Klasifikacija transformacija u ravni i prostoru

Geometrije

Geometrija izučava svojstva koja ostaju očuvana (**invarijante**) pri pojedinim grupama transfomacija.

Projektivna geometrija izučava svojstva objekata projektivne ravni ili projektivnog prostora koja ostaju očuvana pri projektivnim preslikavanjima.

Projektivna preslikavanja (collineation, projective transformation, homography) očuvavaju kolinearnost.

Algebarski: Preslikavanje je projektivno akko se realizuje matričnim množenjem invertibilnom matricom.

Projektivno preslikavanje u ravni

- U projektivnoj ravni (homogene koordinate!) matrica projektivne transformacije je 3*x*3 regularna matrica.
- Matrice čiji su odgovarajući elementi proporcionalni realizuju istu projektivnu transformaciju.
- Različite transformacije realizuju se matricama čiji su količnici odgovarajućih elemenata različiti.
- Projektivna transformacija u ravni određena je sa 8 parametara (stepeni slobode).

Projektivno preslikavanje u prostoru

- U projektivnom prostoru tačke su predstavljene uređenim četvorkama homogenih koordinata. Tačka Euklidskog prostora (x,z,y) ima homogene koordinate (x,z,y,1).
- Matrica projektivnog preslikavanja u 3D projektivnom prostoru je matrica linearnog preslikavanja homogenih vektora iz 4D prostora.
- Matrica projektivnog preslikavnja u prostoru ima 15 stepeni slobode.
- Projektivno preslikavanje je **kolineacija**, što znači da, kao i u ravni, prave preslikava u prave, i očuvava međusobne preseke pravih, i preseke pravih sa ravnima.

Hijerarhija transformacija

- Projektivna preslikavanja čine grupu u odnosu na kompoziciju preslikavanja (kompozicija projektivnih preslikavanja je projektivno preslikavanje, asocijativnost važi, neutralni element je identičko preslikavanje, koje je projektivno, a inverzno preslikavanje projektivnog preslikavanja je projektivno).

- **Podgrupe** grupe projektivnih preslikavanja predstavljaju **specijalna preslikavanja** projektivne ravni.

Hijerarhija transformacija

- Skup svih (kvadratnim) invertibilnih matrica formata *n* čini grupu (opštu linearnu grupu) dimenzije *n*.
- **Projektivna** (linearna) preslikavanja su, dalje, određena grupom (kvadratnih) invertibilnih matrica, pri čemu poistovećujemo one koje se dobijaju jedna od druge množenjem skalarom - one realizuju istu transformaciju. Projektivne transformacije realizuju se grupom invertibilnih matrica dimenzije $n=3$. Označavaju se sa *PL(n)*, odnosno *PL(3)*.
- Grupa **afinih** preslikavanja u ravni je podgrupa grupe *PL(3)*, koja se realizuje matricama čija je poslednja vektor vrsta oblika (0,0,1).

Hijerarhija transformacija

- Grupu **Euklidskih** transformacija čine one koje se realizuju matricama čija je gornja leva 2*x*2 podmatrica ortogonalna. Ove transformaciej čine pod-grupu afinih transformacija.
- Ukoliko je determinanta gornje leve ortogonalne 2x2 podmatrice Euklidske transformacije jednaka 1, Euklidska transformacija je **orijentisana**.

- Neke transformacije koje nas interesuju ne čine grupu. Primer je **perspektivno preslikavanje** (kompozicija dva perspektivna prelikavanja nije perspektivno preslikavanje).

Hijerarhija transformacija

- Algebarski pristup – posmatramo (pod)grupe matrica koje imaju određene osobine i izučavamo kako te matrice deluju na vektore (elemente posmatranog prostora).
- Geometrijski – posmatramo **invarijante** – elemente ili osobine koji bivaju očuvani pri posmatranim transformacijama.

- *Primer*: Rastojanje između tačaka je (skalarna) invarijanta Euklidskih transformacija, ali ne i transformacija sličnosti. Veličina uglova, međutim, ostaje očuvana i pri Euklidskim, i pri transformacijama sličnosti, pa je invarijanta i jedne i druge grupe preslikavanja.

Klasa 1: Izometrije

- **Izometrije** su transformacije Euklidske ravni (i prostora) koje **očuvavaju rastojanja**.
- Izometrije se realizuju matrično u obliku

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon\cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon\sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{gde je } \varepsilon = \pm 1 \ .$$

- Ako je $\varepsilon = 1$, isometrija **očuvava orijentaciju** i naziva se **Euklidska transformacija.** Ove transformacije su kompozicije rotacija i translacija – zovu se još i transformacije čvrstih tela (rigid body transformation).

  Poznata je i pod imenom "**displacement**" – izmeštanje.
- Ovo je najznačajnija grupa transformacija u našoj praksi.

Klasa 1: Izometrije

- Ukoliko je $\varepsilon = -1$, izometrija ne očuvava orijentaciju. Primer je kompozicija simetrije i Euklidske transformacije.
- Transformacije koje ne očuvavaju orijentaciju dovode do višeznačnosti rešenja pri rekonstrukciji transformacije. Ovo često predstavlja problem. Ove transformacije ne čine grupu.
- Planarna Euklidska transformacija se, dakle, koncizno može prikazati blokovskom matricom

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

gde je **R** ortogonalna matrica (2*x*2 matrica rotacije), **t** je (dvodimenzionalni) vektor translacije u ravni, **0** je dvodimenzionalni nula-vektor.

Ukoliko je **t=0,** transformacija se svodi na specijalni slučaj ("čiste") rotacije, a ukoliko je **R=I,** transformacija je ("čista") translacija.

Klasa 1: Izometrije

- Euklidske transformacije u ravni imaju tri stepena slobode, jedan za rotaciju i dva za translaciju. To znači da su određene pomoću tri parametra.
- Da bi se transformacija rekonstruisala, potrebna su dva para odgovarajućih tačaka.

- **Invarijante**: rastojanje među tačkama, uglovi, površine figura.

Klasa 2: Transformacije sličnosti

- **Transformacija sličnosti** (similarity transformation) je kompozicija izometrije i izotropnog skaliranja. Ukoliko je transformacija sličnosti kompozicija Euklidske transformacije i skaliranja (dakle, ne uključuje simetriju), matrica transformacije sličnosti je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ili, konciznije $$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$ pri čemu je s skalar koji određuje izotropno skaliranje.

Klasa 2: Transformacije sličnosti

- Transformacija sličnosti očuvava oblik (shape).
- Transformacija ima četiri stepena slobode - određena je pomoću četiri parametra.
- Transformacija se može rekonstruisati pomoću dva para odgovarajućih tačaka.
- **Invarijante:** uglovi, paralelnost, odnosi rastojanja među tačkama (rastojanja nisu invarijante!), odnosi površina figura.

Klasa 3: Afine transformacije

- **Afina transformacija** je nesingularna linearna transformacija praćena translacijom.
- U matričnom obliku, afina transformacija se može prikazati kao

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ili, blokovski,

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

gde je **A** $2x2$ nesingularna matrica.

Klasa 3: Afine transformacije

- Afine transformacije imaju šest stepeni slobode, koji odgovaraju parametrima u matrici transformacije.
- Za rekonstrukciju afine transformacije potrebna su tri para odgovarajućih tačaka.
- Linearna komponenta afine transformacije se može prikazati kao kompozicija rotacije i ne-izotropnog skaliranja:

$$A = R(\theta)\,R(-\phi)\,D\,R(\phi)$$

pri čemu su sa $R(\theta), R(\phi)$ označene rotacije za odgovarararajuće uglove, a D je dijagonalna matrica koja predstavlja skaliranje

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Klasa 3: Afine transformacije

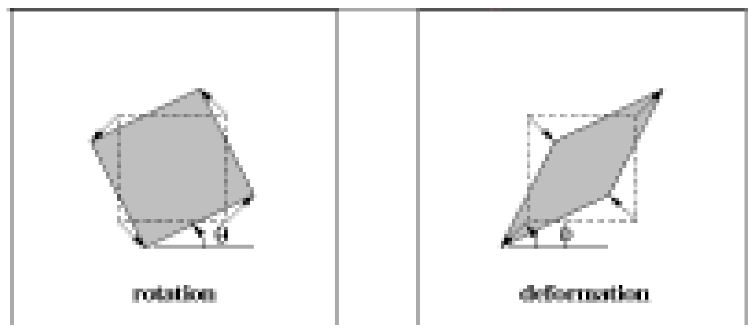
- Dakle, linearni deo afine transformacije se realizuje kao kompozicija rotacije za dati ugao, ne-izotropnog skaliranja sa datim koeficijenima λ_1, λ_2, suprotne rotacije, a zatim još jedne rotacije za dati ugao.
- Jasno je da je linearni deo afine transformacije opštiji od transformacije sličnosti zbog "opštijeg" – neizotropnog – skaliranja. Ovo uvodi i dva dodatna stepena slobode, u odnosu na operacije sličnosti (šest u odnosu na četiri): ugao kojim se određuje pravac skaliranja, i odnos parametara skaliranja. Suština afine afine transformacije je da se skaliranje vrši u dva ortogonalna pravca, za različite koeficijente, a da je orijentacija tih pravaca proizvoljno zadata uglom.

Klasa 3: Afine transformacije

- **Invarijante:**
  - Paralelnost linija (afine transformacije preslikavaju beskonačno daleke tačke u beskonačno daleke tačke, pa prave koje se seku u takvim tačkama i nakon afine transformacije imaju tu osobinu).
  - Odnosi dužina paralelnih linijskih segmenata (duži).
  - Odnosi mera površina (ni rotacija, ni translacija ne utiču na meru površine, pa se promena vrši samo zbog ne-izotropnog skaliranja, i to za faktor $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A)$ koji se skraćuje pri određivanju količnika).

- Zbog toga što uključuje ne-izotropno skaliranje, afina transformacija ne očuvava odnose dužina, kao ni uglove (što su invarijante transformacija sličnosti).
- Afina transformacija može, ali ne mora, da očuvava orijentaciju. Ukoliko je det(A) pozitivanog znaka, transformacija očuvava orijentaciju, u protivnom ne.

Klasa 3: Afina transformacija



Primer deformacije koja nastaje planarnom afinom transformacijom.
Levo: Rotacija za dati ugao.
Desno: Kompozicija rotacije i ne-izotropnog skaliranja.
Skaliranje se realizuje sa različitim koeficijentom u dva uzajamno ortogonalna pravca.
Pravci skaliranja su pod određenim uglom u odnosu na inicijalnu poziciju.

Klasa 4: Projektivne transformacije

- Projektivna transformacija je uopštenje afine transformacije na homogene koordinate.
- Afina transformacija predstavlja opštu nesingularnu linearnu transformaciju nehomogenih koordinata, praćenu translacijom, a projektivna transformacija je opšta nesingularna linearna transformaciju homogenih koordinata, praćena translacijom.
- Blokovski matrični prikaz projektivne transformacije je

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

pri čemu je $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ vektor, a v je skalar.

Klasa 4: Projektivne transformacije

- Matrica projektivne transformacije ima 9 elemenata, pri čemu ekvivalentnim matricama smatramo one čiji su svi odgovarajući elementi proporcionalni. Dakle, odnosi elemenata su od značaja, pa transformacija ima 8 stepeni slobode, tj. određena je pomoću 8 parametara.
- Za rekonstrukciju projektivne transformacije potrebna su četiri para odgovarajućih tačaka, pri čemu ni među originalima, ni među slikama nema tri kolinearne.
- Nije moguće razlikovati projektivne transformacije koje očuvavaju orijentaciju, od onih koje to ne rade.
- **Invarijante:** kolinearnost, konkurencija (preseci pravih), odnos odnosa dužina duži (cross-ratio).
- Odnos dužina se ne očuvava.

Poređenja i zaključci

- Afina preslikavanja (6 stepeni slobode) - između transformacija sličnosti (4 stepena slobode) i projektivnih preslikavanja (8 stepeni slobode).
- Afina preslikavanja su uopštenje transformacija sličnosti – ne očuvavaju uglove, pa se oblici mogu "uvrtati" pri transformaciji.
- Njihovo delovanje je homogeno u ravni, skaliranje površina je određeno determinantom linearnog dela transformacije i isto je u svakoj tački.
- Kod projektivnog preslikavanja, skaliranje površina zavisi od tačke u kojoj posmatramo transformaciju.

Poređenja i zaključci

- Afina transformacija beskonačnu (idealnu) tačku preslikava u idealnu tačku. Projektivna transformacija može da je preslika u bilo koju tačku.
- Navedena osobina omogućava prikazivanje "iščezavajuće" tačke projektivnom transformacijom.

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Afina transformacija preslikava beskonačnu tačku u beskonačnu tačku.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ \mathbf{v}^T & v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ v_1 x_1 + v_2 x_2 \end{bmatrix}$$

Projektivna transformacija preslikava beskonačnu tačku u običnu tačku.

Primeri transformacija

Primeri deformacija koji nastaju pri različitim transformacijama.

Slika prikazuje pod prekriven pločicama.

Levo: Transformacija sličnosti.

Krug je preslikan u krug, kvadrat u kvadrat, očuvana je paralelnost i ortogonalnost pravih.

Sredina: Afina transformacija.

Krug je preslikan u elipsu. Ortogonalnost pravih nije očuvana, pa kvadrat više nije kvadrat.

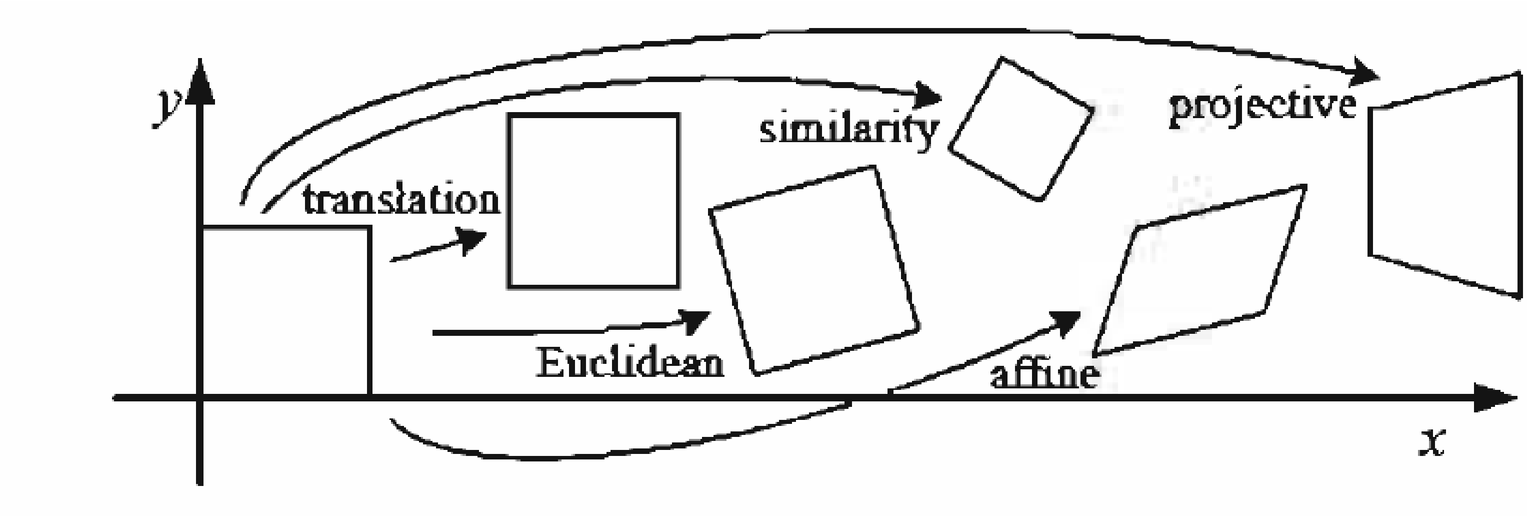
Paralelnost pravih je očuvana. Kvadrat je preslikan u paralelogram.

Desno: Projektivna transformacija.

Paralelnost nije očuvana, paralelne linije se preslikavaju u linije koje se seku u dalekoj tački.

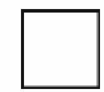
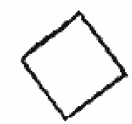
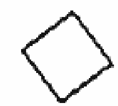
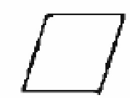
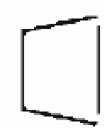
Odnos površina nije očuvan. Kvadrati bliže posmatraču su veći od onih daljih.

Poređenja i zaključci



Deformacije pri pojedinim vrstama projektivnih transformacija u ravni.

Hijerarhija transformacija u ravni

Transformation	Matrix	# DoF	Preserves	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$	2	orientation	
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$	3	lengths	
similarity	$\begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$	4	angles	
affine	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}_{2\times 3}$	6	parallelism	
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}_{3\times 3}$	8	straight lines	

Svaka od navedenih matrica formata 2*x*3 proširuje se vrstom [0 0 1]
i prilagođava radu sa homogenim koordinatama

Hijerarhija transformacija u 3D

ambiguity	DOF	transformation	invariants
projective	15	$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$	cross-ratio
affine	12	$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	relative distances along direction parallelism *plane at infinity*
metric	7	$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \sigma r_{11} & \sigma r_{12} & \sigma r_{13} & t_x \\ \sigma r_{21} & \sigma r_{22} & \sigma r_{23} & t_y \\ \sigma r_{31} & \sigma r_{32} & \sigma r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	relative distances angles *absolute conic*
Euclidean	6	$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	absolute distances