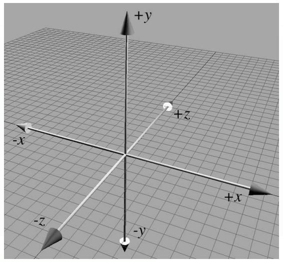
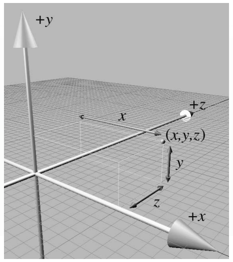
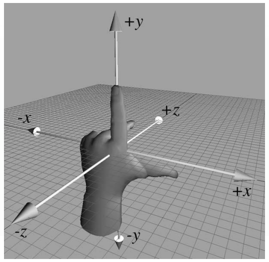
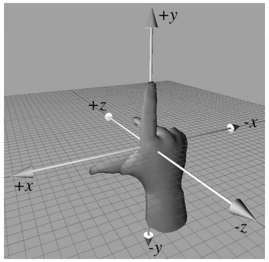
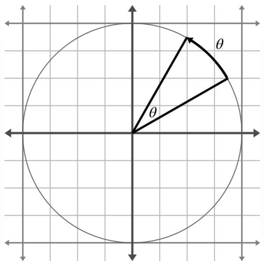
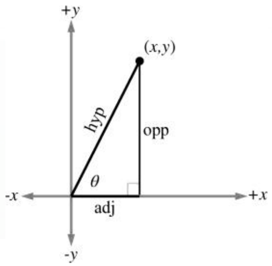












Matematika za inženjersku grafiku

Na osnovu knjige

3D Math Primer for Graphics and Game Development

Second Edition

Fletcher Dunn & Ian Parberry

Uvod

- Dekartov pravougli koordinatni sistem
- Vektori
- Upotreba različitih koordinatnih sistema
- Matrice

Podsetićemo se osnovnih pojmova pri uvođenju 2D pravouglog koordinatnog sistema.

Uopštićemo ove pojmove i definisati 3D koordinatni sistem.

Uočićemo razliku između levo i desno orijentisanih koordinatnih sistema.

3D

- 3D matematika kojom ćemo se baviti u ovom kursu određuje i meri, na matematički dobro definisan način, položaj i međusobni položaj objekata u 3D prostoru (lokacije, rastojanja, uglove itd.)

- Najjednostavniji način da uz pomoć računara rešavamo navedene probleme je da koristimo Dekartov koordinatni sistem.

René Descartes

Francuski filozof, fizičar, pisac i matematičar koji je živeo u periodu 1596 - 1650.

Dekartov doprinos matematici je izuzetan: *Dekartov koordinatni sistem* omogućava uspostavljanje veze između algebre i geometrije— tačke u prostoru opisuju se skupovima brojeva, a geometrijski oblici algebarskim jednačinama (i obrnuto - algebarske jednačine dobijaju geometrijske interpretacije). Razvoj *analitičke geometrije* doveo je do otkrića infinitezimalnog računa i matematičke analize.

René Descartes, 1596 - 1650

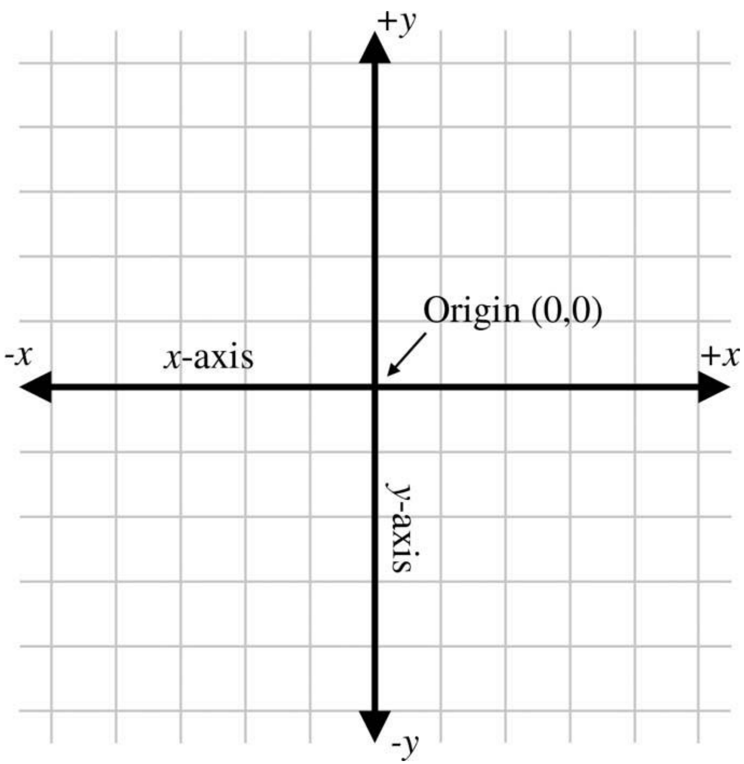
1D

- Brojevi: prirodni, celi, racionalni, iracionalni, realni, kompleksni.
- Diskretna matematika: prirodni i celi brojevi.
- Neprekidnost: realni brojevi (samo fikcija, ali jako praktična :-))
- Računar i neprekidnost.

- Prvi zakon Računarske grafike:
  - *Ako izgleda dobro, onda je dobro.*

2D

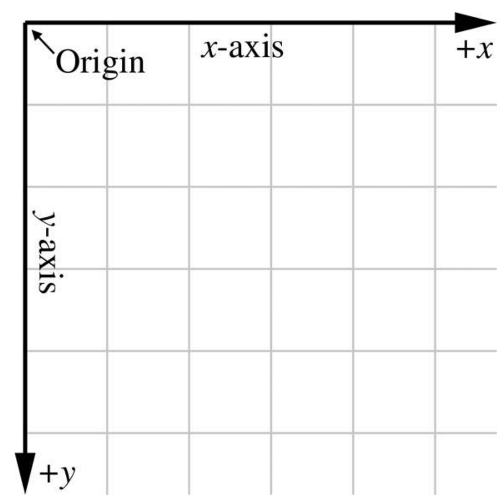
- *2D Dekartov pravougli koordinatni sistem*
- *(Proizvoljna) tačka u ravni - Koordinatni početak*
- *Dve međusobno ortogonalne prave koje se seku u koordinatnom početku - Koordinatne ose*
- x-osa je horizontalna, pozitivan smer je desno
- y-osa je vertikalna, pozitivan smer je naviše



Screen Space – Prostor ekrana

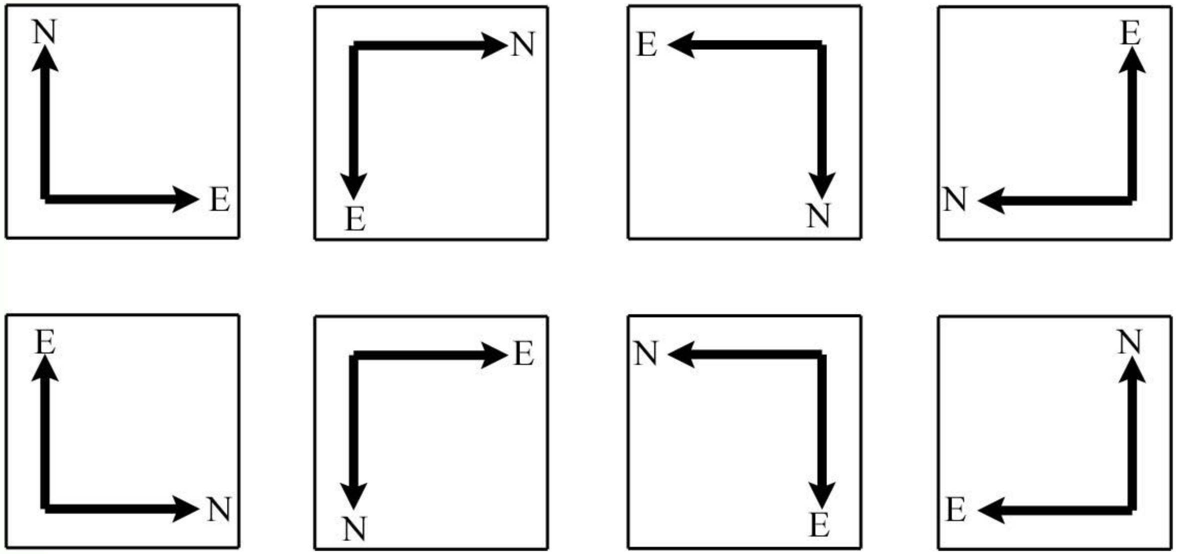
Ali, navedena orijentacija koordinatnih osa nije ni jedina moguća, a ni obavezna!
... samo je uobičajena, kao rezultat dogovora.

Za koordinatni sistem ekrana
(kojim je snabdeven prostor ekrana),
na primer, uobičajeno je
da je pozitivan smer na y-osi (+y)
usmeren naniže.
Koordinatni početak ovog prostora je
u gornjem levom uglu ekrana.



Orijentacija koordinatnih osa

U stvari, postoji 8 načina da orijentišemo koordinatne ose 2D Dekartovog koordinatnog sistema:

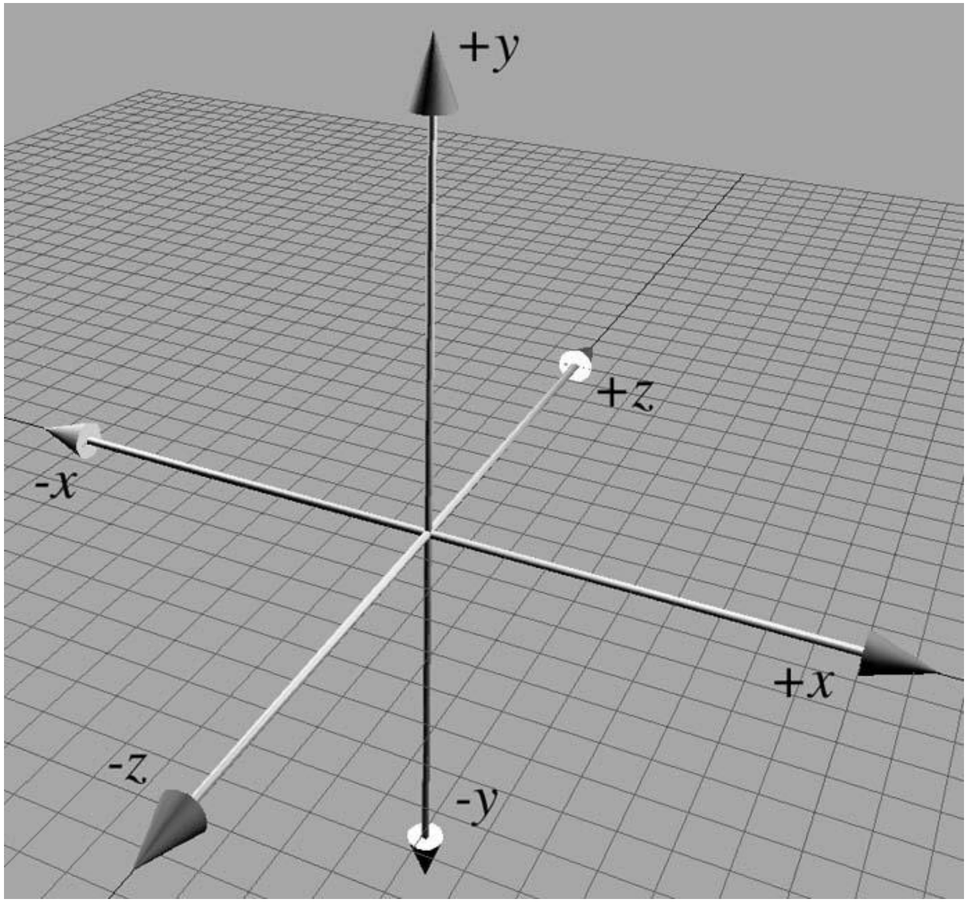


Ekvivalencija orijentacija u 2D

- Svih 8 navedenih orijentacija koordinatnih osa mogu se dobiti jedna iz druge odgovarajućom rotacijom prostora, odnosno simetrijom, ili kompozicijom simetrija, u odnosu na jednu, ili dve koordinatne ose.

- Ovo znači da su svi navedeni koordinatni sistemi međusobno ekvivalentni.

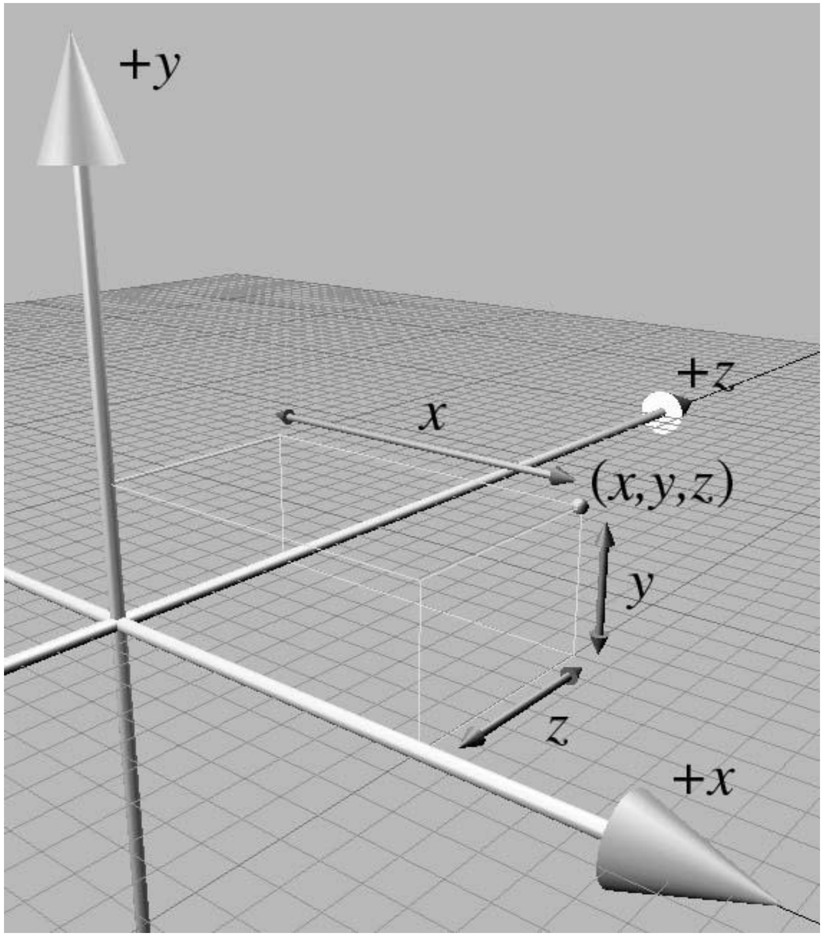
3D Dekartov koordinatni sistem



Položaj tačke u 3D koordinatnom sistemu

x-osa je (i dalje) horizontalna i usmerena na desno;
y-osa je (i dalje) vertikalna i usmerena naviše;
z-osa je ortogonalna na xy-ravan i usmerena “ka napred”.

Položaj tačke – *rastojanje* od koordinatnih ravni duž koordinatnih osa.



Orijentacija 3D koordinatnog sistema

- Jasno nam je da navedena orijentacija koordinatnih osa nije i jedina moguća. Matematičari uglavnom koriste drugačiju orijentaju.
- Postoji više izbora. Međutim, za razliku od 2D koordinatnih sistema, u 3D ne možemo uvek pogodnom rotacijom jednu orijentaciju koordinatnih osa svesti na drugu.
- Nisu svi 3D koordinatni sistemi međusobno ekvivalentni.

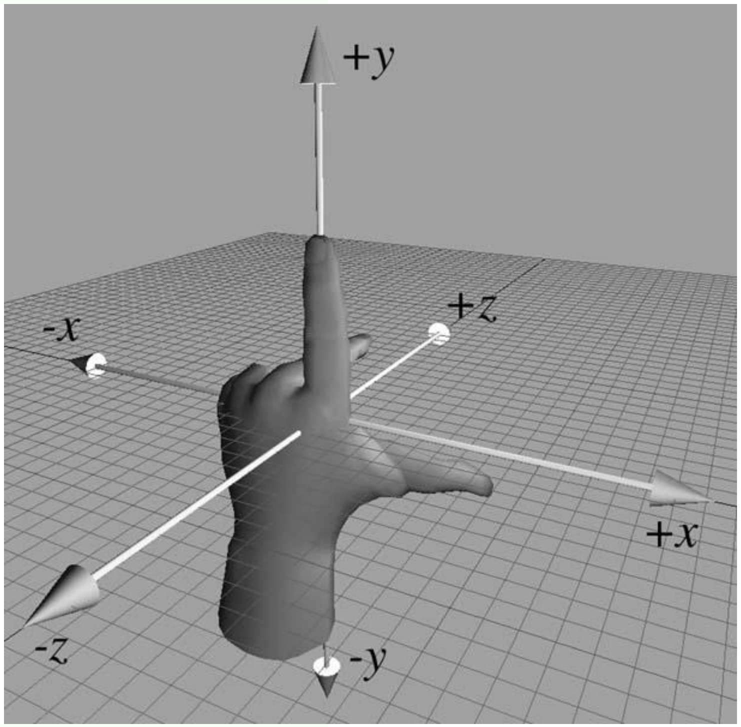
Orijentacija 3D koordinatnog sistema

- Prihvatili smo konvenciju da je *x*-osa horizontalna i usmerena na desno, a *y*-osa vertikalna i usmerena na gore.

- *z*-osa prikazuje dubinu, ali je pitanje da li je usmerena “ka posmatraču”, ili suprotno od toga.

- Ovaj izbor dobija na značaju nakon što uočimo da se jedan slučaj ne može rotacijom svesti na drugi.

Levi (Left-handed) koordinatni sistem

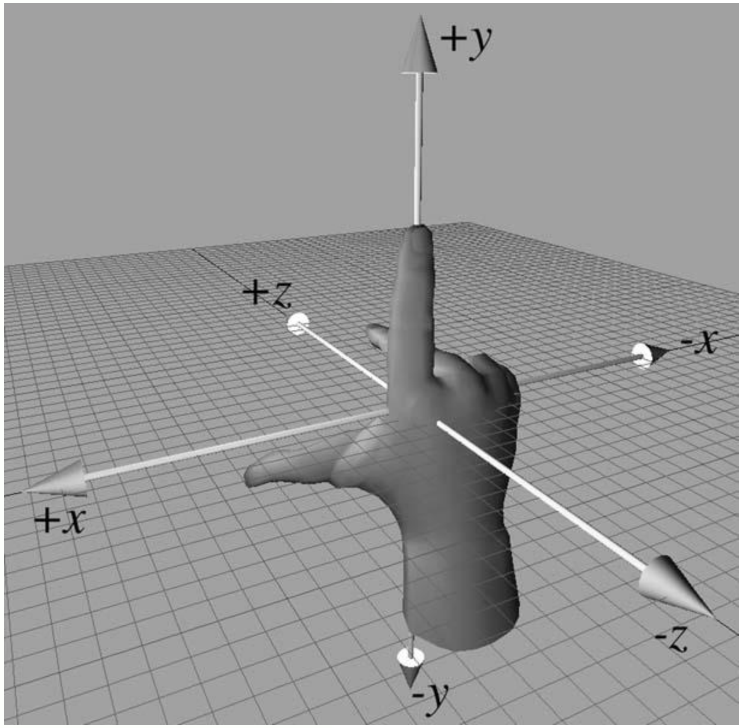


•Izbor orijentacije takav da je +*z* usmereno ka ekranu.

•Prikazujmo orijentaciju koordinatnih osa prstima leve ruke.

Palac je usmeren kao +*x*
Kažiprst je usmeren kao +*y*
Srednji prst je usmeren kao +*z*

Desni (Right-handed) koordinatni sistem



Izbor orijentacije takav da je +*z* usmereno od ekrana.

Prikazujmo orijentaciju koordinatnih osa prstima desne ruke.

Palac je usmeren kao +*x*
Kažiprst je usmeren kao +*y*
Srednji prst je usmeren kao +*z*

Dogovor o izboru orijentacije

• Ne postoji rotacija kojom se tri prsta leve ruke dovode do položaja istih prstiju na desnoj ruci (ili obrnuto).
• Ova dva sistema nemaju ekivalentne orijentacije!
• Transformacija jednog u drugi može se postići, recimo, promenom smera jedne od koordinatnih osa, ili zamenom uloga neke dve ose.

Dogovor o izboru orijentacije

U računarskoj grafici uobičajeno se koristi levi koordinatni sistem.

U linearnoj algebri (matematici) uobičajeno se koristi desni koordinatni sistem.

U ovde korišćenom udžbeniku se uobičajeno koristi levi koodinatni sistem.

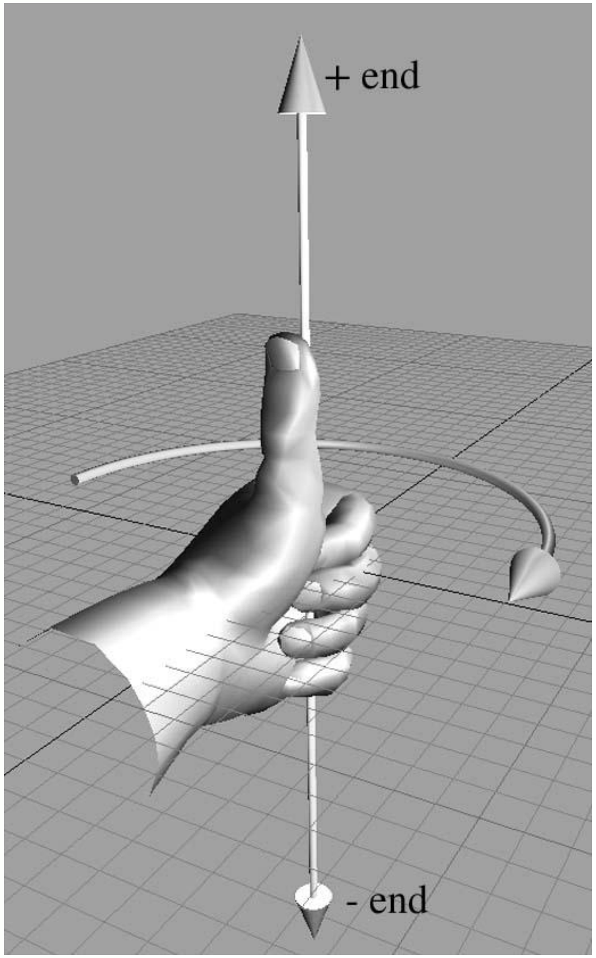
Rotacija u pozitivnom smeru

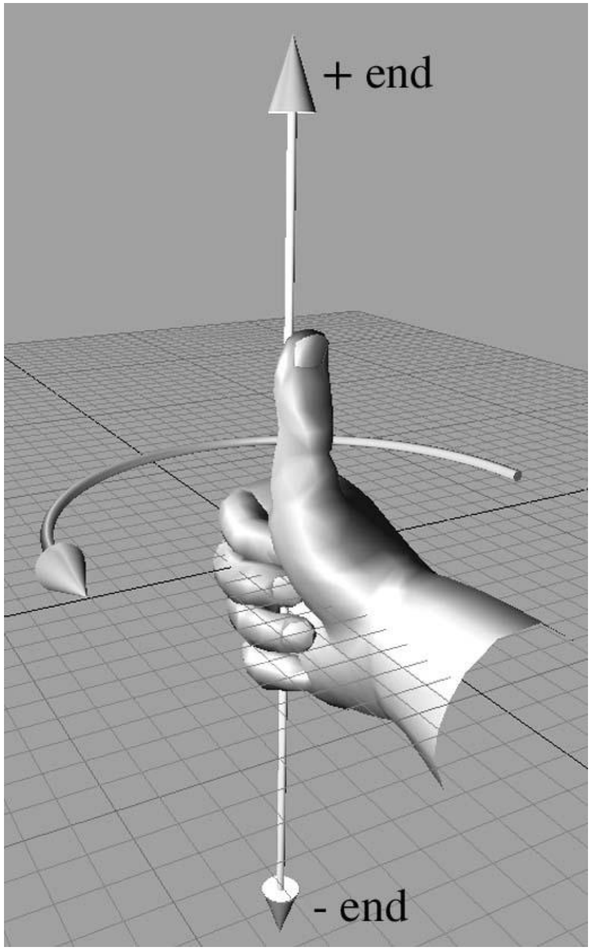
Dva moguća smera rotacije nazivaju se pozitivan i negativan.

I ovde koristimo ruke:
levu ruku za levi koordinatni sistem, desnu za desni.

- Pozitivan smer rotacije je onaj koji pokazuju prsti, kada je palac usmeren ka pozitivnom smeru ose rotacije.
- Osa rotacije ne mora biti ni jedna od koordinatnih osa!

Rotacija u pozitivnom smeru





Rotacija u pozitivnom smeru

Na prethodnom slajdu su ilustrovane rotacije u pozitivnom smeru,
za levi i desni koordinatni sistem,
kada je osa rotacije jedna od koordinatnih osa (*y*-osa).

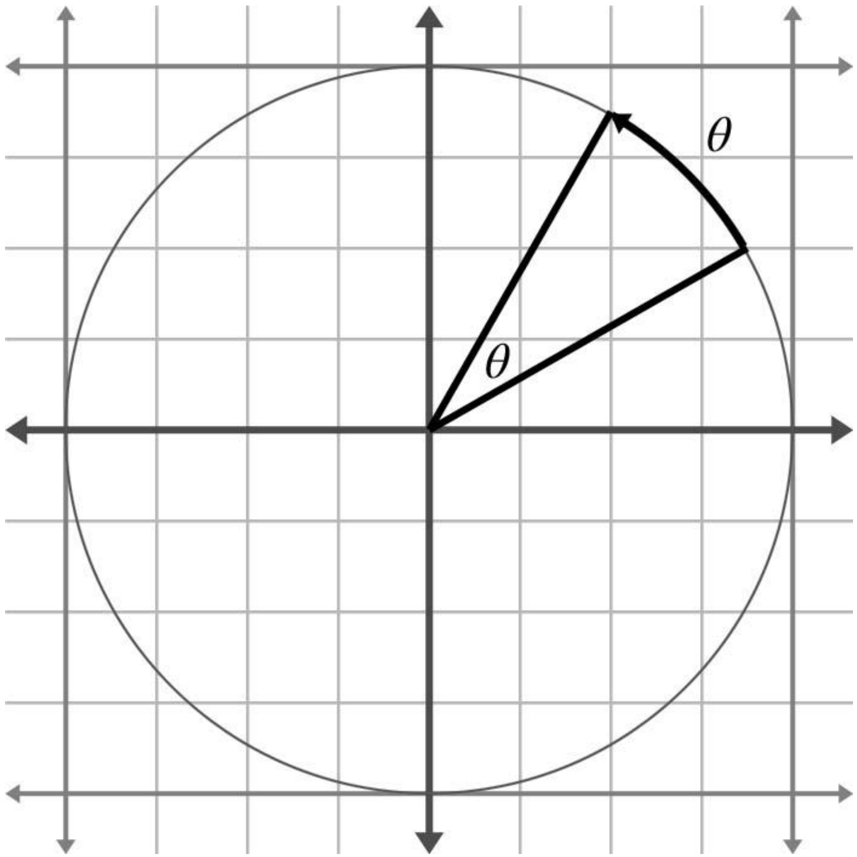
Levi koordinatni sistem: rotacija u pozitivnom smeru je rotacija u smeru kazaljke na satu.
Desni koordinatni sistem: rotacija u pozitivnom smeru je rotacija suprotno od smera kazaljke na satu.

Merenje uglova

- Mera ugla odgovara veličini rotacije u ravni.
- Uobičajeno koristimo stepene (°) i radijane (rad).
- Jednoj punoj rotaciji odgovara mera od 360°.
- Mera ugla izražena u radijanima odgovara dužini luka jedinične kružnice čiji je centralni ugao jednak uglu koji merimo.

Dakle, mera ugla θ u radijanima je odnos dužine kružnog luka i poluprečnika, za kružni isečak sa centralnim uglom θ.

Ugao θ radijana



Stepeni i radijani

- 2π radijana predstavlja punu rotaciju, jer odgovara dužini luka cele jedinične kružnice (obim).
- Kako je $360° = 2\pi$ rad, odnosno $180° = \pi$ rad, važi:
- Izraziti u stepenima ugao izmeren u radijanima znači pomnožiti sa $180/\pi \approx 57.29578$
- Izraziti u radijanima ugao izmeren u stepenima znači pomnožiti sa $\pi/180 \approx 0.01745329$.