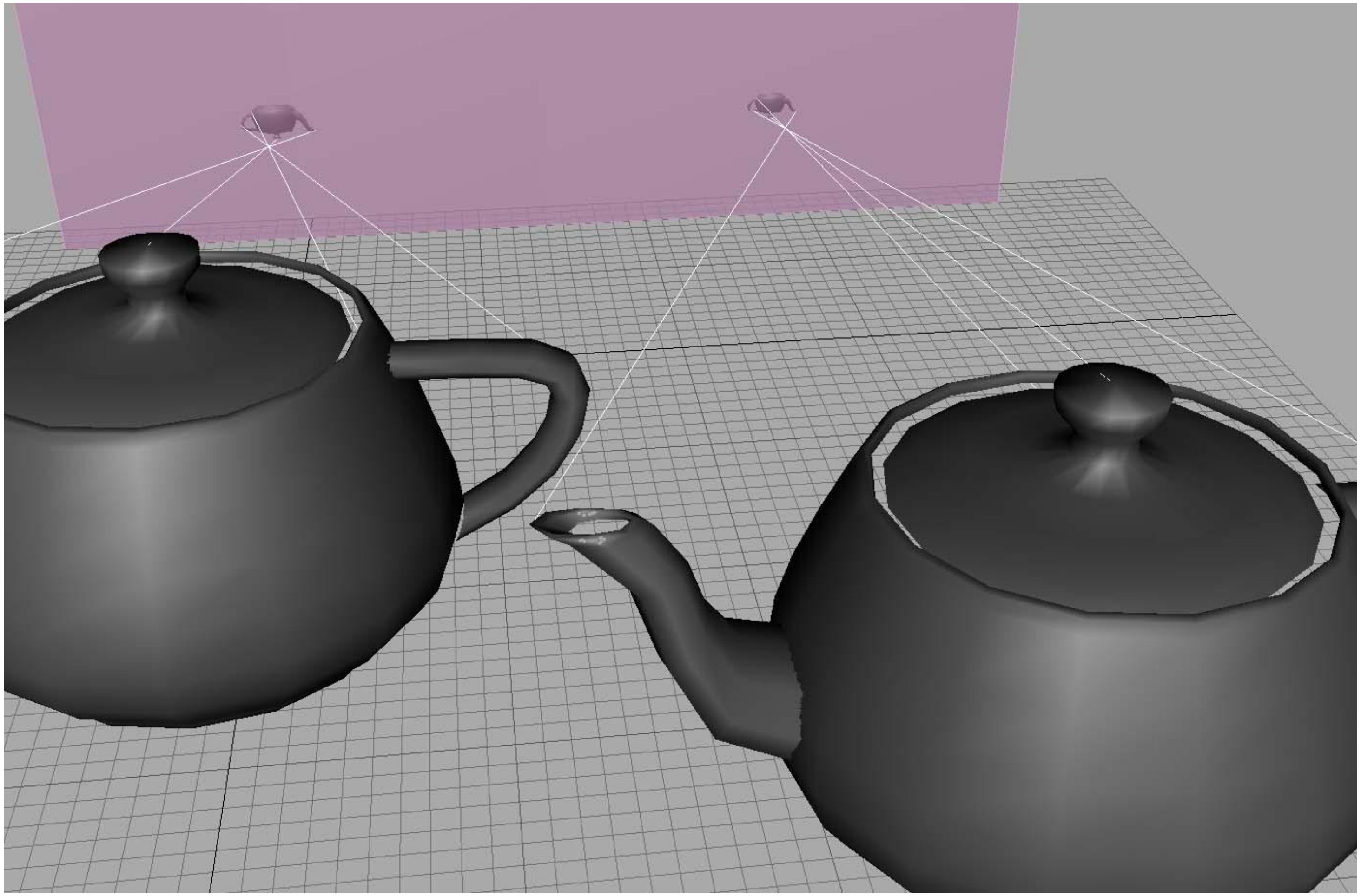
- Perspektivnu projekciju karakterišu **projektori koji se seku u jednoj tački – centru projekcije**.
- Ako je centar projekcije ispred projekcijske ravni, projektovana slika je obrnuta.
- Pri perspektivnoj projekciji veličina slike se menja u zavisnosti od promene rastojanja objekta od projekcijske ravni. Bliži objekti imaju veću sliku.

- Ova pojava je poznata kao **perspektivno skraćenje**.

Perspektivna projekcija

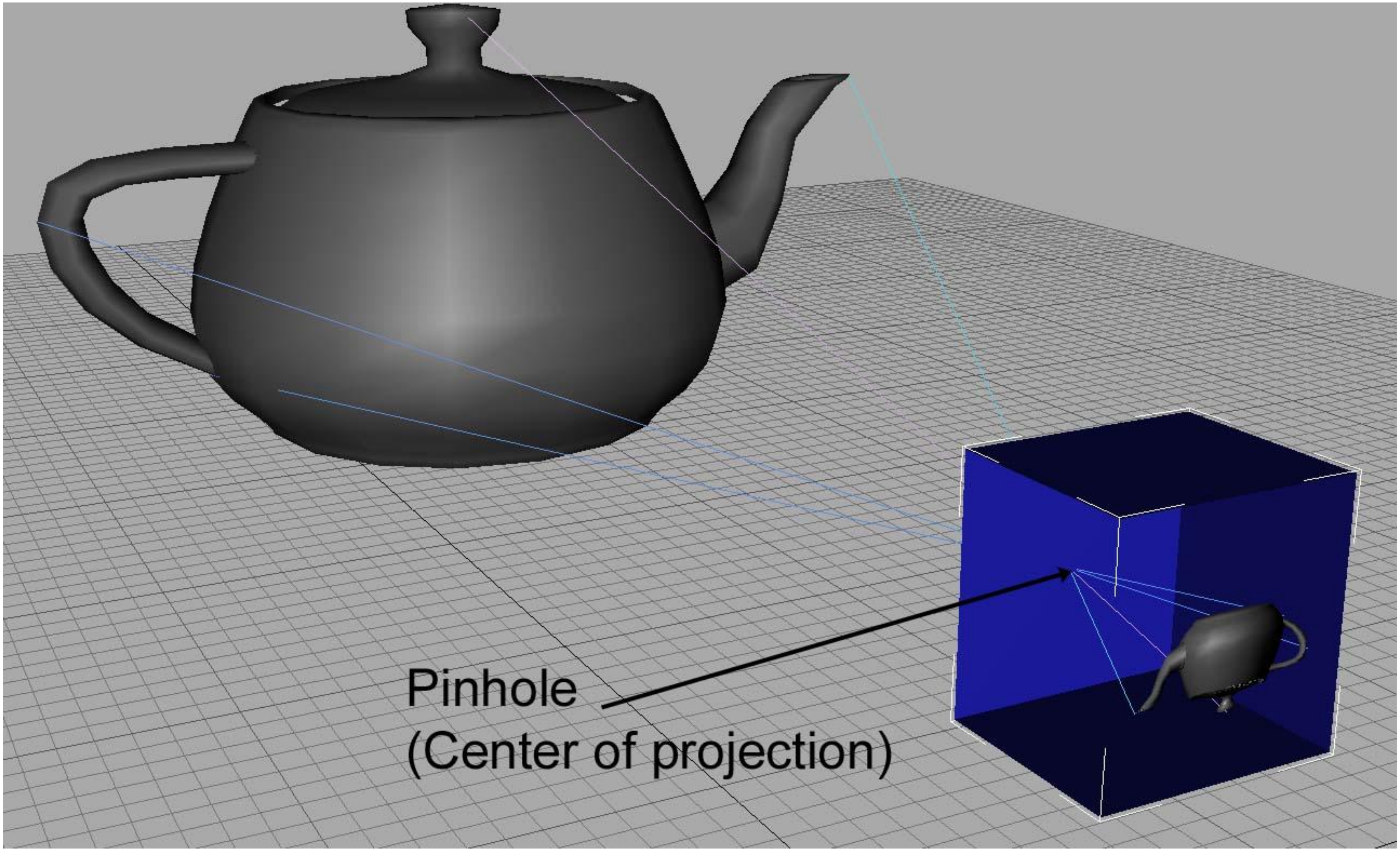


Perspektivno skraćenje



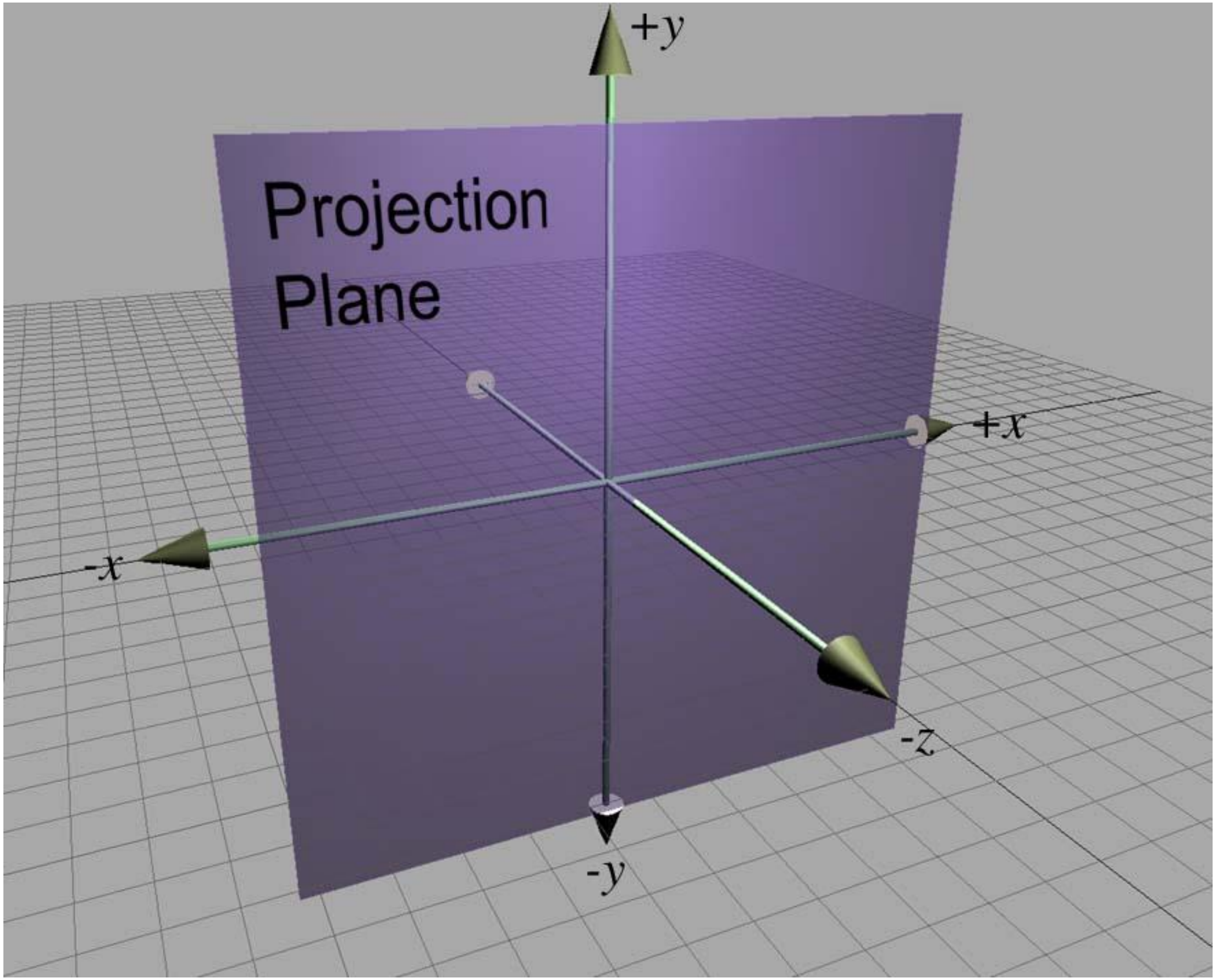
The Pinhole Camera (Kamera obskura)

- Perspektivna projekcija modeluje princip na kom se zasniva vizuelni sistem čoveka.
- Pojednostavljen model - **Pinhole camera**.
- Zatvorena (iznutra tamna) kutija sa jako malim otvorom na jednoj bočnoj strani.
- Svetlosni zrak koji prolazi kroz otvor u kutiju se projektuje na suprotnu (unutrašnju) stranicu kutije – ravan projekcije.
- Otvor je tačka u kojoj se seku svi svetlosni zraci (projektori).
- Projektovana slika na suprotnoj strani je obrnuta.


Pinhole
(Center of projection)

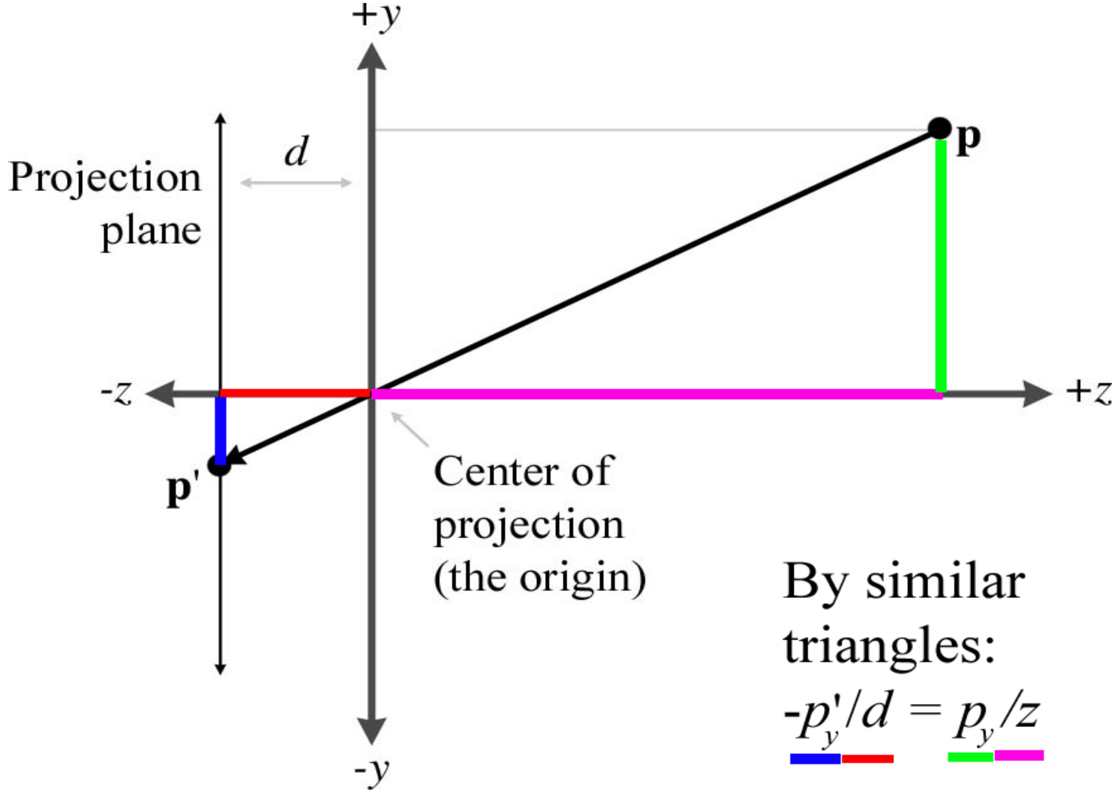
Geometrija perspektivne projekcije

- Posmatrajmo ravan projekcije paralelnu sa *xy*-koordinatnom ravni.
- Postavimo otvor (pinhole) na rastojanju *d* od ravni projekcije. Ovo rastojanje se zove **fokalno rastojanje.**
- "Otvor" (pinhole) se naziva **fokalna tačka**.
- Postavimo koordinatni početak u fokalnu tačku, a *z*-osu tako da bude ortogonalna na ravan projekcije (čija je jednačina tada $z=-d$)


+y
Projection
Plane
+x
-x
-z
-y

Matematika perspektivne projekcije

- Odredićemo koordinate slike **p**′ date tačke **p.**
- Posmatramo položaj objekata u *yz*-ravni.



Matematika perspektivne projekcije

Na osnovu osobina sličnih trouglova, dobijamo

$$\frac{-p'_y}{d} = \frac{p_y}{z} \quad \Longrightarrow \quad p'_y = \frac{-dp_y}{z}$$

Primenjujući isto u *xz*-ravni, dobijamo

$$p'_x = \frac{-dp_x}{z}$$

Matematika perspektivne projekcije

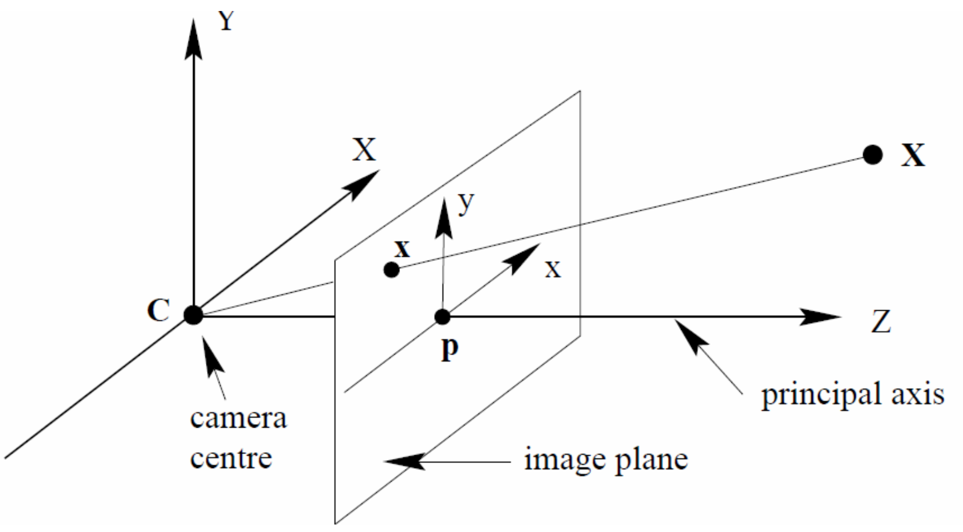
z-koordinata svake projektovane tačke ima vrednost $-d$.

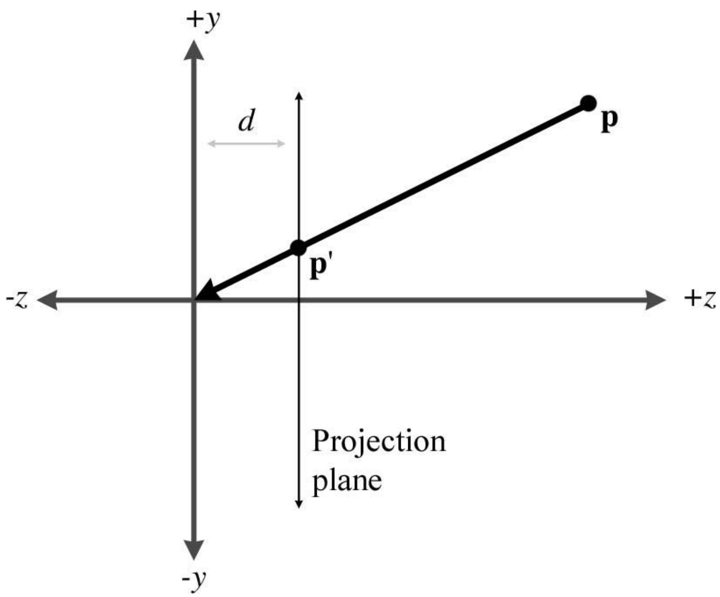
Zaključujemo:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx/z \\ -dy/z \\ -d \end{bmatrix}$$

Perspektivna projekcija u praksi

U praksi, ravan projekcije je ispred fokalne tačke:





Perspektivna projekcija u praksi

Gubimo negativan predznak i pojednostavljujemo zapis.

Umesto:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dx/z \\ -dy/z \\ -d \end{bmatrix}$$

dobijamo:

$$\mathbf{p}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx/z \\ dy/z \\ d \end{bmatrix}$$

Perspektivna projekcija i matrica

- Ispostavlja se da možemo zapisati perspektivnu projekciju koristeći matrično množenje i matricu formata 4x4.
- Uočimo da je

$$p' = \begin{bmatrix} \frac{d \cdot x}{z} \\ \frac{d \cdot y}{z} \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d \cdot x}{z} \\ \frac{d \cdot y}{z} \\ \frac{d \cdot z}{z} \end{bmatrix} = \frac{d}{z} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Perspektivna projekcija i matrica

- Homogene koordinate navedene tačke su

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix}$$

- Uočimo da je *w=z/d,* i da deljenjem ostalih koordinata sa w dobijamo prethodno navedene Euklidske koordinate iste tačke.

Matrica perspektivne projekcije

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix}$$

ili, množenjem sa d

$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ z \end{bmatrix}$$

Zapažanja

- Množenje navedenom matricom ne realizuje perspektivnu projekciju, već preslikava Euklidsku tačku predstavljenu homogenim koordinatama u homogenu tačku sa odgovarajućom vrednošću za *w*.
- Transformacija se realizuje kada dobijenu homogenu tačku, deljenjem sa w, preslikamo u Euklidsku tačku.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{z} \\ \frac{dy}{z} \\ d \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx}{z} \\ \frac{dy}{z} \\ d \end{bmatrix}$$

- Varijacije u navedenim izrazima mogu biti posledica malo drugačijih polaznih pretpostavki i konvencija.

Zapažanja

- Zapis transformacije u obliku matrice, što je ovde omogućeno uvođenjem homogenih koordinata, obezbeđuje da se transformacija može “komponovati” sa drugim transformacijama jednostavno primenjujući matrično množenje.
- Homogene koordinate i matrični zapis omogućavaju i jednostavno izvođenje perspekivne projekcije na ravan koja nije paralelna sa koordinatnom ravni.