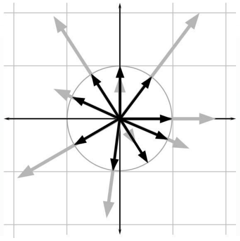
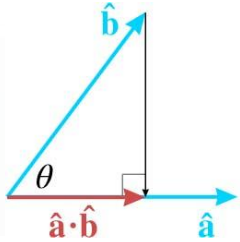
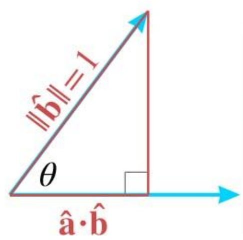
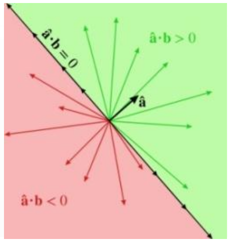
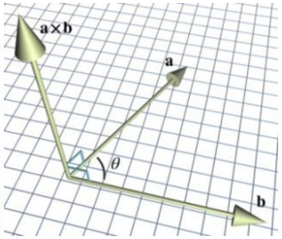
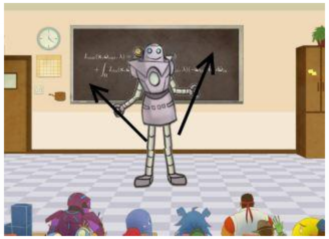












Drugi deo (uvoda)

Vektori

Vektori i skalari

•*Skalar* je “običan” broj.
•Vektor je lista (uređena *n*-torka) skalara (komponente vektora).

Pomeranje (recimo, 10 koraka prema zapadu) izražavamo vektorom.

Rastojanje (*recimo, 10 koraka daleko*) izražavamo skalarom.

Vektore koristimo da izrazimo relativne položaje.
Skalare koristimo da izrazimo apsolutne položaje.

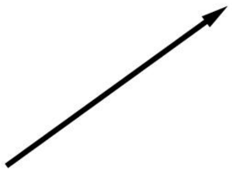
Vektori-vrste i vektori-kolone

- Vektore možemo zapisati navodeći listu brojeva u (uglastim) zagradama horizontalno ili vertikalno.
- Vektor-vrsta: [1, 2, 3]
- Vektor-kolona:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

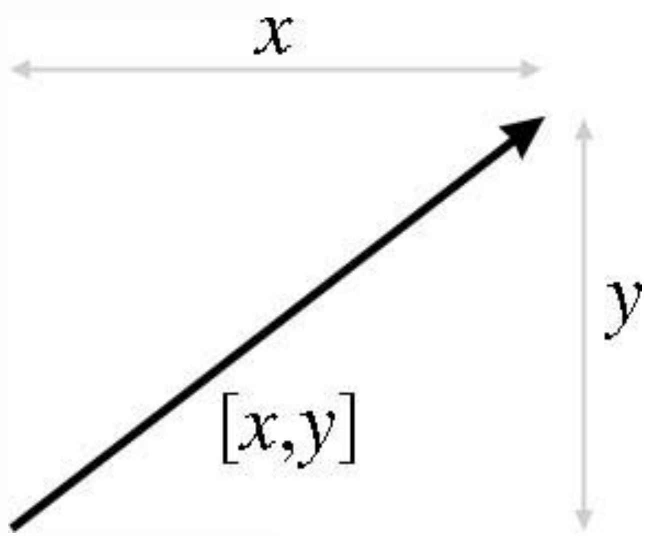
Geometrijska definicija vektora

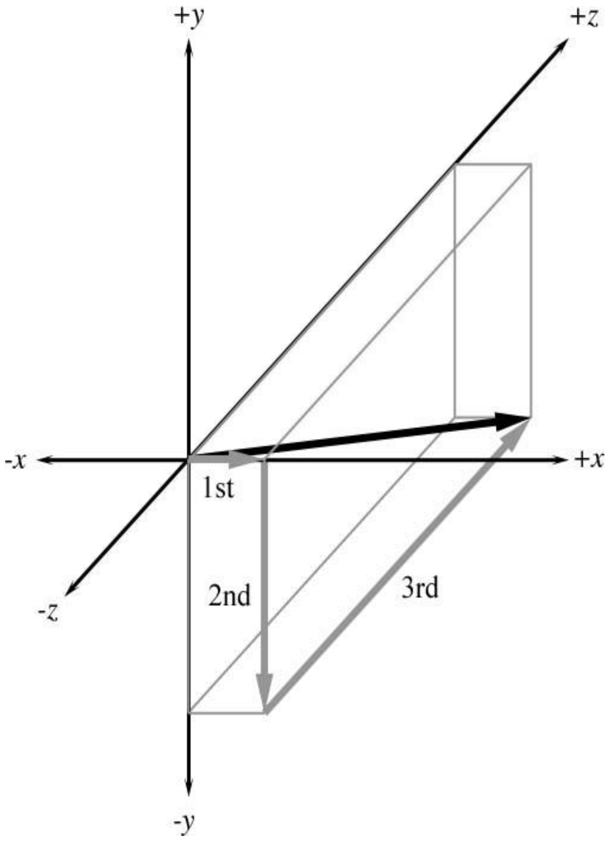
- Vektor je usmerena duž.
- Određen je pravcem, smerom i intenzitetom.
- Grafički ga prikazujemo strelicom.



Izuzetak je nula-vektor, **0** =[0,0,...,0]. On nema pravac (ni smer).

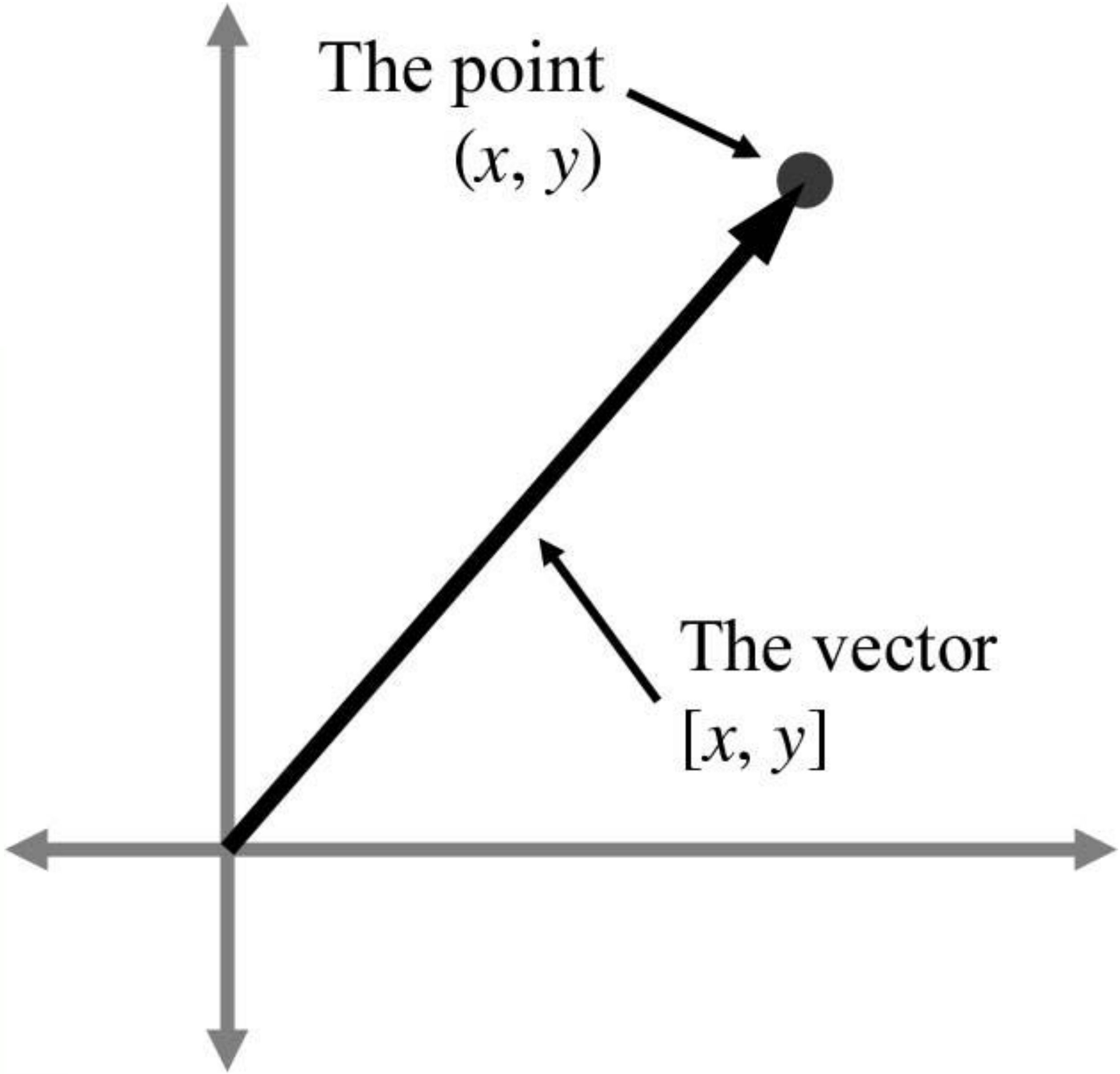
Vektor u Dekartovom kordinatnom sistemu





Vektori i tačke

- Tačke posmatramo u odnosu na koordinatni početak.
- Vektori su, po svojoj suštini, relativni u odnosu na sve.
- Dakle, vektor možemo koristiti da prikažemo tačku.
- Vektor položaja tačke ima početak u koordinatnom početku, a kraj mu je posmatrana tačka.
- Vektori, međutim, nisu vezani za određenu lokaciju.


The point
(x, y)
The vector
$[x, y]$

Vektori i tačke

•Zbir dva vektora je vektor.
•Zbir dve tačke nije tačka.

•Vektor predstavlja pomeranje.
•Tačka predstavlja lokaciju.

Opracije sa vektorima

- Suprotan vektor
- Množenje vektora skalarom
- Sabiranje i oduzimanje vektora
- Intenzitet (dužina)
- Normalizacija
- Skalarni proizvod
- Vektorski proizvod

René Descartes

- Dekartov rad na povezivanju algebre i geometrije je od velikog značaja za pitanja kojima se bavimo.
- Uočimo da nam algebarski pristup geometrijskim pojmovima mogućava da programiramo ono što je u osnovi geometrijski problem.

Suprotan vektor: Algebra

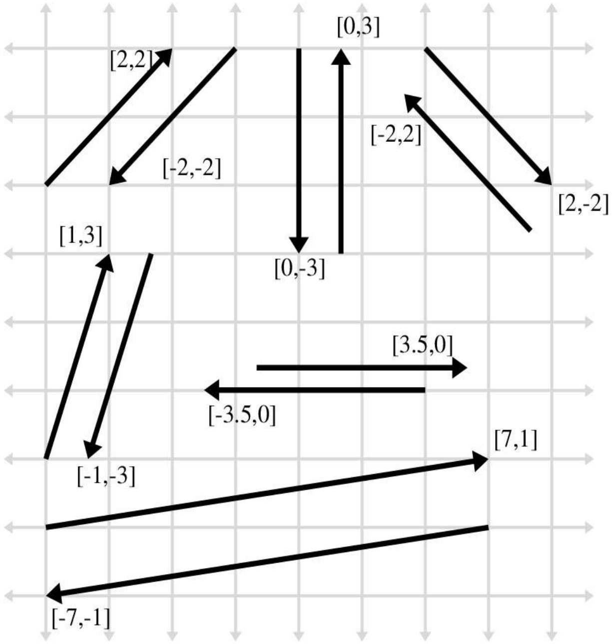
- Suprotan vektor je inverzan element za operaciju sabiranja vektora
- ...sećamo se - nula-vektor je neutralni element za ovu operaciju

$$\mathbf{v} + -\mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \\ -a_n \end{bmatrix}$$

Suprotan vektor: Geometrija

- Vektor suprotan datom vektoru ima isti smer i isti intenzitet kao dati vektor, a suprotnog je smera.



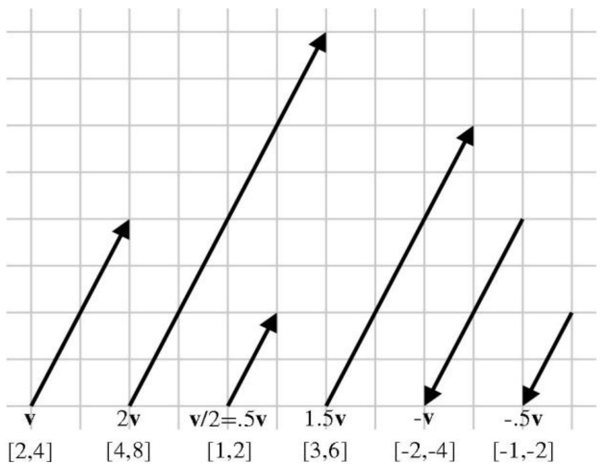
Množenje vektora skalarom: Algebra

Vektor se množi skalarom tako što se svaka komponenta vektora pomnoži tim skalarom.

$$k \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_{n-1} \\ ka_n \end{bmatrix}$$

Množenje vektora skalarom: Geometrija

- Množenjem vektora skalarom *k* dobija se vektor istog pravca.
- Smer rezultujućeg vektora je isti kao smer polaznog ako je *k*>0, a suprotan od polaznog ukoliko je *k*<0.
- Intenzitet rezultujućeg vektora je *k* puta veći od intenziteta polaznog vektora.



Sabiranje vektora: Algebra

- Sabiranje je definisano za vektore iste dimenzije.
- Rezultujući vektor je iste dimenzije.
- Sabiranje se vrši po koordinatama.
- Oduzimanje se definiše kao sabiranje sa suprotnim vektorom, **a** – **b** = **a** + (– **b**)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} + b_{n-1} \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Algebarski identiteti

- Sabiranje vektora je asocijativno.

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

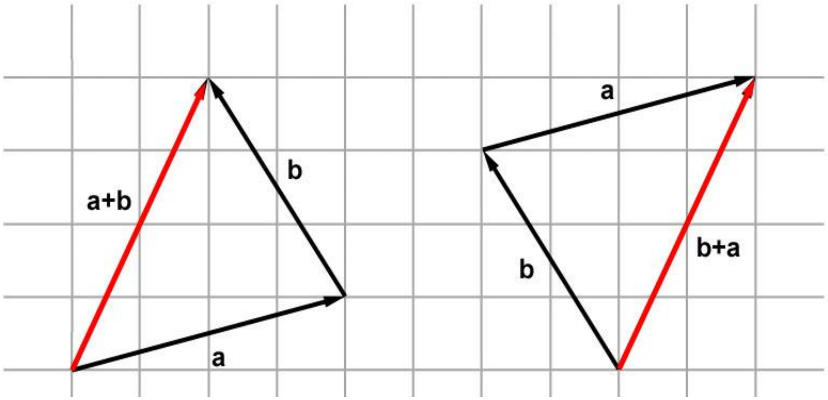
- Sabiranje vektora je komutativno.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Skup vektora date dimenzije čini grupu u odnosu na operaciju sabiranja: skup je zatvoren u odnosu na operaciju, operacija je asocijativna i komutativna, skup sadrži neutralni element, i za svaki element postoji odgovarajući inverzni element.

Sabiranje vektora: Geometrija

- Vektore sabiramo primenjujući *pravilo trougla.*
- Ako se kraj vektora **a** poklapa sa početkom vektora **b**, onda je **a** + **b** vektor čiji je početak jednak početku vektora **a**, a kraj mu se poklapa sa krajem vektora **b**.



Intenzitet vektora: Algebra

Intenzitet vektora je skalar.

Zove se još i *norma* vektora.

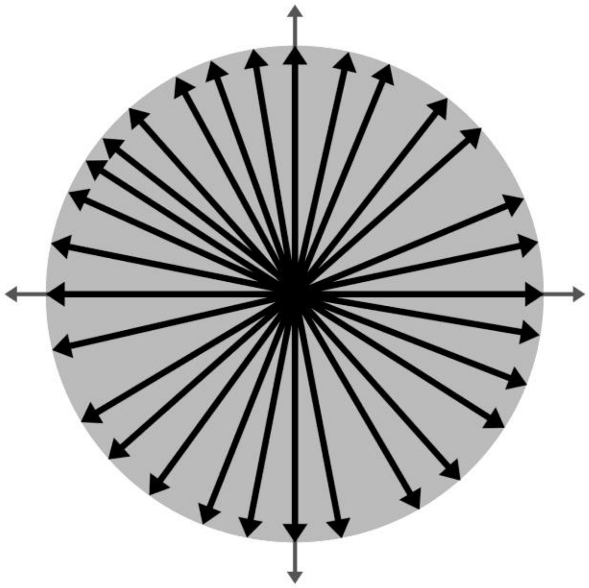
Norma je svaka funkcija koja svakom vektoru iz skupa vektora dodeljuje nenegativan realan broj, pri čemu nulu dodeljuje samo nula vektoru, zadovoljava nejednakost trougla i pri tome je pozitivno homogena.

Jedan primer: Euklidska norma.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_{n-1}}^2 + {v_n}^2}$$

Intenzitet vektora: Geometrija

- Intenzitet vektora je njegova dužina.
- Postoji beskonačno mnogo vektora datog intenziteta (pod uslovom da je intenzitet različit od nule).



Normalizacija: Algebra

- Normalizovan vektor ima intenzitet jednak jedinici.

- Za dati vektor različit od nule normalizovan vektor je

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

- Normalizovan vektor datog vektora je jedinični vektor istog smera i istog pravca.

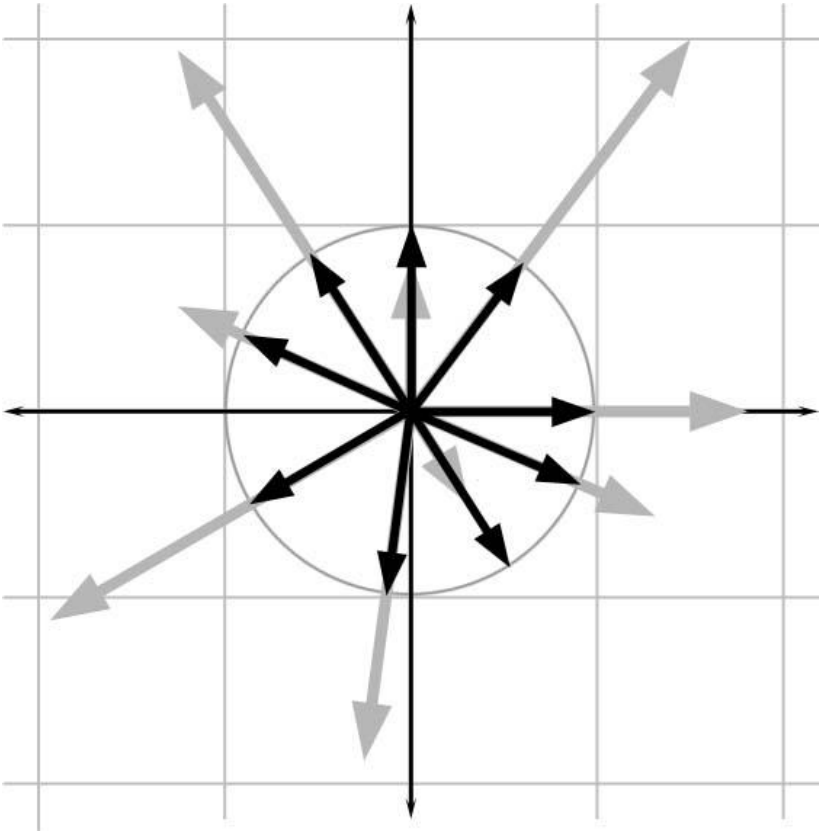
Primer

Normalizovati vektor [12, -5]:

$$\frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}\right\|} = \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{\sqrt{169}} = \frac{\begin{bmatrix}12 & -5\end{bmatrix}}{13} = \begin{bmatrix}\frac{12}{13} & \frac{-5}{13}\end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix}0.923 & -0.385\end{bmatrix}$$

Normalizacija vektora: Geometrija



Skalarni proizvod: Algebra

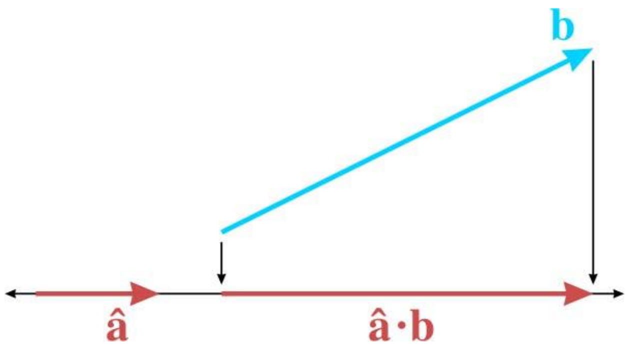
- Skalarni proizvod definisan je za vektore iste dimenzije.
- Rezultat skalarnog množenja vektora je skalar.
- Za vektore koji su predstavljeni u Dekartovom koordinatnom sistemu je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

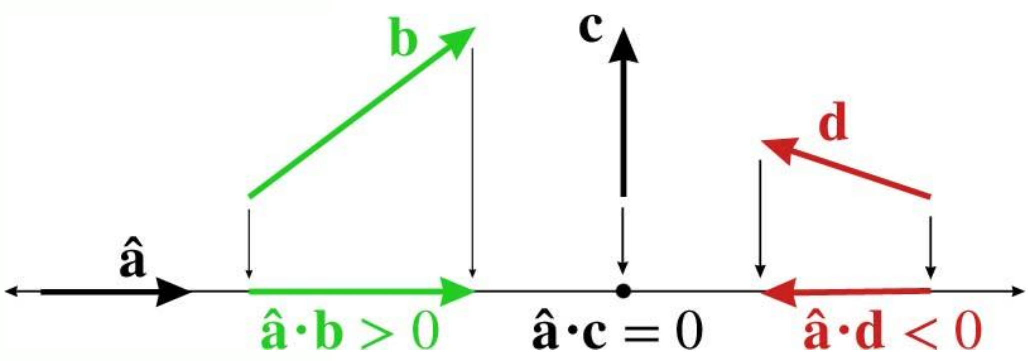
Skalarni proizvod: Geometrija

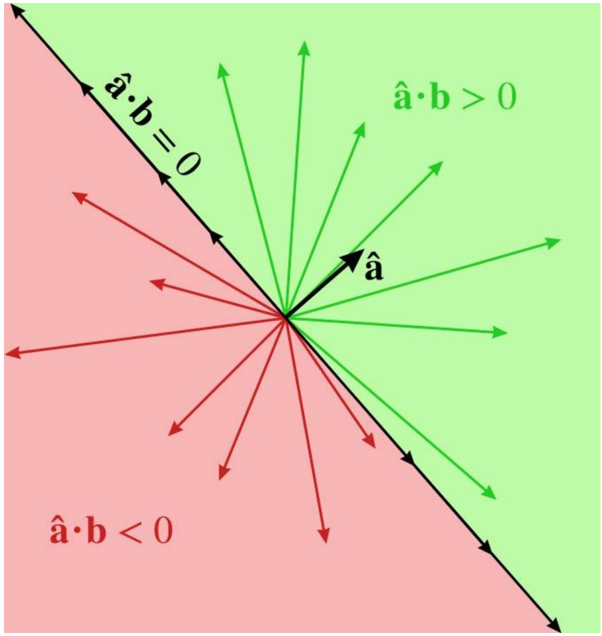
Skalarni proizvod je jednak intenzitetu (sa odgovarajućim predznakom) projekcije jednog od vektora na bilo koju pravu paralelnu sa drugim vektorom, pomnožene intenzitetom drugog vektora.

Na slici je prikazana projekcija vektora **b** na jedinični vektor **a.**
Jednaka je skalarnom proizvodu ovih vektora.



Predznak skalarnog proizvoda





$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	θ	Angle is	a and b are
> 0	$0^\circ \leqslant \theta < 90^\circ$	acute	pointing mostly in the same direction
0	$\theta = 90^\circ$	right	perpendicular
< 0	$90^\circ < \theta \leqslant 180^\circ$	obtuse	pointing mostly in the opposite direction

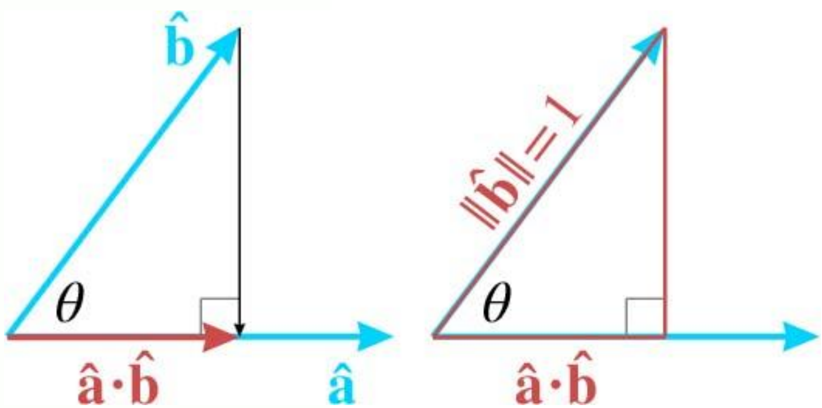
Skalarni proizvod: Geometrija

- Skalarni proizvod vektora **a** i **b** je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta$$

gde je θ ugao između vektora.

- Ako su posmatrani vektori normalizovani (jedinični), onda je



$$\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Skalarni proizvod: Geometrija

- Skalarni proizvod vektora **a** sa samim sobom je

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\| \cos 0 = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{a}\|$$

što znači da pomoću skalarnog proizvoda možemo izračunati intenzitet vektora.

- Skalarni proizvod omogućava razlaganje vektora na komponentu paralelnu datom vektoru i komponentu ortogonalnu na dati vektor.

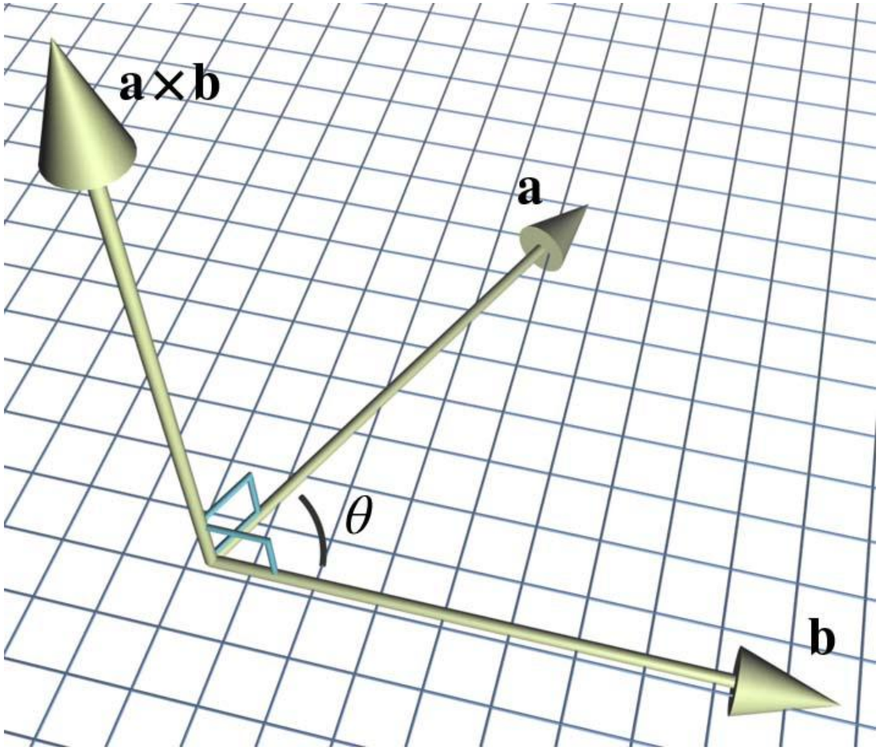
Vektorski proizvod: Algebra

- Vektorski proizvod definisan je za vektore iste dimenzije.
- Rezultat ove operacije je vektor iste dimenzije .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix}$$

Vektorski proizvod: Geometrija

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin\theta$$

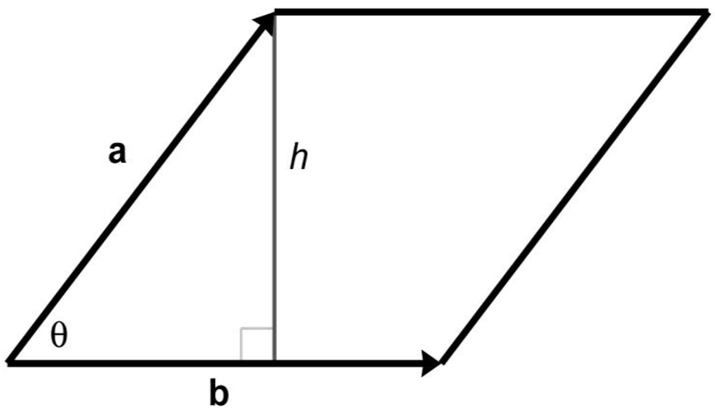


Vektorski proizvod: Geometrija

- Za dva ne-nula vektora **a**, **b** vektorski proizvod je vektor ortogonalan na ravan određenu datim vektorima, čiji je intenzitet jednak površini paralelograma čije su stranice dati vektori.

- Smer ...

Površina ovog paralelograma je **P** $= \| \mathbf{b} \| \, h$



$\sin\theta = h/||\mathbf{a}||$

$h = ||\mathbf{a}|| \sin\theta$

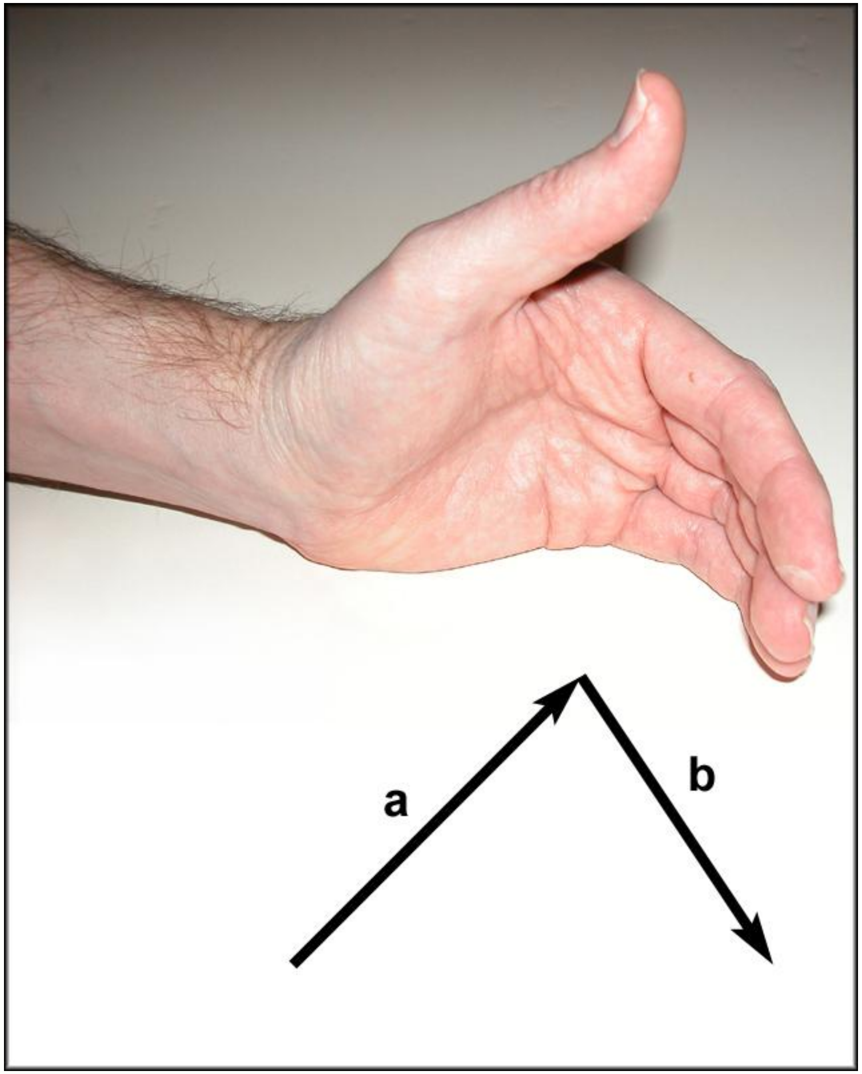
$||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{b}|| \, h$

$= ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \sin\theta$

Smer vektorskog proizvoda

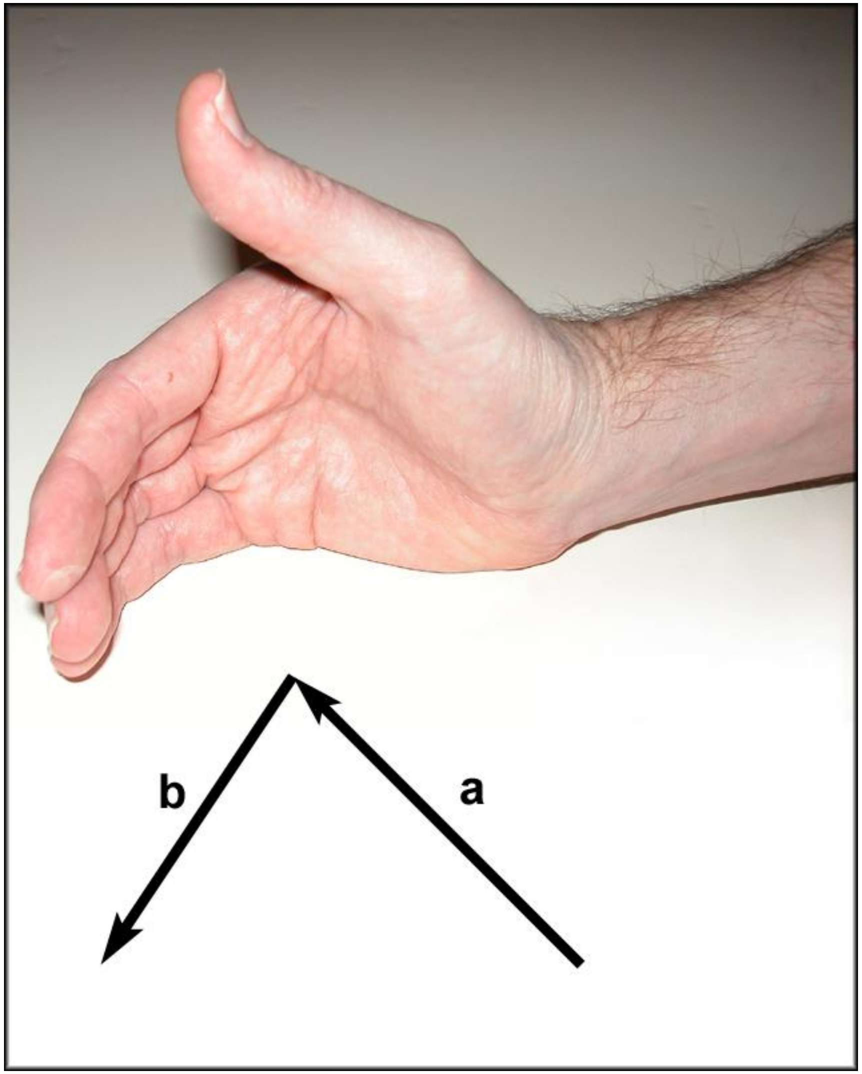
• Odredili smo pravac i intenzitet vektorskog proizvoda. Smer ćemo odrediti u skladu sa smerom rotacije vektora **a** ka vektoru **b**.

• Smer rotacije zavisi od izbora (levog ili desnog koordinatnog sistema).



- U levom koordinatnom sistemu, postavimo levu ruku tako da prsti pokazuju smer rotacije od vektora **a** ka vekoru **b**

- Palac pokazije smer vekora **a** x **b**



- U desnom koordinatnom sistemu, postavimo desnu ruku tako da prsti pokazuju smer rotacije od vektora **a** ka vekoru **b**

- Palac pokazije smer vekora **a** x **b**

Izračunavanje normale na ravan

Za ravan određenu tačkama A, B, C

- Određujemo vektore

  a = OB – OC i **b** = OA – OC;
- Izračunavamo njihov vektorski proizvod **a** x **b** .
- Normalizujemo dobijeni vektor **a** x **b** .

Na opisani način dobili smo jedinični vektor normale na ravan određenu datim tačkama.
(ili na površ koja je lokalno aproksimirana delom te ravni).
Obratiti pažnju na smer normale!

Još o skalarnom i vektorskom proizvodu

- Ako su **a**,**b** ne-nula vektori, onda je **a**·**b** = 0 ako i samo ako su **a** i **b** međusobno ortogonalni.
- Ako su **a**,**b** ne-nula vektori, onda je **a** x **b** = **0** ako i samo ako su **a** i **b** paralelni.
- Na osnovu skalarnog proizvoda, svaki vektor je ortogonalan na **0** - vektor.
- Na osnovu vektorskog proizvoda, svaki vektor je paralelan **0** – vektoru.

Geometrijska interpretacija u ovim slučajevima nije u skladu sa algebarskom – navedena tvrđenja nemaju geometrijski smisao.

Identity	Comments
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$	Commutative property of vector addition
$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$	Definition of vector subtraction
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$	Associative property of vector addition
$s(t\mathbf{a})=(st)\mathbf{a}$	Associative property of scalar multiplication
$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$	Scalar multiplication distributes over vector addition
$\lVert k\mathbf{a}\rVert=\lvert k\rvert\lVert\mathbf{a}\rVert$	Multiplying a vector by a scalar scales the magnitude by a factor equal to the absolute value of the scalar
$\lVert\mathbf{a}\rVert\geq 0$	The magnitude of a vector is nonnegative
$\lVert\mathbf{a}\rVert^2+\lVert\mathbf{b}\rVert^2=\lVert\mathbf{a}+\mathbf{b}\rVert^2$	The Pythagorean theorem applied to vector addition.
$\lVert\mathbf{a}\rVert+\lVert\mathbf{b}\rVert\geq\lVert\mathbf{a}+\mathbf{b}\rVert$	Triangle rule of vector addition. (No side can be longer than the sum of the other two sides.)
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	Commutative property of dot product
$\lVert\mathbf{a}\rVert=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$	Vector magnitude defined using dot product
$k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b})$	Associative property of scalar multiplication with dot product
$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$	Dot product distributes over vector addition and subtraction
$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$	The cross product of any vector with itself is the zero vector. (Because any vector is parallel with itself.)
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$	Cross product is anticommutative.
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(-\mathbf{a})\times(-\mathbf{b})$	Negating both operands to the cross product results in the same vector.
$k(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(k\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(k\mathbf{b})$	Associative property of scalar multiplication with cross product.
$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$	Cross product distributes over vector addition and subtraction.