

Nataša Sladoje

# Matematička analiza 2

Materijal za kurs na odseku Geodezija i geomatika,  
Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu

Materijal se, u najvećoj meri, zasniva na sledećim izvorima:

- Calculus III, Paul Dawkins, Lamar University, <http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx>
- Calculus, Gilbert Strang, MIT,
- Multivariable Calculus, MIT, 18.02SC, Fall 2010, <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/>
- Matematička analiza 2, Mila Stojaković, FTN Novi Sad, 2004
- Zbirka rešenih zadatak iz Matematičke analize II, N. Ralević, L. Čomić, J. Pantović, FTN Novi Sad, 2008

Najveći broj ilustracija preuzet je iz

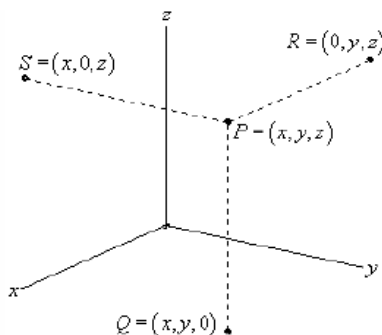
- Calculus III, Paul Dawkins, Lamar University, <http://tutorial.math.lamar.edu/terms.aspx>
- Calculus, Gilbert Strang, MIT,

# 1 Trodimenzionalni prostor

## 1.1 Osnovni pojmovi - 3D prostor, neke osnovne funkcije dve promenljive

Grafik funkcije  $y = f(x)$  je skup tačaka  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  koje zadovoljavaju dato pravilo preslikavanja. To znači da smo grafik funkcije jedne promenljive predstavljali u dvodimenzionalnom (pravouglom, Dekartovom) koordinatnom sistemu. Ovaj sistem određen je dvema uzajamno ortogonalnim koordinatnim osama.

Grafik funkcije  $z = f(x, y)$  je, analogno, skup tačaka  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  koje zadovoljavaju dato pravilo preslikavanja. Grafik funkcije dve nezavisne realne promenljive naziva se površ i prikazuje se u trodimenzionalnom (3D) pravouglom koordinatnom sistemu. Ovakav koordinatni sistem, sa tri uzajamno ortogonalne koordinatne ose, prikazan je na Slici 1.



Slika 1:

Tačka  $P(x, y, z)$  je proizvoljna tačka 3D prostora, a  $x, y, z$  su njene koordinate i odgovaraju, redom, projekcijama tačke  $P$  na koordinatne ose  $x, y$  i  $z$ . Takođe, tačke  $Q, S$ , i  $R$  su, redom, projekcije tačke  $P$  na koordinatne ravni  $xy, xz$  i  $yz$ . Uočimo da sve tačke  $xy$ -ravni imaju koordinate oblika  $(x, y, 0)$ , da sve tačke  $xz$ -ravni imaju koordinate oblika  $(x, 0, z)$ , i da sve tačke  $yz$ -ravni imaju koordinate oblika  $(0, y, z)$ . Karakteristika tačaka  $x$ -ose je da su oblika  $(x, 0, 0)$ , tačke  $y$ -ose su oblika  $(0, y, 0)$ , a tačke  $z$ -ose su oblika  $(0, 0, z)$ . Koordinatni početak se uobičajeno obeležava sa  $O(0, 0, 0)$ .

Rastojanje između tačaka  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  računa se pomoću formule

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Prikazaćemo grafički neke skupove tačaka. Naglašavamo da nismo u mogućnosti da predstavimo prostor  $\mathbb{R}^n$  za  $n > 3$ , pa će se, u skladu sa tim, i naši naredni primeri odnositi na jedno-, dvo- i trodimenzionalne prostore.

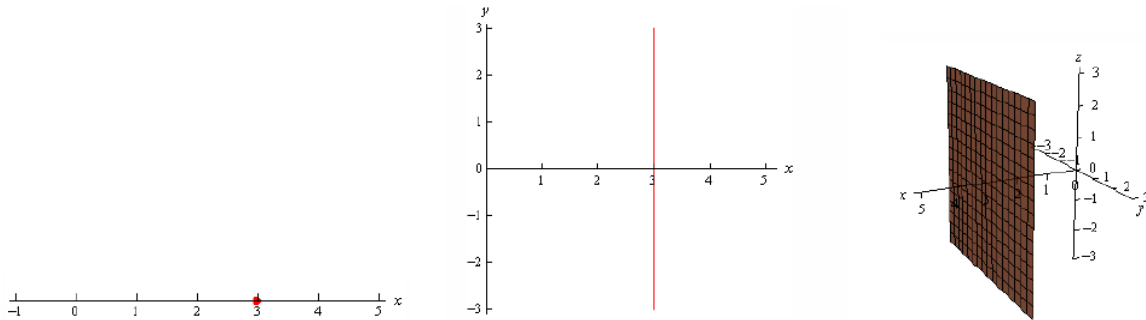
**Primer 1.1.** *Prikazati grafički skup tačaka koji zadovoljava uslov  $x = 3$ , u  $\mathbb{R}$ , u  $\mathbb{R}^2$  i u  $\mathbb{R}^3$ .*

**Rešenje:** Kao što ćemo se upravo uveriti, grafički prikazi skupova tačaka koji zadovoljavaju navedeni uslov  $x = 3$  se značajno razlikuju u zavisnosti od toga u kom prosturu ih posmatramo.

U  $\mathbb{R}$  traženi skup sadrži samo jednu tačku, kao što je prikazano na Slici 2(levo).

U prostoru  $\mathbb{R}^2$  traženi skup tačaka ima koordinate oblika  $(3, y)$  i obrazuje pravu normalnu na  $x$ -osu, kao što je prikazano na Slici 2(sredina).

Konačno, u prostoru  $\mathbb{R}^3$  datom jednačinom je određena ravan paralelna sa  $yz$ -ravni, kao što je prikazano na Slici 2(desno). Ove tačke imaju koordinate oblika  $(3, y, z)$ , odnosno proizvoljnu vrednost druge i treće koordinate. Na taj način opisuju prikazanu ravan.



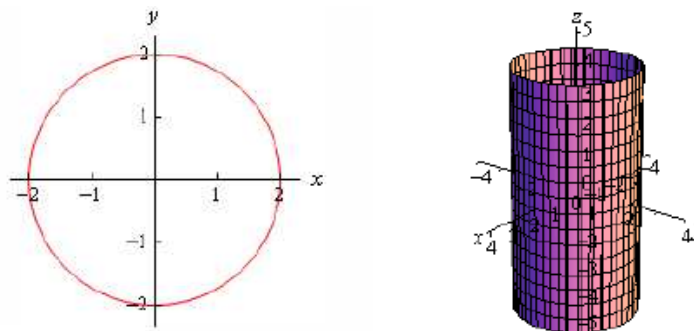
Slika 2: Skup tačaka koji zadovoljava jednačinu  $x = 3$  u  $\mathbb{R}$  (levo); u  $\mathbb{R}^2$  (sredina); u  $\mathbb{R}^3$  (desno).

**Primer 1.2.** Prikazati grafički skup tačaka koji zadovoljava uslov  $x^2 + y^2 = 4$ , u  $\mathbb{R}^2$  i u  $\mathbb{R}^3$ .

**Rešenje:** Ovim primerom samo još jednom naglašavamo ono što smo prikazali prethodnim primerom. Ovde ujedno možemo uočiti i da traženi skup tačaka, definisan uslovom koji uključuje dve promenljive, ne možemo prikazati u  $\mathbb{R}$ .

Skup koji u  $\mathbb{R}^2$  zadovoljava uslov  $x^2 + y^2 = 4$  predstavlja centralnu kružnicu poluprečnika 2. Ovo je prikazano na Slici 3(levo).

Za tačke prostora  $\mathbb{R}^3$  koje ispunjavaju navedeni uslov karakteristično je da njihova  $z$ -koordinata može imati proizvoljnu vrednost (nikakva ograničenja nisu postavljena). To dovodi do zaključka da tražene tačke pripadaju površi koja u preseku sa (svim) ravnima normalnim na  $z$ -osu generiše koncentrične kružnice poluprečnika 2. Ovaj “stek” kružnica formira cilindričnu površ prikazanu na Slici 3(desno).



Slika 3: Skup tačaka koji zadovoljava jednačinu  $x^2 + y^2 = 4$  u  $\mathbb{R}^2$  (levo); u  $\mathbb{R}^3$  (desno).

Napomenimo još i da iz prethodnog ne treba zaključiti da u prostoru  $\mathbb{R}^3$  ne možemo definisati kružnicu (ili neku drugu krivu), već samo površi. Na primer, skup tačaka koji u  $\mathbb{R}^3$  zadovoljava uslove  $x^2 + y^2 = 4$  i  $z = 5$  je kružnica sa centrom na  $z$ -osi (u tački  $(0, 0, 5)$ ), poluprečnika 2.

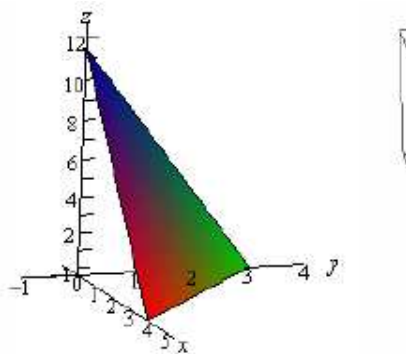
U nastavku ćemo navesti jednačine nekih površi koje se veoma često pojavljuju u praksi i sa kojima ćemo se često sretati. Prikazaćemo ih grafički. Naglašavamo da je crtanje grafika funkcija dve promenljive daleko složeniji postupak nego onaj koji koristimo za crtanje grafika funkcija jedne promenljive (a uz to grafike funkcija sa više od dve promenljive uopšte ne možemo da predstavimo). Zbog toga praktično nikad nećemo ni pokušavati da grafički predstavimo neku opštu funkciju dve promenljive; uglavnom ćemo se, bar kad je o graficima reč, zadovoljiti korišćenjem manjeg skupa “poznatih” površi (grafika). Ovu grupu čine tzv. *površii drugog reda*, i to samo jedan uži izbor ovih površi. Prikazaćemo ih u nastavku.

Napomenimo još samo da je opšti oblik površi drugog reda

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \quad (1)$$

pri čemu su  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$  konstante. Za razne vrednosti konstanti dobijaju se različiti tipovi površi.

**Ravan:** Prva površ koju navodimo nije u pravom smislu površ drugog reda, jer se dobija (samo) kada su svi koeficijenti uz nelinearne članove u jednačini (1) jednaki nuli. Dakle, opšta jednačina ravni je  $ax + by + cz + d = 0$ , pri čemu je  $\vec{n} = (a, b, c)$  vektor normale na tu ravan. Segmentni oblik jednačine ravni,  $\frac{x}{l} + \frac{y}{p} + \frac{z}{q} = 1$  omogućava direktno “čitavanje” koordinata tačaka preseka ravni sa koordinatnim osama: tačke  $(l, 0, 0)$ ,  $(0, p, 0)$  i  $(0, 0, q)$  su, redom, tačke preseka ravni sa  $x$ -,  $y$ -, i  $z$ -osom. Primer je prikazan na Slici 4. Ravan je data jednačinom  $z = 12 - 3x - 4y$ . Segmentni oblik,  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ , pokazuje da su tačke preseka ravni i koordinatnih osa, redom,  $(4, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  i  $(0, 0, 12)$ .



Slika 4: Grafik funkcije  $z = 12 - 3x - 4y$ ; ovo je jednačina ravni.

**Nivo linije površi:** Jedan od načina da steknemo neku ideju o tome kako površ izgleda je da posmatramo njene *nivo-linije*. Dobijamo ih kada fiksiramo vrednosti funkcije  $z$ , odnosno posmatramo krive oblika

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Na ovaj način generišemo familiju krivih koje predstavljaju preseke posmatrane površi sa horizontalnim ravnima  $z = C$ . “Stek” ovih krivih predstavlja posmatranu površ. Za  $z = 0$ , specijalno, dobijamo presek površi  $xy$ -ravni.

Primer je prikazan na Slici 5, gde su naznačene nivo-linije površi  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Na levoj strani Slike 5 nivo linije su prikazane u 3D prostoru, a na desnoj strani su nivo-linije prikazane kao krive u  $xy$ -ravni; tačnije, prikazane su projekcije nivo-linija na  $xy$ -ravan. Uz malo dodatne analize (u opštem slučaju, posmatranjem projekcija površi na preostale dve koordinatne ravni, odnosno fiksiranjem vrednosti promenljivih  $x = 0$  i  $y = 0$ , i/ili posmatranjem nivo linija za koje je  $x = C$  ili  $y = C$ ), možemo formirati kompletnu sliku o datoj površi. U ovom slučaju nije teško zaključiti da je posmatrana površ konus.

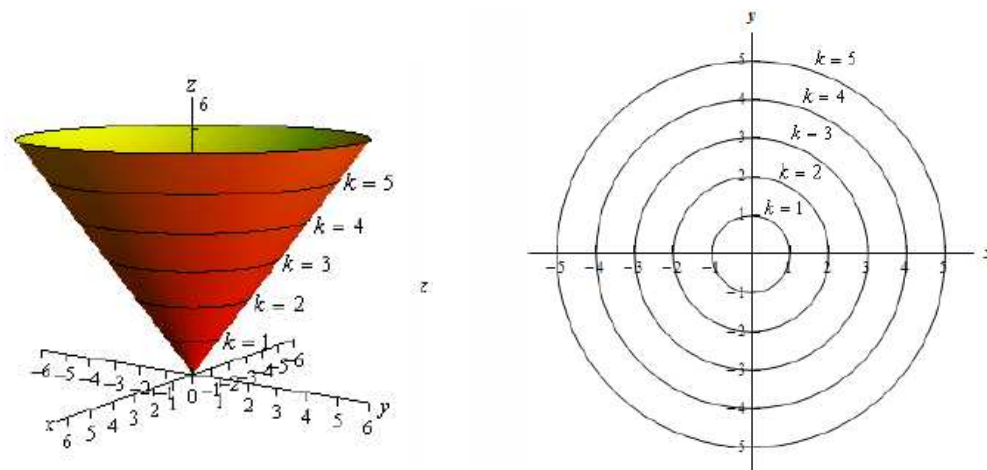
**Paraboloid:** Opšti oblik jednačine paraboloida je

$$z - c = A(x - a)^2 + B(y - b)^2, \quad \text{za } A \cdot B > 0.$$

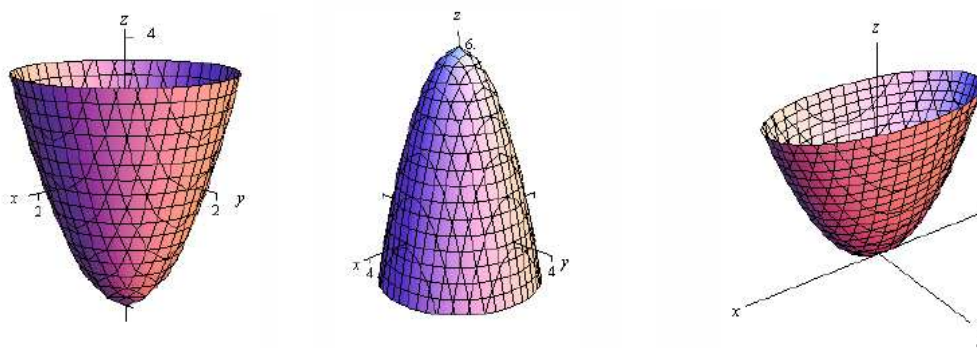
Ovako je prikazan paraboloid sa osom koja je paralelna  $z$ -osi i prodire  $xy$ -ravan u tački  $(a, b, 0)$ . U zavisnosti od vrednosti koeficijenata, paraboloid može biti eliptičan ili kružni (što je određeno oblikom nivo-linija), sa temenom u tački  $(a, b, c)$  koje je lokalni minimum ili lokalni maksimum. Neki primeri su dati na Slici 6. Zamenom uloga promenljivih dobijaju se paraboloidi čije su ose paralelne sa bilo kojom od koordinatnih osa.

**Konus:** Jednačina (dvostranog) konusa (sa osom paralelnom  $z$ -osi) je karakterističnog oblika

$$(z - c)^2 = A^2(x - a)^2 + B^2(y - b)^2,$$



Slika 5: Nivo-linije površi  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  prikazane u 3D prostoru (levo) i njihove projekcije u  $xy$ -ravni (desno).



Slika 6: Grafik funkcije  $z = 2x^2 + 2y^2 - 4$ ; ovo je jednačina kružnog paraboloida čije je teme lokalni minimum. Jednačina  $z = -x^2 - 2y^2 + 6$  odgovara kružnom paraboloidu koji je otvoren nadole. Jednačina  $z = A^2 x^2 + B^2 y^2$  je opšta jednačina eliptičnog paraboloida sa temenom (minimumom) u koordinatnom početku.

odakle se dobijaju jednačine

$$z = c + \sqrt{A(x-a)^2 + B(y-b)^2} \quad \text{i} \quad z = c - \sqrt{A(x-a)^2 + B(y-b)^2}.$$

Vrh konusa je tačka  $(a, b, c)$ . Nivo-linije konusne površi mogu biti kružnice ( $A = B$ ) ili elipse ( $A \neq B$ ). Primer dvostranog konusa sa temenom u koordinatnom početku je prikazan na Slici 7(levo).

**Cilindar:** Jednačina cilindrične površi se prepoznaje po odsustvu jedne promenljive: opšti oblik joj je

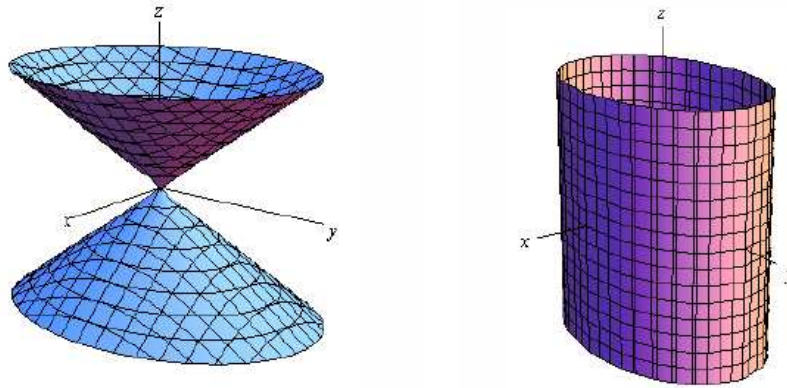
$$A^2(x-a)^2 + B^2(y-b)^2 = C^2.$$

Osa ove cilindrične površi je paralelna sa  $z$ -osom i prodire  $xy$ -ravan u tački  $(a, b, 0)$ . Zamenom uloga promenljivih mogu se generisati cilindri čije su ose paralelne drugim koordinatnim osama. Ovo je eliptična cilindrična površ ako je  $A \neq B$  (nivo-linije su elipse). Kružni cilindar se dobija za  $A = B$  (nivo-linije su kružnice). Primer eliptičnog cilindra čija je osa  $z$ -osa je prikazan na Slici 7(desno).

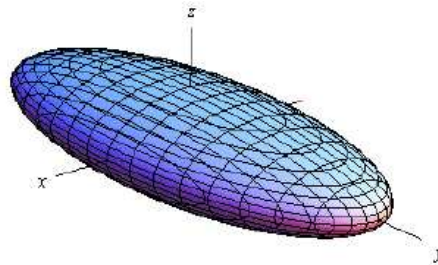
**Elipsoid:** Opšti oblik jednačine elipsoida je

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} + \frac{(z-c)^2}{C^2} = 1.$$

Centar ovog elipsoida je u tački  $(a, b, c)$ , a poluose (odseči koje formira na koordinatnim osama) su mu  $A$ ,  $B$ , i  $C$ . Ukoliko je  $A = B = C$ , jednačina odgovara sferi poluprečika  $A$ . Primer elipsoida sa centrom u koordinatnom početku prikazan je na Slici 8.



Slika 7: Konusna površ kojoj odgovara jednačina  $z^2 = A^2 x^2 + B^2 y^2$  (levo). Cilindrična površ data jednačinom  $r^2 = A^2 x^2 + B^2 y^2$  (desno).



Slika 8: Elipsoid sa centrom u koordinatnom početku i poluosama  $A$ ,  $B$ , i  $C$ , dat je jednačinom  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ .

## 2 Višestruki integrali

### 2.1 Uvod: Određeni integral funkcije jedne promenljive

Uopšćićemo pojam određenog integrala (skalarne) funkcije jedne promenljive, koji smo definisali i izračunavali na zatvorenom intervalu koji je podskup domena posmatrane funkcije.

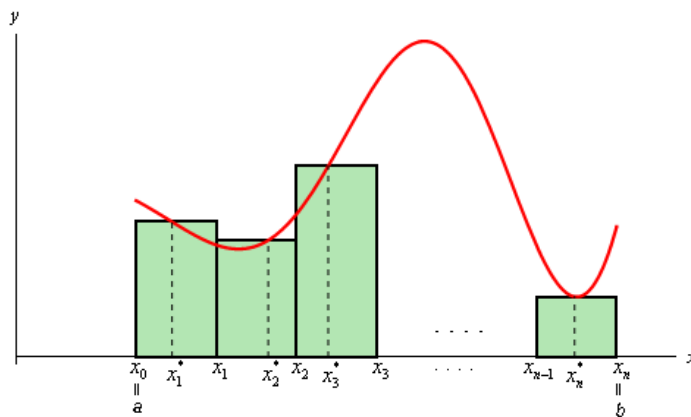
Posmatraćemo, prvo, skalarne funkcije više (dve i tri) promenljivih i definisati *višestruke* (dvostruke i trostruke) integrale ovih funkcija, uzimajući za domen integracije neki podskup domena posmatrane funkcije. Dalje, definišaćemo integral skalarne i vektorske funkcije više promenljivih uzimajući za domen integracije neku krivu koja je podskup domena posmatrane funkcije. Tako ćemo doći do pojma *krivolinijskog* integrala (skalarne i vektorske funkcije). Konačno, definišaćemo integrale skalarnih i vektorskih funkcija više promenljivih nad domenom integracije koji je neka površ koja je podskup domena posmatranih funkcija; na ovaj način definišaćemo *površinske*

integrale (skalarnih i vektorskih funkcija).

Korisno je imati na umu definiciju određenog integrala. I način definisanja, i način izračunavanja svih ostalih inegrala će se, u velikoj meri, oslanjati na ovaj osnovni slučaj. Za datu funkciju  $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , i podelu  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  (konačnog) intervala  $[a, b]$  određenu tačkama  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , takvim da je  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , određeni integral ove funkcije na intervalu  $I = [a, b] \subset D$  je definisan kao

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i, \quad (2)$$

pri čemu je  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , i  $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ , pod uslovom da navedena granična vrednost postoji za svaku podelu  $P$ , nezavisno od izbora tačaka  $x_i$  i  $x_i^*$ .

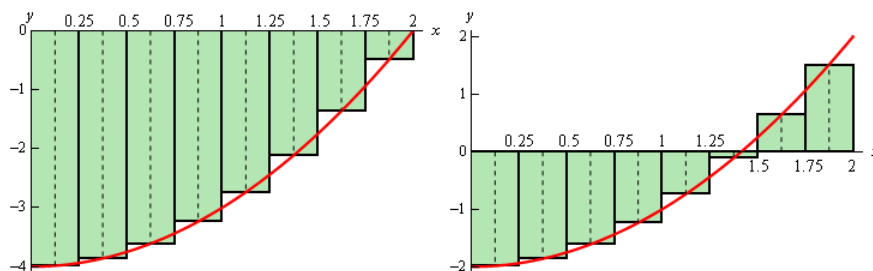


Slika 9: Geometrijska interpretacija određenog integrala: Rimanova integralna suma kao zbir površina pravougaonika

Suma  $I(f, P) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$  naziva se integralna (Rimanova) suma funkcije  $f$ . Geometrijska interpretacija Rimanove sume prikazana je na Slici 9. Određeni integral funkcije jednak je, dakle, graničnoj vrednosti niza integralnih suma te funkcije. Ovo će, u osnovi, važiti za sve vrste integrala koje ćemo definisati. Postojanje integrala

(postojanje granične vrednosti) obezbeđeno je uslovom da je funkcija  $f$  (podintegralna funkcija) ograničena na intervalu integracije  $I$ , i da na tom intervalu ima najviše konačno mnogo tačaka prekida. Uočimo da određeni integral svakako postoji ako je  $f$  neprekidna funkcija na posmatranom (zatvorenom) intervalu  $I$ .

Geometrijski, određeni integral funkcije  $y = f(x)$  na intervalu  $[a, b]$ , pod uslovom da je  $f(x) \geq 0$  za  $x \in [a, b]$ , je jednak površini koju ograničavaju grafik funkcije  $y = f(x)$  i  $x$ -osa, između pravih  $x = a$  i  $x = b$ . Ukoliko je funkcija negativna na posmatranom intervalu, površina između krive i  $x$ -ose jednaka je negativnoj vrednosti odgovarajućeg određenog integrala. Ovo je ilustrovano na Slici 10.



Slika 10: Aproksimacija površine između grafika funkcije i  $x$ -ose, u slučaju kada je funkcija na posmatranom intervalu negativna (levo) i u slučaju kada funkcija na posmatranom intervalu menja znak (desno).



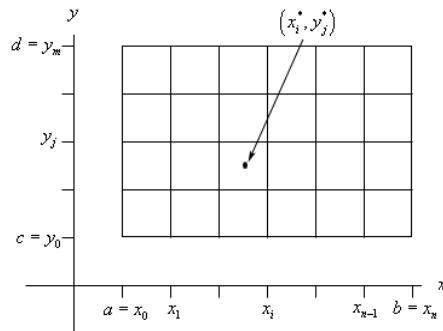
Uočimo da se izračunavanje navedene površine svodi na određivanje zbira površina  $n$  pravougaonika, čije su stranice  $\Delta x_i$  i  $f(x_i^*)$ , za  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ovi pravougaonici aproksimiraju posmatranu površinu i intuitivno je jasno da, što je  $\Delta x_i$  manje, a samim tim i što je pravougaonika više, aproksimacija je sve bolja, odnosno sve manje odstupa od stvarne vrednosti površine. Posmatranjem graničnog procesa, kada stranice  $\Delta x_i$  pravougaonika teže nuli ( $\Delta x_i \rightarrow 0$ ) (pri čemu broj pravougaonika neograničeno raste ( $n \rightarrow \infty$ )), dolazimo do definicije određenog integrala, a sa druge strane, do tačne vrednosti posmatrane površine. Ovaj pristup primenićemo mnogo puta prilikom uopštavanja integrala.

## 2.2 Dvostruki integral

### 2.2.1 Definicija, osnovne osobine i geometrijska interpretacija

Dvostruki integral ćemo, baš kao i određeni, definisati kao graničnu vrednost odgovarajuće Rimanove integralne sume. Posmatraćemo ga, i izračunavati, za funkcije dve promenljive.

Neka je realna funkcija  $z = f(x, y)$  definisana nad skupom  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Neka je izvršena podela  $P = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  skupa  $G$  na  $n$  disjunktih podskupova  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , takvih da je  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ , i neka je u svakom od skupova  $G_i$  izabrana tačka  $(x_i^*, y_i^*) = \xi_i$ . Ova situacija je ilustrovana na Slici 11, za oblast  $G$  koja je pravougaona, i za jedan određen način podele. Posmatraćemo vrednosti  $f(\xi_i) = f(x_i^*, y_i^*)$ , za  $i = 1, \dots, n$ .



Slika 11: Pravougaona oblast  $G$  i njena podela na pod-oblasti  $G_i$ . U ovom specijalnom slučaju oblasti  $G_i$  su kvadrati. U svakoj podoblasti bira se jedna tačka  $(x_i^*, y_i^*) = \xi_i$

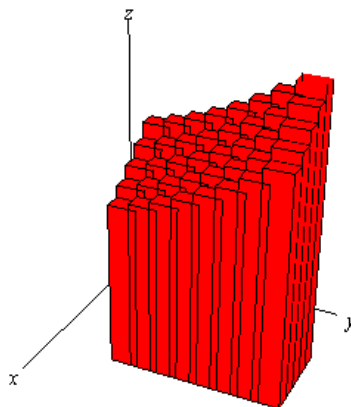
Označimo sa  $\Delta G_i$  površinu skupa (oblasti)  $G_i$ . Formirajmo sumu  $I(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta G_i$ , a zatim posmatrajmo graničnu vrednost ove sume, kada broj podskupova  $G_i$  neograničeno raste, pri čemu površina svakog od njih teži nuli. Ukoliko ova granična vrednost postoji za svaku podelu  $P$ , nezavisno od izbora skupova  $G_i$  i tačaka  $(x^i, y^i) = \xi_i \in G_i$ , onda je njom definisan *dvostruki integral* funkcije  $z = f(x, y)$  nad oblašću (skupom)  $G$ :

$$\iint_G f(x, y) dA = \lim_{\Delta G_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta G_i = \lim_{\Delta G_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x^i, y^i) \Delta G_i. \quad (3)$$

Veličina  $dA$ , koja se pojavljuje pod dvostrukim integralom, naziva se element površine (“area element”) i predstavlja meru površine beskonačno male oblasti u  $\mathbb{R}^2$ .

Pre svega, uočimo analogiju sa definicijom određenog integrala; jedina formalna izmena je u tome što je  $f$  sada funkcija dve promenljive, sa čim je u skladu i domen integracije, skup  $G$ , kao i njegova podela na skupove  $G_i$ .

Geometrijski smisao dvostrukog integrala je uopštenje geometrijske interpretacije određenog integrala: proizvod  $f(x_i^*, y_i^*) \Delta G_i$  jednak je, za funkciju  $f$  koja je nenegativna nad skupom  $G$ , zapremini cilindričnog skupa tačaka (tela) čija je baza oblast  $G_i$ , površina baze je  $\Delta G_i$ , izvodnica je paralelna  $z$ -osi, a visina jednaka  $f(x_i^*, y_i^*)$ . Suma ovakvih zapremina, za  $i = 1, \dots, n$ , aproksimira zapreminu (cilindrične) 3D oblasti između grafika funkcije  $z = f(x, y)$  i  $xy$ -ravni, za  $(x, y) \in G$ . Ova situacija je ilustrovana na Slici 12, za prougaonu oblast  $G$ .



Slika 12: Aproksimacija zapremine integralnom sumom.

Ukoliko se podela oblasti  $G$  na podoblasti  $G_i$  vrši tako da broj oblasti neograničeno raste, pri čemu površina svake od podoblasti teži nuli, onda dobijena suma zapremina sve manje odstupa od tačne vrednosti posmatrane zapremine. Konačno, u graničnom slučaju važi jednakost.

Dalje, napomenimo da dvostruki integral funkcije  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  nad oblašću  $G \subset D$ , postoji ako je rub oblasti  $G$  zatvorena, po delovima glatka kriva, a  $f$  je neprekidna funkcija nad  $G$ . Ovi uslovi obezbeđuju postojanje granične vrednosti niza integralnih suma  $I(f, P)$  i biće ispunjeni u svim primerima na koje budemo nailazili u okviru kursa.

Važne osobine dvostrukog integrala, koje ćemo intenzivno koristiti u radu, su:

- $\iint_G \alpha f(x, y) dA = \alpha \iint_G f(x, y) dA$ , za  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $\iint_G (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_G f(x, y) dA \pm \iint_G g(x, y) dA$ ;
- $\iint_G f(x, y) dA = \iint_{G_1} f(x, y) dA + \iint_{G_2} f(x, y) dA$ , za  $G = G_1 \cup G_2$  i  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  (izuzev, eventualno, zajedničkih rubnih tačaka).

(Pretpostavili smo da važi sve što je potrebno da prethodni integrali budu definisani.)

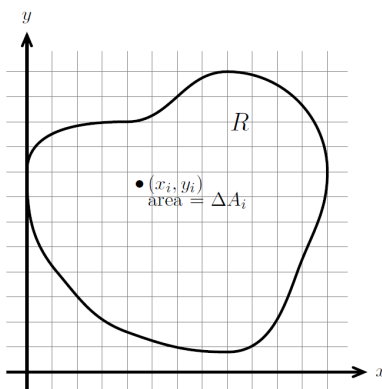
Uočimo da važi: ako je  $f(x, y) \leq 0$  za  $(x, y) \in G$ , onda je  $\iint_G f(x, y) dA \leq 0$ . Ovo se lako uočava posmatranjem odgovarajuće integralne sume, čiji su svi sabirci u navedenom slučaju nepozitivni, pa isto mora važiti i za graničnu vrednost (odnosno, za integral). Ovu osobinu dvostrukog integrala treba imati na umu pri izračunavanju zapremine oblasti: ukoliko je posmatrana oblast (delom) ispod  $xy$ -ravni, odgovarajući integral treba uzeti sa negativnim predznakom!

Konačno, ilustrujmo navedeno jednostavnim primerom.

**Primer 2.1.** Koristeći dvostruki integral izračunati površinu oblasti  $R$  u  $xy$ -ravni.

*Rešenje:* Površina oblasti  $R$  se može izračunati kao suma površina (beskonačno mnogo beskonačno malih podoblasti)  $A_i$  koje čine particiju oblasti  $R$ . Ovo je prikazano na Slici 13. To znači da je

$$P = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \iint_R dA. \quad (4)$$



Slika 13: Izračunavanje površine oblasti  $R$  korišćenjem integralne sume, odnosno dvostrukog integrala.

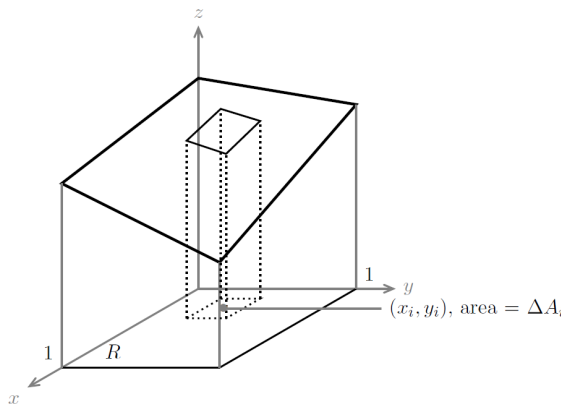
Dakle, dvostruki integral nad oblašću  $G$  podintegralne funkcije  $f(x, y) \equiv 1$  koristi se za izračunavanje površine skupa  $G$  u ravni.

**Primer 2.2.** Koristeći dvostruki integral odrediti zapreminu oblasti ispod grafika funkcije (površni)  $z = f(x, y) = 2 - 0.5(x + y)$  i iznad jediničnog kvadrata u  $xy$ -ravni.

*Rešenje:* Jedinični kvadrat u  $xy$ -ravni možemo opisati kao skup tačaka

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

Ovaj skup tačaka, kao i površ  $z = f(x, y) = 2 - 0.5(x + y)$ , prikazani su na Slici 14.



Slika 14: Oblast ispod grafika funkcije (površni)  $z = f(x, y) = 2 - 0.5(x + y)$  i iznad jediničnog kvadrata u  $xy$ -ravni, Primer 2.2. Naznačen je i jedan element podele  $P$ .

Nije uvek jednostavno grafički prikazati oblast čiju zapreminu izračunavamo, ali to u mnogim jednostavnim slučajevima nije ni neophodno. Dovoljno je odrediti znak funkcije nad posmatranim domenom. U ovom primeru lako je analitički utvrditi da je data funkcija pozitivna nad skupom  $K$ : kako je  $z = 2 - 0.5(x + y)$  linearna funkcija dve promenljive koja predstavlja jednačinu ravni, dovoljno je utvrditi da su vrednosti funkcije u svim temenima kvadrata pozitivne. Tada znamo da to važi i za sve unutrašnje tačke kvadrata, odnosno da je površ iznad  $xy$ -ravni nad čitavim domenom  $K$ .

Tražena zapremina je, dakle, jednaka vrednosti dvostrukog integrala date funkcije, pri čemu je skup  $K$  oblast integracije:

$$V = \iint_K (2 - 0.5(x + y)) dA.$$

Izračunavanje (ovog) dvostrukog integrala, odnosno tražene zapremine, je sledeća tema kojom se bavimo.

## 2.2.2 Izračunavanje dvostrukog integrala, određivanje granica integracije

Postupak za izračunavanje dvostrukog integrala izvešćemo polazeći od jednostavnijeg, specijalnog slučaja, kada je oblast integracije pravougaonik u  $xy$ -ravni, a zatim uopštavajući razmatranje na slučaj kada je oblast integracije proizvoljan skup u  $xy$ -ravni.

1. *Oblast integracije  $G$  je pravougaona oblast u  $xy$ -ravni.*

Dakle, neka je

$$G = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Vršeći podelu intervala  $[a, b]$  i intervala  $[c, d]$  kao pri izračunavanju određenog integrala na intervalu, dobijamo dva niza deobnih tačaka,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad \text{i} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d.$$

Označimo

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1},$$

i odaberimo proizvoljno tačke

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], \quad y_j^* \in [y_{j-1}, y_j].$$

Ovom podelom, pravougaonik  $G$  je podeljen na  $n \cdot m$  disjunktih podskupova, koji su takođe pravougaonici. Ovakva podela pravougaone oblasti  $G$  je prikazana na Slici 11. Površina svakog podskupa  $\Delta G_i$  jednaka je  $\Delta G_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ . Sada je:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dA &= \lim_{\substack{\Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left( \lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta y_j \right) \Delta x_i \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left( \int_{c=y_{\min}}^{d=y_{\max}} f(x_i^*, y) dy \right) \Delta x_i \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h(x_i^*) \Delta x_i \\ &= \int_{a=x_{\min}}^{b=x_{\max}} h(x) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Ovde smo koristili oznaku

$$h(t) = \int_c^d f(t, y) dy = \lim_{\Delta y_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f(t, y_j^*) \Delta y_j$$

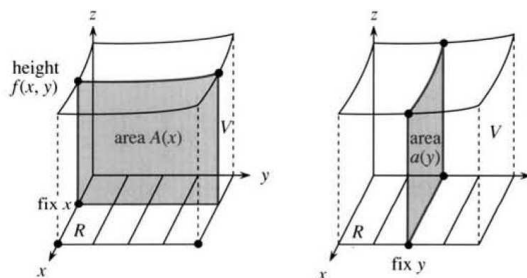
da bismo lakše uočili i bolje naglasili pojavu (integralne sume i) određenog integrala funkcije jedne promenljive.

Zaključujemo, dakle, da se dvostruki integral funkcije nad pravougaonom oblašću  $G$  izračunava uzastopnim izračunavanjem dva integrala funkcije jedne promenljive, od kojih je svaki u konstantnim granicama. Lako je uočiti da redosled izračunavanja ovih integrala ne utiče na rezultat. Redosled može, međutim, da utiče na složenost izračunavanja, pa je dobro uočiti koji poredak integracije zahteva jednostavniji račun.

Na Slici 15 grafički je interpretiran opisani postupak izračunavanja dvostrukog integrala uzastopnim izračunavanjem određenog integrala po jednoj, a zatim po drugoj promenljivoj.

Dalje, uočimo i da je podela oblasti  $G$  u  $xy$ -ravni, opisana u ovom odeljku, prirodna podela u pravouglom koordinatnom sistemu. Odatle za element površine  $dA$  (koji dobijamo kada  $\Delta G_i \rightarrow 0$ , odnosno kada  $\Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0$ ) u pravouglom koordinatnom sistemu dobijamo:

$$dA = dx dy = dy dx.$$



Slika 15: Izračunavanje dvostrukog integrala nad pravougaonom oblasti integracije. Pri uzastopnom izračunavanju određenih integrala, prvo je fiksirana promenljiva  $x$  (levo); promenljiva  $y$  (desno).

Uzimajući sve navedeno u obzir, zaključujemo da je za pravougaonu oblast  $G = [a, b] \times [c, d]$

$$\iint_G f(x, y) \, dA = \iint_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy. \quad (5)$$

**Primer 2.3.** Izračunati  $\iint_G (xy + y^3) \, dA$ , ako je  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 1\}$ .

*Rešenje:* Oblast integracije je pravougaona. Primenjujući prethodno opisani postupak, dobijamo:

$$\begin{aligned} \iint_G (xy + y^3) \, dA &= \iint_G (xy + y^3) \, dx \, dy \\ &= \int_1^3 \left( \int_0^1 (xy + y^3) \, dy \right) dx = \int_1^3 \left( \frac{xy^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 dx = \int_1^3 \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) dx = \frac{5}{2} \\ &= \int_0^1 \left( \int_1^3 (xy + y^3) \, dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{x^2 y}{2} + xy^3 \right) \Big|_1^3 dy = \int_0^1 (4y + 2y^3) \, dy = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, zadatak smo rešili uzastopnom primenom određenih integrala funkcije jedne promenljive. Pri tome, ilustrovali smo i mogućnost promene redosleda integrala.

## 2. Oblast integracije $G$ je proizvoljna oblast u $xy$ -ravni.

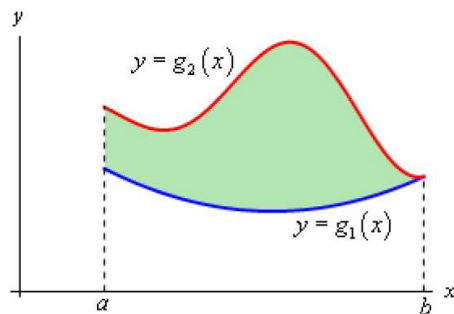
Slučaj da je oblast integracije različita od pravougaone je u praksi mnogo češći. Jedina razlika, međutim, između postupaka za izračunavanje integrala za slučaj kada je  $G$  pravougaona i kada je  $G$  opšta oblast u  $\mathbb{R}^2$  je u određivanju granica integracije. Odmah treba napomenuti da je za dobro određivanje granica integracije od velike pomoći i značaja grafičko predstavljanje oblasti integracije.

Posmatrajmo oblast  $G$  u  $xy$ -ravni, u pravouglom koordinatnom sistemu. Pretpostavimo da je

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

Dakle, na posmatranom intervalu  $[a, b]$   $x$ -ose je  $G$  oblast ograničena odozgo grafikom funkcije  $g_2$ , a odozdo grafikom funkcije  $g_1$ . U tačkama  $x = a$  i  $x = b$  funkcije  $g_1$  i  $g_2$  mogu, a ne moraju, imati jednake vrednosti. Primer ovakve oblasti  $G$  prikazan je na Slici 16.

Naš zadatak je da izračunamo  $\iint_G f(x, y) \, dx \, dy$ , za neku funkciju  $z = f(x, y)$  koja je definisana nad skupom  $G$ . Ovo, kao što je već ranije rečeno, odgovara izračunavanju zapremine oblasti između  $xy$ -ravni i grafika funkcije  $f$ , nad skupom  $G$ . Uočimo da odmah možemo da koristimo da je  $dA = dx \, dy = dy \, dx$ , s obzirom na pretpostavku o pravouglom koordinatnom sistemu. Podelimo posmatranu zapreminu ravnima koje su paralelne sa  $yz$ -ravni, postavljenim u tačkama  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  intervala  $[a, b]$  na  $x$ -osi. Za svako fiksirano  $x_i$   $y$ -koordinate tačaka oblasti  $G$  pripadaju intervalu  $[g_1(x_i), g_2(x_i)]$ .



Slika 16: Oblast integracije  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ .

Posmatrana zapremina je zbir zapremina dobijenih podskupova; svaki podskup je (uspravna) “prizma” čija je jedna bočna stranica deo površi  $z = f(x, y)$ , a osnove pripadaju dvema uzastopnim konstruisanim ravnima. Zapremina ( $V_i$ ) svake takve prizme se može aproksimirati zapreminom “malo pravilnije prizme” (čije su obe osnovice jednaki krivolinijski trapezi). Takva zapremina se izračunava množenjem površine osnove ( $B_i$ ) i visine ( $H_i$ ):

$$V_i \approx H_i \cdot B_i = \Delta x_i \cdot \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy . \quad (6)$$

Prethodno važi jer je baza  $B_i$  svake prizme 2D oblast u ravni  $x = x_i$ , između krive  $z = f(x_i, y)$  i  $xy$ -ravni, za  $y \in [g_1(x_i), g_2(x_i)]$ . Pri tome,  $z = f(x_i, y)$  je restrikcija funkcije  $z = f(x, y)$  za  $x = x_i$  odnosno kriva koja se dobija u preseku površi  $z = f(x, y)$  i ravni  $x = x_i$ . Kako je ravan  $x = x_i$  paralelna sa  $yz$ -ravni, površina posmatrane 2D oblasti je jednaka površini projekcije te oblasti na  $yz$ -ravan. Ova površina je jednaka određenom integralu u (6). Takođe, visina  $H_i$  svake prizme je jednaka rastojanju dve uzastopne tačke podele intervala  $[a, b]$  (dve uzastopne deobne ravni), odnosno,  $H_i = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ .

Sada je

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta x_i \cdot \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy ,$$

što je integralna suma funkcije  $F_{x_i}(y) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y) dy$ . Dakle, za podelu intervala  $[a, b]$ , za koju važi da  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , je

$$\begin{aligned} V = \iint_G f(x, y) dx dy &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F_{x_i}(y) \Delta x_i \\ &= \int_a^b F_x(y) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx . \end{aligned}$$

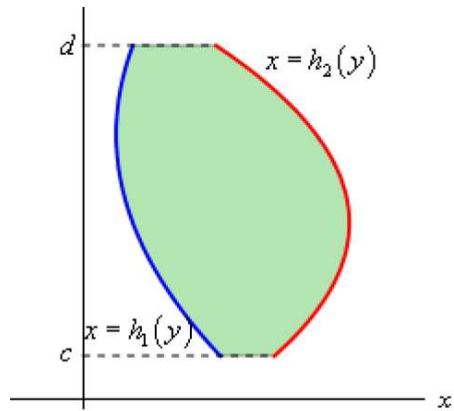
Napomenimo odmah da, ukoliko je oblast integracije  $G$  pogodno opisati kao

$$G = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \quad c \leq y \leq d\} ,$$

što odgovara oblasti prikazanoj na Slici 17, možemo analogno izvesti formulu

$$V = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy .$$

Izbor formule zavisi od oblasti  $G$ ; biramo onaj poredak promenljivih koji vodi ka jednostavnijem postavljanju granica integracije i jednostavnijoj evaluaciji određenih integrala. Često su oba poretka integracije pogodna. Bitno je uočiti da je spoljašnji integral (onaj integral koji poslednji računamo) uvek u konstantnim granicama.

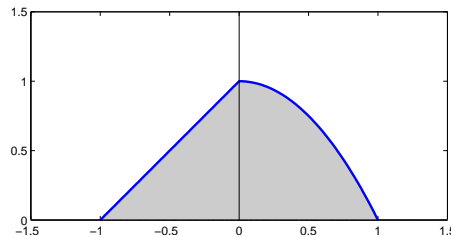


Slika 17: Oblast integracije  $G = \{(x, y) \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \quad c \leq y \leq d\}$ .

Konačno, uočimo da oblast  $G$  može biti takva da je nije moguće opisati ni na jedan od navedenih načina, odnosno, da ne postoje dve krive za koje važi da je  $G$  u celini ispod (levo od) jedne od njih, a iznad (desno od) druge od njih. U tom slučaju je uvek moguće podeliti  $G$  na disjunktne podskupove tako da za svaki od podskupova navedeni uslov važi i opisani postupci se mogu primeniti. Integral nad  $G$  je tada jednak zbiru integrala nad (disjunktним) podskupovima od  $G$ . U narednim primerima ilustrovaćemo neke od opisanih postupaka.

**Primer 2.4.** Izračunati  $\iint_G xy \, dx \, dy$ , ako je  $G$  oblast ograničena  $x$ -osom i graficima funkcija  $y = x + 1$  za  $x < 0$  i  $y = 1 - x^2$  za  $x \geq 0$ .

*Rešenje:* Oblast  $G$  je prikazana na Slici 18.



Slika 18: Oblast integracije  $G$  u Primeru 2.4.

Vidimo da oblast  $G$  odozgo ograničavaju grafici dve različite funkcije: funkcija  $y = x + 1$  na intervalu  $[-1, 0]$  i funkcija  $y = 1 - x^2$  na intervalu  $[0, 1]$ . Oblast je odozdo ograničena  $x$ -osom, odnosno pravom  $y = 0$ . Ovo znači da treba da podelimo oblast vertikalnom pravom, u ovom slučaju  $x = 0$ , da bi oblast integracije mogla da se posmatra kao unija dve oblasti oblika kao na Slici 16. Tako dobijamo:

$$G = G_1 \cup G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 0, \quad 0 < y < x + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 - x^2\},$$

pa je traženi integral

$$\begin{aligned}
 \iint_G xy \, dx \, dy &= \int_{-1}^0 \left( \int_0^{x+1} xy \, dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} xy \, dy \right) dx \\
 &= \int_{-1}^0 \left( \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{x+1} \right) dx + \int_0^1 \left( \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^0 \left( \frac{x(x+1)^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left( \frac{x(1-x^2)^2}{2} \right) dx \\
 &= \text{itd.}
 \end{aligned}$$

Uočimo da je oblast  $G$  moguće jednostavnije predstaviti na sledeći način:

$$G = \{(x, y) \mid y - 1 < x < \sqrt{1 - y}, \quad 0 < y < 1\},$$

odakle je traženi integral

$$\begin{aligned}
 \iint_G xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left( \int_{y-1}^{\sqrt{1-y}} xy \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{x^2 y}{2} \Big|_{y-1}^{\sqrt{1-y}} \right) dy \\
 &= \text{itd.}
 \end{aligned}$$

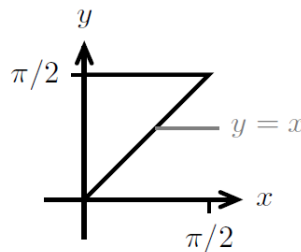
**Primer 2.5.** Izračunati  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$  menjajući poredak integracije.

*Rešenje:* Na osnovu navedenih granica integracije, vidimo da je oblast integracije

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad x < y < \frac{\pi}{2}\},$$

što smo prikazali na Slici 19 sa koje, zatim, vidimo da je  $G$  moguće opisati i kao

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}\}.$$



Slika 19: Oblast integracije  $G$  u Primeru 2.5.

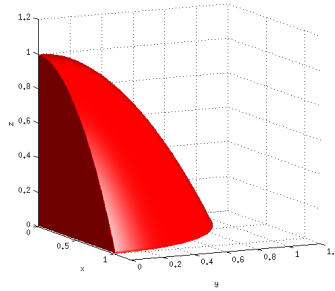
Tada je

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^y \frac{\sin y}{y} \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin y}{y} \cdot x \Big|_0^y \right) dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \\
 &= -\cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1
 \end{aligned}$$



**Primer 2.6.** Odrediti zapreminu oblasti ispod paraboloida  $z = 1 - x^2 - y^2$ , u prvom oktantu.

*Rešenje:* Nije teško zaključiti da je data površ paraboloid sa temenom (maksimumom) u tački  $(0,0,1)$ , koji seče  $xy$ -ravan (čija je jednačina  $z = 0$ ) po kružnici  $x^2 + y^2 = 1$ . Tačke koje se nalaze u prvom oktantu zadovoljavaju uslov da su im koordinate nenegativne, pa je oblast  $G$  nad kojom posmatramo paraboloid i traženu zapreminu četvrtina jediničnog kruga u (prvom kvadrantu)  $xy$ -ravni. Ova oblast prikazana je na Slici 20.



Slika 20: Oblast integracije  $G$  u Primeru 2.6.

Tražena zapremina je tada

$$\begin{aligned} V &= \iint_G (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( (y - x^2 y - \frac{y^3}{3}) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt. \end{aligned}$$

Poslednji integral dobili smo uvođenjem smene  $x = \sin t$ . On se rešava rastavljanjem stepena trigonometrijske funkcije na zbir trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova (jedan način je korišćenje Ojlerovih formula). Kako je

$$\cos^4 t = \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{1}{2} \cos 4t \right),$$

tražena zapremina je

$$V = \frac{\pi}{8}.$$

### 2.2.3 Uvođenje polarnih koordinata

Rešavanje integrala kojim smo izračunali zapreminu u prethodnom primeru (Primer 2.6) nije baš sasvim jednostavno, mada se čini da ni funkcija, a ni oblast integracije nisu preterano komplikovani. Uočavamo da su i podintegralna funkcija i oblast integracije rotaciono simetrični. To nas navodi da, umesto pravougljih, koristimo *polarne* koordinate; u polarnom koordinatnom sistemu (polarnoj ravni) položaj tačke je, umesto projekcijama  $x$  i  $y$  na (ortogonalne) koordinatne ose, određen rastojanjem  $r$  tačke od koordinatnog početka i uglom  $\theta$  koji poluprava određena posmatranom tačkom i koordinatnim početkom obrazuje sa polarnom polupravom (polarnom osom). Dakle, uspostavljamo vezu između dva zapisa tačke  $P$  u ravni:

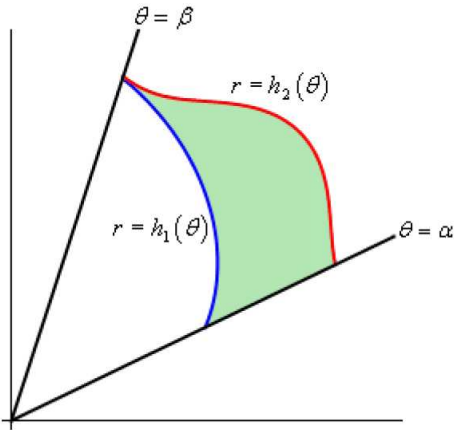
$$P(x, y) \leftrightarrow P(r, \theta) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Lako je uočiti, posmatrajući trigonometrijske funkcije oštrog ugla u pravouglom trouglu, da važi da je

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

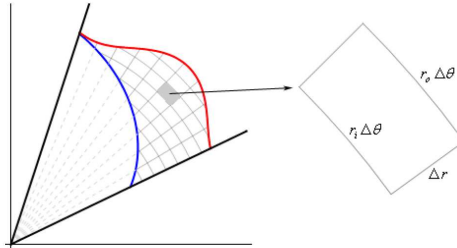
Na Slici 21 prikazana je oblast integracije  $G$  koja se jednostavno i prirodno opisuje korišćenjem polarnih koordinata; opisivanje ove oblasti u pravouglom koordinatnom sistemu zahtevalo bi mnogo više truda. Dakle, možemo napisati da je

$$G = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}.$$



Slika 21: Oblast  $G$  prikazana u polarnim koordinatama:  $G = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$ .

Za oblast integracije  $G$  u polarnom koordinatnom sistemu, prirodna podela na podoblasti je ona koja se dobija za male promene vrednosti promenljivih. Oblast  $G_i$  u takvoj podeli dobijamo fiksirajući  $\theta$ , a zatim menjajući  $r$  za  $\Delta r$ , pa onda posmatrajući novu vrednost ugla,  $\theta + \Delta\theta$ , i menjajući  $r$  ponovo za  $\Delta r$ . Ovakvu oblast opisujemo kao  $[r, r + \Delta r] \times [\theta, \theta + \Delta\theta]$  u polarnoj ravni. Podela oblasti  $G$  i izgled oblasti  $G_i$  prikazani su na Slici 22.



Slika 22: Podela oblasti  $G$  u polarnim koordinatama i jedan element takve podele.

Potrebno je da odredimo površinu  $\Delta G_i$  ovog “krivolinijskog četvorougla” - uočavamo da dužina luka koja odgovara datom uglu  $\Delta\theta$  zavisi od poluprečnika, kao i da lukovi nisu delovi prave, nego krive. Ipak, za male promene promenljivih (odnosno, za malo  $\Delta r$  i  $\Delta\theta$ ),  $G_i$  se može dovoljno dobro aproksimirati pravougaonikom. Zato ćemo i površinu  $\Delta G_i$  aproksimirati površinom pravougaonika; jedan par stranica tog pravougaonika je dužine  $\Delta r$ . Smatramo da je dužina druge dve stranice približno međusobno jednaka, i jednaka dužini luka koji odgovara uglu  $\Delta\theta$  (radijana) i poluprečniku  $r$ :  $l = r \Delta\theta$ . Sada je  $\Delta G_i \approx r \Delta\theta \Delta r$ , a granična vrednost, kada podela postaje finija i  $\Delta G_i \rightarrow 0$  daje element površine u polarnim koordinatama:

$$dA = r dr d\theta .$$

Ovo je veoma važan zaključak (formula) koji ćemo često koristiti. Pokazali smo, dakle, da u polarnim koordinatama važi  $dA = r dr d\theta$ , odnosno da pri prelasku sa pravougljih na polarne koordinate koristimo da je

$$dA = dx dy = r dr d\theta .$$

Ovim smo odredili vezu između elemenata površine u dva različita koordinatna sistema.

Uočavamo da podela oblasti  $G$  koju vršimo u polarnim koordinatama generše podoblasti  $G_i$  čija površina zavisi od položaja u  $G$  (postoji zavisnost elementa površine od  $r$ , a ne samo od koraka  $dr$  i  $d\theta$ ). To nije bio slučaj kod pravougljih koordinata, gde element površine zavisi samo od koraka  $dx$  i  $dy$ .

Ostaje još da ilustrujemo primenu polarnih koordinata; rešićemo problem postavljen u Primeru 2.6 na drugi način.

**Primer 2.7.** Koristeći polarne koordinate, odrediti zapreminu oblasti ispod paraboloida  $z = 1 - x^2 - y^2$ , u prvom oktantu.

*Rešenje:* Uvođenje polarnih koordinata podrazumeva da oblast integracije i podintegralnu funkciju izrazimo preko novouvedenih promenljivih. Tada je

$$\begin{aligned} z &= 1 - x^2 - y^2 = 1 - (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 = 1 - r^2, \\ G &= \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

Oblast integracije  $G$ , koja je u pravouglim koordinatama četvrtina jedinične kružnice, u polarnim koordinatama se svodi na pravougaonu oblast; opisujemo je konstantnim granicama. Ovo pojednostavljenje je posledica toga što su polarne koordinate posebno pogodne za opisivanje kružnica i njihovih delova. Kako je i podintegralna funkcija rotaciono simetrična, i ona postaje jednostavnija uvođenjem polarnih koordinata. Problem se sada svodi na

$$\begin{aligned} V &= \iint_G (1 - x^2 - y^2) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 (1 - r^2)r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da za element površine važi  $dA = dx dy = r dr d\theta$ .

Uočavamo da je prelaskom na polarne koordinate rešavanje dvostrukog integrala postalo mnogo jednostavnije.

#### 2.2.4 Uvođenje smene kod dvostrukog integrala

Jedna od osnovnih metoda za rešavanje određenih integrala funkcija jedne promenljive je metoda uvođenja smene. Integral  $\int_a^b f(x) dx$  rešavamo tako što uvedemo pogodno izabranu smenu  $x = \varphi(t)$ , zahtevajući da funkcija  $\varphi$  ima neke dobre osobine, između ostalih i to da je bijekcija, odnosno da se može izraziti  $t = \varphi^{-1}(x)$ . Dalje je  $dx = \varphi'(t) dt$ , a granice integracije, umesto  $a$  i  $b$ , redom postaju  $\varphi^{-1}(a) = t_1$  i  $\varphi^{-1}(b) = t_2$ . Konačno,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Potpuno ista ideja može biti veoma korisna za izračunavanje dvostrukog integrala  $\iint_G f(x, y) dx dy$ . Uvođenje pogodno izabrane smene u tom slučaju podrazumeva definisanje dve funkcije,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , čije “dobre” osobine omogućavaju da možemo izraziti i funkcije  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ .

Transformacija koordinatnog sistema (prelazak na nove promenljive  $u$  i  $v$ ) zahteva da:

- transformišemo oblast integracije  $G$ , čije smo granice opisivali u funkciji promenljivih  $x$  i  $y$ , u novu oblast  $G^*$ , čije granice opisujemo u funkciji promenljivih  $u$  i  $v$ ;
- izrazimo podintegralnu funkciju  $f(x, y)$  kao funkciju promenljivih  $u$  i  $v$ ,  $f(x(u, v), y(u, v))$ ;
- odredimo kako se transformiše element površine pri prelasku na nove koordinate, odnosno, kako da izrazimo  $dA = dx dy$ .

Pre nego što se ovim poslom pozabavimo za opšti slučaj smene, ilustrovaćemo navedeni postupak na primeru u kom posmatramo specijalni slučaj.

**Primer 2.8.** Izračunati površinu elipse sa poluosama  $a$  i  $b$ ,  $a, b > 0$ .

*Rešenje:* Površinu elipse možemo izračunati primenom dvostrukog integrala:

$$P = \iint_G dx dy,$$

gde je  $G$  posmatrana elipsa, odnosno

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\}.$$

Međutim, računanje ovog integrala, u pravouglim koordinatama, neće biti baš privlačan zadatak (sa sličnim problemom smo se već sreli, i nije nam se dopao). Zato ćemo uvesti pogodnu smenu i pokušati da ovaj integral rešimo jednostavnije.

Šta je pogodna smena nije moguće reći u opštem slučaju. Pri izboru se uglavnom oslanjamo na iskustvo. U ovom slučaju se ispostavlja da je dobar izbor uvesti dve nove promenljive,  $u$  i  $v$ , tako da je

$$\frac{x}{a} = u, \quad \frac{y}{b} = v.$$

Tada je nova oblast integracije

$$G^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 1\},$$

što je, uočavamo, jedinični centralni krug u  $uv$ -koordinatnom sistemu.

Kako je  $dx = a du$  i  $dy = b dv$ , zaključujemo da je

$$dx dy = ab du dv,$$

čime smo odredili čemu je jednak element površine u novom koordinatnom sistemu.

Sada je

$$P = \iint_{G^*} ab du dv = ab \iint_{G^*} du dv = ab\pi.$$

U poslednjem koraku iskoristili smo da je traženi integral jednak površini oblasti  $G^*$ . Kako je  $G^*$  jedinični krug, ta površina je jednaka  $\pi$ . Konačno, površina elipse sa poluosama  $a$  i  $b$  je, prema očekivanjima (ovo je poznat rezultat) jednaka  $ab\pi$ .

Moramo, međutim, naglasiti da je uvođenje smene, a pre svega određivanje elementa površine u novom koordinatnom sistemu, u opštem slučaju malo kompleksnije nego u gornjem primeru. Specifičnost prethodnog primera je u tome što je smena takva da je svaka od promenljivih  $x$  i  $y$  izražena kao funkcija samo jedne od dve novouvedene promenljive  $u$  i  $v$ . U opštem slučaju, da bismo odredili vezu između elemenata površine pri transformaciji koordinatnog sistema (pri prelasku na nove promenljive), posmatramo funkcije

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

pri čemu zahevamo da je moguće izraziti i

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Pri podeli oblasti  $G$  na podoblasti  $G_i$  u (polaznom) pravouglom koordinatnom sistemu, koristimo da su  $G_i$  pravougaonici, pa je njihova površina  $\Delta G_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$ . Promenljive novog koordinatnog sistema,  $u$  i  $v$ , za svaku konkretnu vrednost definišu u starom koordinatnom sistemu krive. Posmatramo krive  $u_i$  i  $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$ , odnosno,  $v_j$  i  $v_{j+1} = v_j + \Delta v_j$ , koje se seku u četiri tačke, recimo  $P, Q, R, S$ , i ograničavaju element površine. Ovaj element površine je u  $uv$ -koordinatnom sistemu pravougaonik. Nama je, međutim potrebno da odredimo kako taj element površine izgleda u polaznom  $xy$ -koordinatnom sistemu - to je način da odredimo kako se element površine transformiše pri prelasku na nove koordinate.

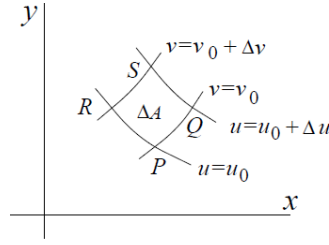
U opštem slučaju, tačke  $P, Q, R$  i  $S$  obrazuju u  $xy$ -ravni krivolinijski četvorougao, koji zavisi od definisane transformacije koordinatnog sistema. Jedan takav krivolinijski četvorougao je prikazan na Slici 23.

Krivolinijski četvorougao se, za dovoljno male vrednosti  $\Delta u_i$  i  $\Delta v_j$ , može aproksimirati paralelogramom čije su stranice određene vektorima  $\vec{PQ}$  i  $\vec{PR}$ . Znamo da je površina tog paralelograma, koja je ujedno i aproksimacija elementa površine novog koordinatnog sistema, data sa

$$\Delta G_i \approx |\vec{PQ} \times \vec{PR}|.$$

Znamo koordinate originala tačaka  $P, Q$  i  $R$  u (polaznom)  $uv$ -koordinatnom sistemu:

$$P^*(u_i, v_j), \quad Q^*(u_i + \Delta u_i, v_j), \quad R^*(u_i, v_j + \Delta v_j),$$



Slika 23: Smena promenljivih. Element površine  $\Delta u \Delta v$  prikazan u  $xy$ -koordinatnom sistemu.

ali nam za određivanje veze među elementima površina u dva koordinatna sistema trebaju koordinate ovih tačaka (vektora), izražene u  $xy$ -koordinatnom sistemu.

Važi da je

$$\vec{PQ} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_j \vec{j},$$

gde  $\Delta x_i$  i  $\Delta y_j$  odgovaraju, redom, promenama u pravcu  $x$ , odnosno  $y$ , ose dok se za fiksirano  $v = v_j$ , promenljiva  $u$  menja od  $u_i$  do  $u_i + \Delta u_i$  (odnosno, dok se krećemo od tačke  $P$  do tačke  $Q$ ). Drugim rečima,

$$\Delta x_i = x(u_i + \Delta u_i, v_j) - x(u_i, v_j)$$

pa možemo, koristeći definiciju parcijalnog izvoda, napisati da je

$$\Delta x_i \approx x'_u \Delta u_i,$$

a analogno, i da je

$$\Delta y_j \approx y'_u \Delta u_i.$$

Konačno,

$$\vec{PQ} \approx x'_u \Delta u_i \vec{i} + y'_u \Delta u_i \vec{j}, \quad \vec{PR} \approx x'_v \Delta v_j \vec{i} + y'_v \Delta v_j \vec{j}.$$

Traženu površinu paralelograma određenog ovim vektorima određujemo kao intenzitet vektorskog proizvoda ovih vektora. Kako su vektori u  $xy$ -ravni, njihova treća koordinata (uz  $\vec{k}$ ) je jednaka nuli. Tada je, koristeći razvoj determinante po elementima treće kolone, činjenicu da je  $|\vec{k}| = 1$ , i osobinu determinante da je jednaka svojoj transponovanoj determinanti,

$$\begin{aligned} \Delta G_i &\approx |\vec{PQ} \times \vec{PR}| \approx \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u \Delta u_i & y'_u \Delta u_i & 0 \\ x'_v \Delta v_j & y'_v \Delta v_j & 0 \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} x'_u \Delta u_i & y'_u \Delta u_i \\ x'_v \Delta v_j & y'_v \Delta v_j \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array} \right| |\Delta u_i \Delta v_j|. \end{aligned}$$

Uvodeći oznaku za determinantu parcijalnih izvoda, i posmatrajući situaciju kad  $\Delta u_i, \Delta v_j \rightarrow 0$ , konačno dobijamo:

$$dA = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Determinanta  $\left| \begin{array}{cc} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{array} \right|$  se naziva *Jakobijan* i označava sa  $J$ . Dakle,  $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ , pa je formula koju koristimo pri uvođenju smene u dvostruki integral

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Da bi sve prethodno navedeno moglo biti realizovano, potrebno je da uvedena smena ispunjava neke uslove (njih smo u prethodnom tekstu nazvali “dobrim osobinama”):

- Pri uvođenju smene, potrebno je da preslikavanje  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$  bude obostrano jednoznačno i da preslikava zatvorenu ograničenu oblast  $G^*$  u zatvorenu ograničenu oblast  $G$  (u dva posmatrana koordinatna sistema). Ovim se obezbeđuje da (bar teoretski) raspoložemo i jednačinama  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  i inverznim jednačinama  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ . Naravno, neće uvek biti jednostavno izraziti jedne polazeći od drugih, ali je njihova egzistencija navedenom pretpostavkom obezbeđena.
- Važno je uočiti da Jakobijan može da bude i negativan, ali da uzimanjem njegove apsolutne vrednosti obezbeđujemo da pri transformaciji koordinata očuvavamo fizičko svojstvo površine da nije negativna. Zato obavezno koristimo apsolutnu vrednost u formuli  $dx dy = |J| du dv$ .
- Uslov koji smena treba da zadovoljava je da su uvedene funkcije neprekidne, i da njihovi parcijalni izvodi koje koristimo pri definisanju Jakobijana postoje i da budu neprekidni. Ovaj uslov obezbeđuje da posmatrani integral postoji.
- Uslov  $|J| \neq 0$  obezbeđuje da se definisanom transformacijom rub oblasti  $G$  preslikava na rub oblasti  $G^*$ , a unutrašnjost na unutrašnjost.

Još jedna veoma važna napomena je da važi da je  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = 1$ . Koristeći ovu vezu, možemo dobiti izraz za element površine pri uvođenju novih promenljivih, bez obzira da li imamo direktne, ili inverzne funkcije kojima se uspostavlja veza među promenljivima.

Ilustrovaćemo opisani postupak za uvođenje smene nekim primerima.

**Primer 2.9.** Pokazati da je Jakobijan transformacije pri uvođenju polarnih koordinata  $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$ .

*Rešenje:* Vrednost Jakobijana pri uvođenju polarnih koordinata, gde su nove promenljive  $r$  i  $\theta$ , nam je poznata; geometrijski smo izveli izraz za element površine,  $dx dy = r dr d\theta$ , odakle je jasno da je  $|J| = r$ . Ovo možemo i potvrditi, koristeći definiciju Jakobijana. Kako je transformacija definisana jednačinama

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

biće

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

**Primer 2.10.** Izračunati  $\iint_G (x+y)^3(x-y)^2 dx dy$ , ako je  $G$  oblast ograničena pravama  $x+y=1$ ,  $x+y=3$ ,  $x-y=1$ ,  $x-y=-1$ .

*Rešenje:* Oblast  $G$  je kvadrat stranice  $\sqrt{2}$  čije su dijagonale paralelne koordinatnim osama. Temena ovog kvadrata su tačke  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 1)$ , i  $(1, 2)$ . Ovu oblast nije baš sasvim zgodno koristiti kao domen integracije, jer zahteva podelu na pod-oblasti. Uvedimo zato smenu

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

S obzirom da se smena uvodi da bi se pojednostavio zapis oblasti integracije, ili podintegralna funkcija, u ovom slučaju je predložena smena intuitivna - njom se pojednostavljuje i oblast integracije, i podintegralna funkcija.

Oblast integracije  $G^*$ , izražena u funkciji novih promenljivih  $u$  i  $v$  sada se lako zapisuje:

$$G^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 3 \quad -1 \leq v \leq 1\}.$$

Za podintegralnu funkciju važi da je

$$(x+y)^3(x-y)^2 = u^3 v^2.$$

Konačno, Jakobijan transformacije izračunaćemo u obliku

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

što znači da važi da je

$$du dv = |-2| dx dy, \quad \text{odnosno,} \quad dx dy = \frac{1}{2} du dv.$$

Sada je

$$\iint_G (x+y)^3(x-y)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \left( \int_{-1}^1 u^3 v^2 dv \right) du = \frac{1}{2} \int_1^3 u^3 du \cdot \int_{-1}^1 v^2 dv = \frac{20}{3}.$$

Sporedni komentar je da je pri izračunavanju integrala iskorišćena “separabilnost” podintegralne funkcije - ona se može izraziti kao proizvod dve funkcije od kojih svaka zavisi od samo jedne promenljive. Tada se dvostruki integral može izraziti kao proizvod dva (nezavisna) integrala funkcija jedne promenljive.

## 2.2.5 Primena dvostrukog integrala

Dvostruki integral se može primeniti u brojnim situacijama kada je od značaja izračunati neka geometrijska svojstva objekata u ravni ili prostoru. Navešćemo samo neke najčešće primene.

### 1. Izračunavanje zapremine oblasti u 3D

Ovo je “intuitivna” primena dvostrukog integrala, koju smo koristili kao motivaciju pri definisanju integrala funkcije nad nekom oblašću. U opštem slučaju, zapremina tela (u 3D) koje je ograničeno graficima funkcija (površina)  $z = f(x, y)$  i  $z = g(x, y)$  nad nekom oblašću  $G$  koja pripada domenu svake od ovih funkcija, pri čemu je  $f(x, y) \geq g(x, y)$  za  $(x, y) \in G$ , izračunava se po formuli

$$V = \iint_G (f(x, y) - g(x, y)) dx dy.$$

Naravno, moguće je zameniti uloge promenljivih i na taj način generisati još dve analogne formule za izračunavanje zapremine tela u 3D.

### 2. Izračunavanje površine oblasti u 2D

I ova primena je već pomenuta. Posmatrajući funkciju  $f(x, y) \equiv 1$  za  $(x, y) \in G$ , možemo izračunati površinu oblasti  $G$  kao

$$P = \iint_G dx dy,$$

jer je navedeni integral jednak zapremini tela osnove  $G$  i visine  $H = 1$ , normalne na ravan (paralelnih) osnova ovog tela. Kako je zapremina ovakvog tela jednaka proizvodu površine osnove i visine, u konkretnom slučaju je površina osnove  $G$  jednaka zapremini, odnosno vrednosti navedenog dvostrukog integrala.

### 3. Izračunavanje mase ravnog objekta $G$ , sa datom funkcijom gustine $\rho$

Ukoliko je objekat homogene gustine, njegova masa se izračunava kao proizvod gustine i površine (pretpostavlja se da je objekat ravan, “dvodimenzionalan”). Ukoliko gustina materijala (objekta) nije homogena, već je, u svakoj tački skupa  $G$ , definisana funkcijom gustine  $\rho = \rho(x, y)$ , onda je, intuitivno, masa objekta jednaka sumi masa svih tačaka objekta. Ovakva suma se izračunava kao granična vrednost integralne sume i dovodi do dvostrukog integrala. (Podela tela na delove čiju gustinu smatramo homogenom, i posmatranje situacije kada površina delova teži nuli.) Konačno, zaključujemo da je

$$\text{Masa}(G) = \iint_G \rho(x, y) dx dy$$

Uočavamo da će, za konstantnu funkciju gustine, masa objekta biti jednaka proizvodu konstante (gustine) i integrala kojim se računa površina skupa  $G$ , baš kao što smo i očekivali.

### 4. Izračunavanje srednje vrednosti funkcije dve promenljive nad nekom oblašću $G \subset \mathbf{R}^2$

Izračunavanje srednje vrednosti nekog skupa vrednosti, za konačne diskretne skupove, podrazumeva sabiranje svih datih vrednosti, a zatim deljenje sa veličinom skupa (brojem sabiraka). U slučaju kada je skup tačaka oblast  $G \subset \mathbf{R}^2$ , moramo prilagoditi postupak situaciji u kojoj nemamo ni konačan ni diskretan skup. Već je

jasno da, u situaciji kada sabiramo beskonačno mnogo beskonačno bliskih (konačnih) sabiraka koji pripadaju ograničenom skupu, koristimo integral, kao uopštenje sume. Kako se dobijeni “zbir”, odnosno vrednost integrala funkcije, deli veličinom skupa, što je, u slučaju dvodimenzionalnog objekta  $G$ , površina skupa  $G$  koju ovde označavamo sa  $P(G)$ , formula za izračunavanje srednje vrednosti funkcije  $f(x, y)$  nad oblašću  $G$  je

$$\bar{f} = \frac{\iint_G f(x, y) dx dy}{P(G)} = \frac{\iint_G f(x, y) dx dy}{\iint_G dx dy}.$$

Ova vrednost odgovara visini cilindričnog tela čija je generatrisa rub skupa  $G$ , koji ima istu zapreminu kao cilindrično telo sa istom generatrisom, ali sa gornjom osnovom koja je određena grafikom funkcije (površni)  $f(x, y)$ .

5. *Izračunavanje centra mase planarnog (ravnog) objekta  $G$  sa poznatom funkcijom gustine  $\rho = \rho(x, y)$*

Centar mase je tačka koja odgovara srednjoj vrednosti položaja mase, raspoređene po objektu  $G$  u skladu sa funkcijom gustine  $\rho$ . Ako su koordinate centra mase označene sa  $(\bar{x}, \bar{y})$ , onda je

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Masa}(G)} \iint_G x \cdot \rho(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{\text{Masa}(G)} \iint_G y \cdot \rho(x, y) dx dy.$$

Napominjemo da se geometrijski centar (za razliku od ovde definisanog centra mase) izračunava uzimajući da je gustina jednaka jedinici, odnosno uzimajući u obzir samo oblik skupa  $G$ .

**Primer 2.11.** *Odrediti centar mase (težište) polukružne ploče čija je gustina u svakoj tački jednaka rastojanju te tačke od centra kruga.*

*Rešenje:* Postavimo koordinatni sistem tako da centar posmatranog kruga bude u koordinatnom početku. Neka je poluprečnik kruga jednak  $a$ . Rastojanje svake tačke ravni od koordinatnog početka, a po uslovu zadatka i funkcija gustine u ovom slučaju, izračunava se po formuli

$$\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

S obzirom na polukružni oblik skupa  $G$ , kao i na oblik podintegralne funkcije (gustine), ovde je pogodno koristiti polarne koordinate. Tada je

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in [0, a], \quad \theta \in [0, \pi], \quad dx dy = r dr d\theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} \text{Masa}(G) &= \iint_G \rho(x, y) dx dy = \int_0^\pi d\theta \int_0^a r \cdot r dr = \frac{a^3 \pi}{3}; \\ \bar{x} &= \frac{1}{\text{Masa}(G)} \iint_G x \rho(x, y) dx dy = \frac{3}{a^3 \pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^a r \cos \theta \cdot r \cdot r dr = \frac{3}{a^3 \pi} \frac{a^4}{4} \cdot 0 = 0; \\ \bar{y} &= \frac{1}{\text{Masa}(G)} \iint_G y \rho(x, y) dx dy = \frac{3}{a^3 \pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^a r \sin \theta \cdot r \cdot r dr = \frac{3}{a^3 \pi} \frac{a^4}{4} \cdot 2 = \frac{3a}{2\pi}. \end{aligned}$$

Traženi centar mase polukružne ploče je, dakle, tačka sa koordinatama

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right).$$

**Primer 2.12.** *Odrediti prosečno rastojanje tačke unutar centralnog kvadrata stranice  $2a$ ,  $a > 0$ , od koordinatnog početka.*

*Rešenje:* Postavimo kvadrat  $K$  tako da mu je centar (simetrije) u koordinatnom početku, a stranice paralelne sa koordinatnim osama. Površina ovog kvadrata (stranice  $2a$ ) je  $4a^2$ . Rastojanje tačke od koordinatnog početka je dato funkcijom  $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . To znači da se srednja vrednost rastojanja tačaka kvadrata od koordinatnog početka može izračunati po formuli

$$\bar{d} = \frac{1}{P(K)} \iint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$



I u ovom slučaju korišćemo polarne koordinate, a takođe i simetriju oblasti  $K$ . Tražena vrednost je osam puta prosečna vrednost rastojanja za tačke iz oblasti  $K'$ , koja je trougaona oblast jednaka jednoj osmini kvadrata  $K$ , a nalazi se u prvom kvadrantu, ispod simetrale ovog kvadranta. Kako je  $K$  ograničena pravom  $x = a$ , ona u polarnim koordinatama ima oblik  $r = \frac{a}{\cos \theta}$ . Dakle

$$K' = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \frac{a}{\cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \bar{d} &= 8 \cdot \frac{1}{4a^2} \iint_{K'} r \cdot r \, dr \, d\theta = \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{a}{\cos \theta}} r^2 \, dr \, d\theta \\ &= \frac{2}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{3 \cos^3 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{a}{3} (\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)). \end{aligned}$$

Integral trigonometrijske funkcije može se rešiti bilo smenom, bilo parcijalnom integracijom, uz malo truda.

## 2.3 Trostruki integral

### 2.3.1 Definicija, osnovne osobine i fizička interpretacija

Do sada smo uopštili pojam određenog integrala i definisali dvostruki integral, tako što smo

1. umesto funkcije jedne promenljive posmatrali funkciju dve promenljive;
2. umesto domena integracije koji je zatvoreni interval (zatvoren i ograničen skup) u  $\mathbb{R}$  posmatrali zatvorenu i ograničenu oblast u  $\mathbb{R}^2$ ;

a zatim smo formirali odgovarajuću Rimanovu integralnu sumu i posmatrali graničnu vrednost niza ovakvih suma, za različite podele oblasti integracije, kada mera svake podoblasti teži nuli. Navedena granična vrednost postoji ukoliko i oblast integracije i posmatrana funkcija zadovoljavaju određene uslove, a na taj način je definisan dvostruki integral posmatrane funkcije nad datom oblašću.

Sasvim je jasno da nas ništa ne sprečava da ovaj postupak uopštavanja nastavimo i da posmatramo funkciju tri promenljive nad nekom oblašću koja je podskup domena te funkcije, sada u  $\mathbb{R}^3$ . Analognim postupkom kao kod dvostrukog integrala ćemo doći do pojma *trostrukog* integrala.

Dakle, neka je funkcija  $u = f(x, y, z)$  definisana nad skupom  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , i neka  $u : D \mapsto R$ . Neka je  $D$  zatvorena i ograničena oblast, a  $u$  neprekidna funkcija (nad  $D$ ).

Posmatrajmo podelu oblasti  $D$  na  $n$  disjunktih podoblasti,  $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ , i označimo sa  $\Delta D_i$  zapreminu (meru) oblasti  $D_i$ , za  $i = 1, 2, \dots, n$ , a sa  $(x^i, y^i, z^i) \in D_i$  proizvoljnu tačku iz oblasti  $D_i$ . Definišimo, na uobičajeni način, Rimanovu integralnu sumu funkcije  $u$  nad oblašću  $D$ , za posmatranu podelu:

$$\sum_{i=1}^n f(x^i, y^i, z^i) \Delta D_i.$$

Uočavamo potpunu analogiju sa integralnom sumom koju smo formirali pri definisanju određenog i dvostrukog integrala; jedina razlika je dimenzija prostora u kom se nalazimo. Ipak, s obzirom da grafičko prikazivanje funkcije tri promenljive nije trivijalno (potreban nam je četvorodimenzionalan prostor), ovde nećemo ilustrovati formiranu Rimanovu sumu. Dovoljno je da formalno pratimo postupak sproveden pri definisanju dvostrukog integrala.

Posmatrajući niz podela oblasti  $D$  na podoblasti  $D_i$ , tako da važi da za sve podele u nizu broj podoblasti u podeli ( $n$ ) neograničeno raste i da, istovremeno, zapremina  $\Delta D_i$  teži nuli, dolazimo do pojma *trostrukog integrala*, kao granične vrednosti odgovarajućeg niza Rimanovih integralnih suma:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dV = \lim_{\Delta D_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x^i, y^i, z^i) \Delta D_i. \quad (7)$$

Navedena granična vrednost postoji, nezavisno od načina podele skupa  $D$  na podoblasti  $D_i$  i nezavisno od izbora tačaka  $(x^i, y^i, z^i) \in D_i$ , ukoliko je oblast  $D$  ograničena i zatvorena, sa rubom koji je po delovima glatka i zatvorena površ, a funkcija  $u$  neprekidna nad  $D$ . Za takvu oblast  $D$  i takvu funkciju  $u$  postoji i trostruki integral.

Sa  $dV$  je označen *element zapremine*; on odgovara zapremini podoblasti  $D_i$  u graničnom slučaju kada ta zapremina teži nuli. Za različite načine formiranja podele skupa  $D$ , odnosno oblika skupova  $D_i$  (u zavisnosti od izabranog koordinatnog sistema), element zapremine  $dV$  izražavamo na različite načine.

Osobine trostrukog integrala su analogne osobinama dvostrukog integrala. Navešćemo najvažnije:

- $\iiint_D \alpha f(x, y, z) dV = \alpha \iiint_D f(x, y, z) dV$ , za  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $\iiint_D (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dV = \iiint_D f(x, y, z) dV \pm \iiint_D g(x, y, z) dV$ ;
- $\iiint_D f(x, y, z) dV = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dV$ , za  $D = D_1 \cup D_2$  i  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  (izuzev, eventualno, zajedničkih rubnih tačaka).

(Kao i do sad, pretpostavljamo da važi sve što je potrebno da prethodni integrali budu definisani.)

I ovde možemo napomenuti da za  $f(x, y, z) \leq 0$  za  $(x, y, z) \in D$ , važi da je  $\iiint_D f(x, y, z) dV \leq 0$ . Ovo se lako uočava posmatranjem odgovarajuće integralne sume, čiji su svi sabirci u navedenom slučaju nepozitivni, pa isto mora važiti i za graničnu vrednost (odnosno, za integral). Ovu osobinu trostrukog integrala treba imati na umu kada ga koristimo za izračunavanje različitih fizičkih svojstava objekata realnog okruženja.

U vezi sa interpretacijom trostrukog integrala možemo napomenuti sledeće:

- Ukoliko je funkcijom  $u = f(x, y, z)$  definisana gustina tela  $D$  u svakoj tački  $(x, y, z)$ , onda je integral  $\iiint_D f(x, y, z) dV$  jednak ukupnoj masi tela  $D$ .
- U specijalnom slučaju, kada je funkcija gustine tela  $u = f(x, y, z) \equiv 1$  (odnosno, kada je telo homogeno), masa tela  $D$  jednaka je njegovoj zapremini. Drugim rečima,

$$\iiint_D dV = V(D)$$

(gde je sa  $V(D)$  označena zapremina tela  $D$ ).

### 2.3.2 Izračunavanje trostrukog integrala

Izračunavanje trostrukog integrala ne zahteva ništa novo u odnosu na ono što smo već definisali i koristili za izračunavanje dvostrukog; uopštenje je direktno.

Razlikovaćemo dva osnovna slučaja, u zavisnosti od oblika skupa  $D$ :

- Oblast integracije  $D$  je kvadar u  $\mathbb{R}^3$ , odnosno  $D = [a, b] \times [c, d] \times [g, h]$ , gde su  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  i  $[g, h]$  redom, intervali na  $x$ -,  $y$ - i  $z$ -osi. U pravougloj koordinatnoj sistemu prirodno je da pravimo podelu na podoblasti  $D_i$  ravnima paralelnim sa koordinatnim ravnima, tako da su ivice podoblasti paralelne koordinatnim osama, sa dužinama  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$  i  $\Delta z_i$ . Tada je  $\Delta D_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ , a u graničnom procesu (kada broj podoblasti neograničeno raste, a dužina njihovih ivica teži nuli) dobijamo da je element zapremine  $dV = dx dy dz$ .

Konačno je

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dV &= \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d \left( \int_g^h f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_g^h f(x, y, z) dz . \end{aligned}$$

Ovim se izračunavanje trostrukog integrala svodi na izračunavanje tri uzastopna određena integrala, u konstantnim granicama.

b) Oblast integracije  $D$  možemo izraziti u obliku

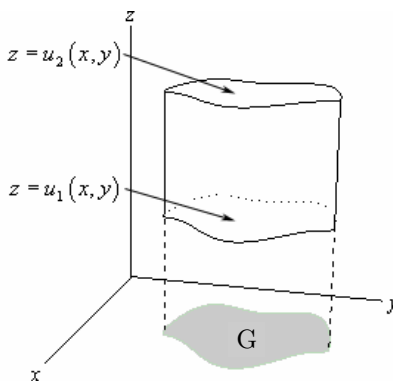
$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G, \quad u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

pri čemu je  $G \subset \mathbb{R}^2$  projekcija oblasti  $D$  na  $xy$ -ravan:

$$G = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Ovakva oblast  $D$  prikazana je na Slici 24. Tada je

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_G \left( \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy .$$



Slika 24: Oblast integracije  $D$  i njena projekcija na  $xy$ -ravan.

Na Slici 25 prikazane su i dve druge mogućnosti za određivanje redosleda izračunavanja uzastopnih integrala: oblast  $D$  može biti projektovana na ravan  $yz$ , ili na ravan  $xz$ . U svakom od slučajeva (za koje se opredeljujemo u zavisnosti od problema koji rešavamo, odnosno od oblika oblasti  $D$ ) dalje izračunavanje je analogno prethodno opisanom.

Dakle, ukoliko je

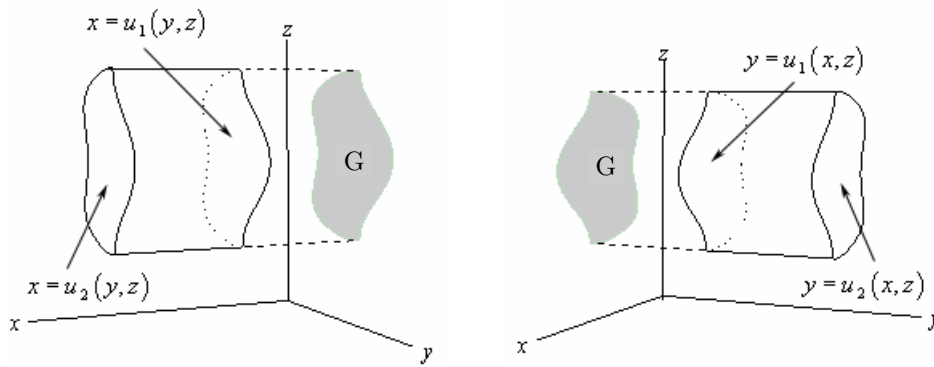
$$D = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in G, \quad u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\},$$

pri čemu je  $G \subset \mathbb{R}^2$  projekcija oblasti  $D$  na  $yz$ -ravan, tj.

$$G = \{(y, z) \mid z \in [c, d], \quad g_1(z) \leq y \leq g_2(z)\},$$

kao što je prikazano na Slici 25(levo), onda je

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_G \left( \int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dy dz .$$



Slika 25: Oblast integracije  $D$  i njena projekcija na  $yz$ -ravan (levo), odnosno na  $xz$ -ravan (desno).

Konačno, ukoliko je

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in G, \quad u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\},$$

pri čemu je  $G \subset \mathbb{R}^2$  projekcija oblasti  $D$  na  $xz$ -ravan, tj.

$$G = \{(x, z) \mid x \in [a, b], \quad g_1(x) \leq z \leq g_2(x)\},$$

kao što je prikazano na Slici 25(desno), onda je

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \iint_G \left( \int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz.$$

Ilustrovaćemo postupak izračunavanja trostrukog integrala primerima.

**Primer 2.13.** Izračunati  $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , gde je  $D$  ograničena koordinatnim ravnima i ravni  $x+y+z=1$ .

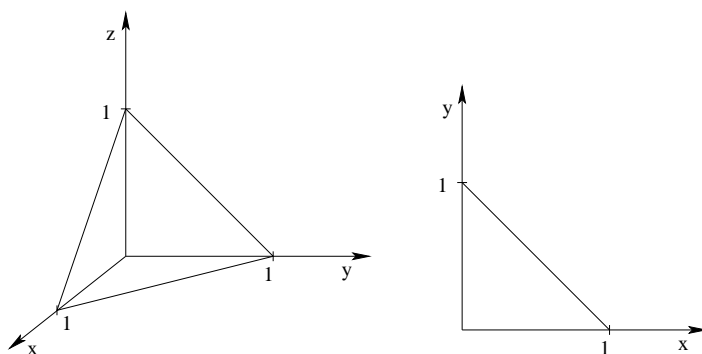
*Rešenje:* Osnovni zadatak nam je da odredimo granice integracije. Oblast  $D$  možemo opisati na sledeći način:

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

pri čemu je  $G$  projekcija skupa  $D$  na  $xy$ -ravan:

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Oblasti  $D$  i  $G$  prikazane su na Slici 26.



Slika 26: (Levo) Oblast  $D$  ograničena koordinatnim ravnima i ravni  $x + y + z = 1$ , Primer 2.13. (Desno) Projekcija  $G$  oblasti  $D$  na  $xy$ -koordinatnu ravninu.

Dalje je

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \cdot \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{(1+x+y)^2} \right) dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{y}{4} + \frac{1}{1+x+y} \right) \Big|_0^{1-x} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{8} - \ln|1+x| \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2 \right) = -\frac{5}{16} + \frac{\ln 2}{2}.
 \end{aligned}$$

**Primer 2.14.** Izračunati  $\iiint_D \sqrt{3x^2 + 3z^2} dV$ , gde je  $D$  oblast koju ograničavaju površi  $y = 2x^2 + 2z^2$  i  $y = 8$ .

*Rešenje:* Oblast  $D$  je unutrašnjost paraboloida čija je osa  $y$ -osa, a teme u koordinatnom početku, između ravni  $y = 0$  i ravni  $y = 8$ . Grafički je prikazana na Slici 27. Presek paraboloida i ravni  $y = 8$  određujemo iz uslova

$$2x^2 + 2z^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = 4$$

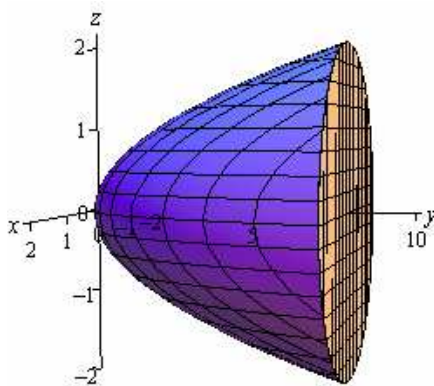
što je jednačina kružnice poliprečnika 2, sa centrom na  $y$ -osi (u ravni  $y = 8$ ).

Oblast  $D$  možemo, dakle, zapisati u obliku

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in G \quad \wedge \quad 2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 8\}$$

pri čemu je  $G$  projekcija skupa  $D$  na  $xz$ -ravan (centralna kružnica poluprečnika 2):

$$G = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq 4\}.$$



Slika 27: Oblast  $D$ , određena paraboloidom  $y = 2x^2 + 2z^2$  i ravni  $y = 8$ , Primer 2.14.

Sada je

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_D \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dV = \iint_G dx \, dz \int_{2x^2+2z^2}^8 \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dy \\
 &= \iint_G \sqrt{3x^2 + 3z^2} (8 - (2x^2 + 2z^2)) \, dx \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{3r^2} (8 - 2r^2) r \, dr \\
 &= 4\pi\sqrt{3} \int_0^2 (4r^2 - r^4) \, dr = 4\pi\sqrt{3} \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \frac{256\pi\sqrt{3}}{15}.
 \end{aligned}$$

Kod rešavanja dvostrukog integrala, i oblast  $G$  i podintegralna funkcija su bile pogodne za uvođenje polarnih koordinata,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $J = r$ , pa smo upravo tako i rešili zadatak.

### 2.3.3 Uvođenje smene kod trostrukog integrala

Na isti način kao i kod dvostrukog integrala, ponekad želimo da uvedemo smenu u trostruki integral i time pojednostavimo način opisivanja podintegralne funkcije, ili oblasti integracije, ili i jednog i drugog. S obzirom da sada posmatramo funkcije tri promenljive, smena podrazumeva uvođenje tri nove pomenljive i definisanje preslikavanja

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

pri čemu  $(x, y, z) \in D$  dok  $(u, v, w) \in D^*$ .

Pretpostavljamo da je ovako definisano preslikavanje

$$(u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

obostrano jednoznačno iz  $D^*$  u  $D$ , i da su sve tri funkcije (komponente) neprekidne i imaju neprekidne parcijalne izvode.

Definisanim preslikavanjem direktno transformišemo podintegralnu funkciju, kao i oblast integracije. Ono što preostaje je da odredimo kako da transformišemo element zapremine  $dV$ . Praktično ćemo ponoviti ono što smo uradili kod izračunavanja elementa površine (dakle, u 2D) pri prelasku na nove koordinate, ali zbog analogije postupak nećemo detaljno opisati.

U pravouglom koordinatnom sistemu element zapremine je kvadar sa ivicama  $dx$ ,  $dy$  i  $dz$ . Dobijamo ga posmatrajući zapreminu koja se opisuje pri maloj promeni vrednosti promenljivih, od  $(x, y, z)$  do  $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . Tada je odgovarajuća zapremina

$$\Delta D_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i ,$$

a posmatrajući granični slučaj kada  $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i \rightarrow 0$ , dobijamo da je  $dV = dx dy dz$ .

U  $uvw$ -koordinatnom sistemu, element zapremine je takođe kvadar ( $D_i^*$ ), i nastaje pri maloj promeni promenljivih,  $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ . U tom koordinatnom sistemu je element zapremine  $\Delta D_i^* = \Delta u_i \Delta v_i \Delta w_i$ .

Ono što nam je potrebno je da izrazimo zapreminu oblasti  $\Delta D_i$  koja se dobija transformacijom  $\Delta D_i^*$  u  $xyz$ -koordinatni sistem. Ovo telo je ograničeno sa tri para površi koje se međusobno seku duž krivih. Za jako male promene promenljivih možemo smatrati da su generisane površi približno paralelne, i da posmatrano telo možemo aproksimirati paralelepipedom (odnosno da njegove ivice možemo aproksimirati delovima pravih).

Vektori  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$  i  $\vec{PS}$  koji određuju ivice uočenog aproksimirajućeg paralelepipeda  $D_i$  se mogu izraziti kao

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &\approx (x'_u \Delta u, y'_u \Delta u, z'_u \Delta u) \\ \vec{PR} &\approx (x'_v \Delta v, y'_v \Delta v, z'_v \Delta v) \\ \vec{PS} &\approx (x'_w \Delta w, y'_w \Delta w, z'_w \Delta w) , \end{aligned}$$

a zapremina ovog paralelepipeda, čije su ivice  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$  i  $\vec{PS}$  (u  $xyz$ -koordinatnom sistemu) izračunava se korišćenjem mešovitog proizvoda:

$$\Delta D_i \approx \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta w .$$

Prepoznajući Jakobijan transformacije (determinantu parcijalnih izvoda), i posmatrajući granični slučaj (beskonačno malu promenu vrednosti promenljivih), konačno zaključujemo da je

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw .$$

Jakobijan transformacije određuje na koji način se menja element zapremine pri posmatranoj transformaciji, u svakoj tački posmatrane oblasti (određuje vezu između elemenata zapremine u dva različita koordinatna sistema).

S obzirom na pretpostavku da je preslikavanje kojim smo definisali smenu promenljivih obostrano jednoznačno, znamo da je moguće izraziti promenljive  $u, v, w$  kao funkcije promenljivih  $x, y, z$ . Ovako definisana smena će nekad biti pogodnija za rad i izračunavanje integrala. Važno je imati na umu da je tada zadovoljeno da je

$$du dv dw = \left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right| dx dy dz .$$

### 2.3.4 Cilindrične koordinate

Uvođenje smene u trostruki integral ilustrovaćemo na primeru uvođenja cilindričnih koordinata. One predstavljaju uopštenje polarnih koordinata u trodimenzionalnom prostoru i pogodne su za opisivanje oblasti koje imaju osu simetrije paralelnu nekoj od koordinatnih osa.

Tačku  $T(x, y, z)$  zadatu u pravouglom koordinatnom sistemu opisaćemo koristeći tri nove promenljive:  $r$ , kojom ćemo opisati rastojanje tačke  $T$  od ose simetrije;  $\theta$ , kojom ćemo opisati ugao rotacije tačke  $T$  oko ose simetrije; i  $z$ , kojom ćemo opisati rastojanje tačke  $T$  od nule, duž ose simetrije. Ovo je ilustrovano na Slici 28 (Levo). Nije teško uočiti da se veza između pravouglinih i cilindričnih koordinata može izraziti kao:

$$x = r \cos \theta , \quad y = r \sin \theta , \quad z = z .$$

Pri tome,  $r \geq 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  i  $z \in \mathbb{R}$ .

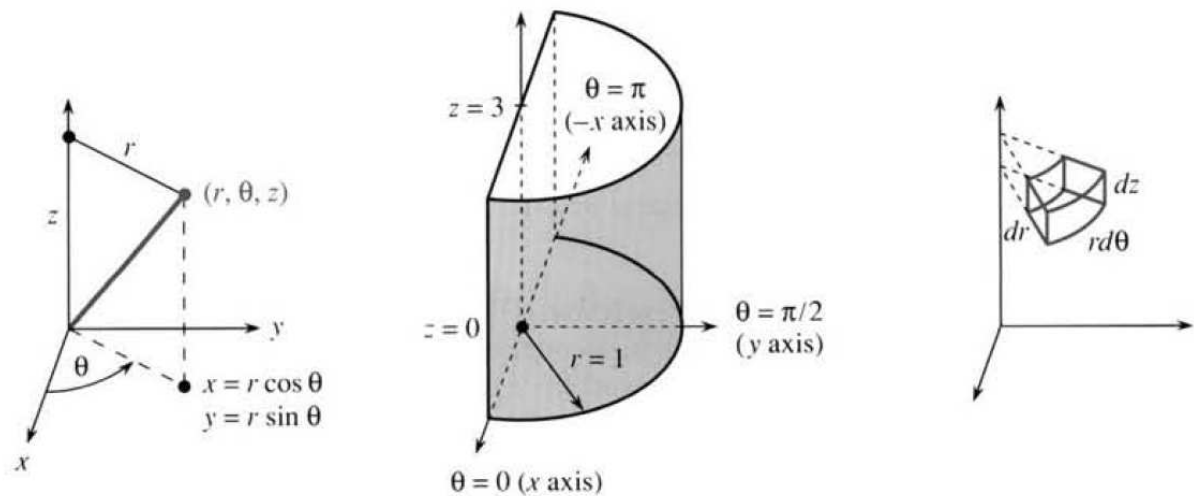
Da bismo uveli smenu u trostruki integral, potrebno je i da izrazimo element zapremine  $dV = dx dy dz$  koristeći novouvedene koordinate. Na Slici 28 (Desno) je ilustrovan element zapremine u cilindričnim koordinatama

(odnosno, zapremina koja se opisuje pri maloj promeni vrednosti  $(r, \theta, z)$  u  $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, z + \Delta z)$ ). Na osnovu onoga što već znamo u vezi sa polarnim koordinatama, uočavamo da je element zapremine, koji aproksimiramo pravouglim paralelepipedom stranica  $dr$ ,  $r d\theta$  i  $dz$ , jednak

$$dV = dx dy dz = dr \cdot r d\theta \cdot dz.$$

Dakle, vrednost Jakobijana transformacije, odnosno faktora promene zapremine pri prelasku na cilindrične koordinate je  $J = r$  (jer je  $dx dy dz = |J| dr d\theta dz$ ). Jakobijan smo, naravno, mogli izračunati i po definiciji:

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_z \\ y'_r & y'_\theta & y'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \end{aligned}$$



Slika 28: (Levo) Cilindrične koordinate tačke u prostoru. (Sredina) Polu-cilindar, oblast integracije u Pimeru 2.15. (Desno) Element zapremine u cilindričnim koordinatama.

**Primer 2.15.** Izračunati zapreminu polu-cilindra poluprečnika osnove 1 i visine 3, koji je prikazan na Slici 28 (Sredina).

*Rešenje:* Cilindrične koordinate su veoma pogodne za opisivanje datog polu-cilindra, pa ćemo ih koristiti kao smenu promenljivih. Jasno je da je oblast  $D$  nakon transformacije moguće opisati kao

$$D^* = \{(r, \theta, z) \mid r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi], \quad z \in [0, 3]\}.$$

S obzirom da se zapremina tela  $D$  može izračunati korišćenjem trostrukog integrala kao

$$V = \iiint_D dV = \iiint_{D^*} r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^\pi d\theta \int_0^3 dz \int_0^1 r \, dr,$$

tražena zapremina je

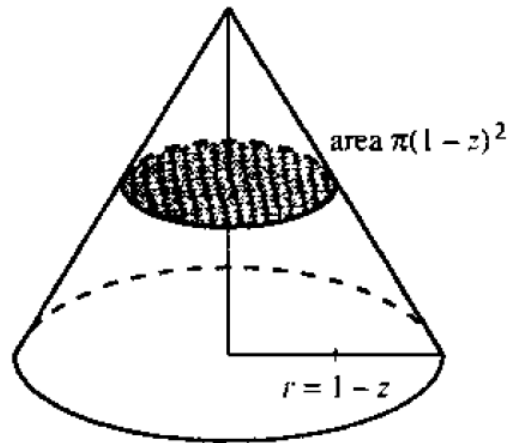
$$V = \frac{3\pi}{2}.$$



Uočavamo da smo navedenom smenom postigli da se promenljive u oblasti integracije  $D^*$  kreću u konstantnim granicama, što uvek značajno olakšava izračunavanje integrala.

**Primer 2.16.** Izračunati zapreminu konusa  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , iznad  $xy$ -ravni.

*Rešenje:* Konus čiju zapreminu treba da izračunamo prikazan je na Slici 29. Lako uočavamo da je vrh konusa tačka  $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ , a da je presek konusa sa  $xy$ -ravni ( $z = 0$ ) centralna kružnica poluprečnika 1 ( $x^2 + y^2 = 1$ ). I u ovom slučaju pogodno je uvesti cilindrične koordinate za izračunavanje integrala, jer je posmatrana konusna površ osno simetrična u odnosu na  $z$ -osu. Jasno je, međutim, da nisu sve promenljive u konstantnim granicama.



Slika 29: Konus definisan jednačinom  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , za  $z \geq 0$ .

Za

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

dobijamo da je konusna površ

$$z = 1 - \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = 1 - r, \quad \text{za } \theta \in [0, 2\pi].$$

Jedan od načina da opišemo oblast  $D^*$  je

$$D^* = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1 - z, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 1\}.$$

Tada je

$$V = \iiint_{D^*} r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1-z} r \, dr = 2\pi \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} dz = \frac{\pi}{3}.$$

### 2.3.5 Sferne koordinate

Još jedan karakterističan primer uvođenja smene u trostruki integral je prelazak na sferne koordinate. Definišemo ih koristeći parametre analogne onima kojima opisujemo položaj tačke na Zemlji - posmatramo "geografsku dužinu i širinu". Uz to, posmatramo i rastojanje tačke od koordinatnog početka, i označavamo ga sa  $\rho$ . Razlikujemo ga od  $r$ , koje kod cilindričnih koordinata predstavlja rastojanje tačke od ose. Dakle,  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ , dok je  $r = x^2 + y^2$ . Ugao  $\theta$  opisuje rotaciju posmatrane tačke u  $xy$ -ravni, baš kao i kod cilindričnih (i polarnih) koordinata. Jasno je da  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ugao  $\phi$  je ugao između vektora položaja tačke i pozitivnog smera  $z$ -ose. Važi da je  $\phi \in [0, \pi]$ . Ovo je prikazano na Slici 30 (Levo i sredina).

Za proizvoljnu tačku  $T(x, y, z)$  u prostoru, prikazanu u pravouglim koordinatama, veza sa sfernim koordinatama može se izvesti posmatrajući prvo projekciju tačke  $T$  na  $xy$ -ravan, a zatim i rastojanje te projekcije od koordinatnog

početka. Kao i do sad, ovo rastojanje označavamo sa  $r$ . U  $zr$ -ravni uočavamo da, za tačku  $T$  čiji je vektor položaja određen intenzitetom  $\rho$  i uglom  $\phi$ , važi

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \sin \phi.$$

U  $xy$ -ravni, koristeći polarne koordinate, možemo zapisati:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

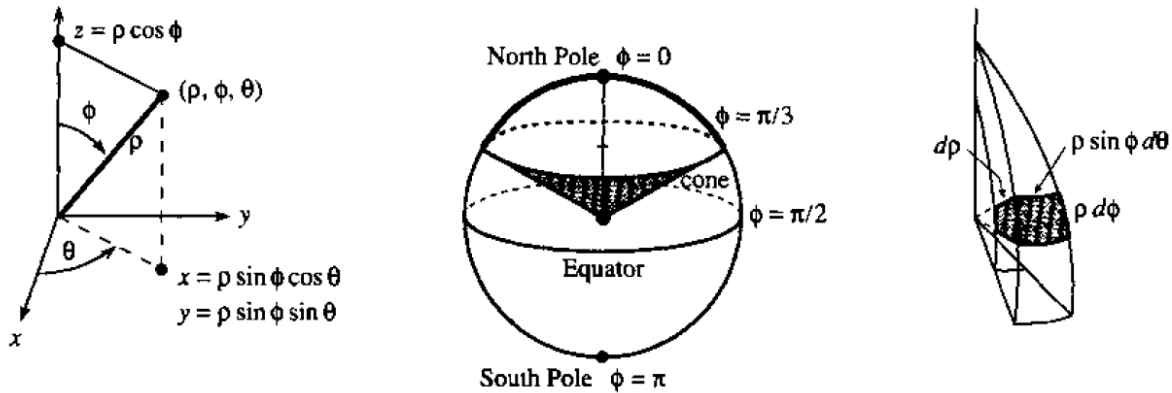
Konačno, kombinujući ove rezultate, dobijamo da za tačku  $T(\rho, \theta, \phi)$  važi:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Pri tome, kao što smo već naveli, važi:

$$\rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{i} \quad \phi \in [0, \pi].$$

Ovim je izražena veza između sfernih i pravougljih koordinata tačke  $T$ .



Slika 30: (Levo i sredina) Sferne koordinate tačke u prostoru. (Desno) Element zapremine u sfernim koordinatama.

Element zapremine izračunavamo posmatrajući zapreminu koja se dobija za malu promenu koordinata:  $(\rho, \theta, \phi)$  u  $(\rho + \Delta \rho, \theta + \Delta \theta, \phi + \Delta \phi)$ . Ova zapremina je prikazana na Slici 30 (Desno)). Ona se može približno odrediti kao zapremina kvadra sa ivicama  $\Delta \rho$ ,  $\rho \Delta \theta$ , i  $r \Delta \phi = \rho \sin \phi \Delta \phi$ . Na osnovu formule za zapreminu kvadra, i posmatrajući granični slučaj kada su promene koordinata bliske nuli, dobijamo da je

$$dV = dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

Dakle, vrednost Jakobijana transformacije, odnosno faktora promene zapremine pri prelasku na sferne koordinate je  $J = \rho^2 \sin \phi$  (jer je  $dx dy dz = |J| d\rho d\theta d\phi$ ). Jakobijan smo, naravno, mogli izračunati i po definiciji:

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\phi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\phi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\phi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \left( \cos \phi \begin{vmatrix} -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} - \sin \phi \cdot \sin^2 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \right) \\ &= \rho^2 (-\cos^2 \phi \sin \phi - \sin^3 \phi) = -\rho^2 \sin \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\rho^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Ilustrovaćemo korišćenje sfernih koordinata primerima.

**Primer 2.17.** Napisati jednačine sledećih skupova tačaka u sfernim koordinatama: (1) centralna sfera poluprečnika  $a$ , (2) konus sa osom koja se poklapa sa  $z$ -osom, (3)  $xy$ -ravan, (4) poluravan ortogonalna na  $xy$ -ravan, čiji je rub  $z$ -osa.

Rešenje:

1. Sve tačke centralne sfere poluprečnika  $a$  zadovoljavaju uslov da im je rastojanje  $\rho$  od koordinatnog početka jednako  $a$ . Dakle,  $\rho = a$  predstavlja traženu jednačinu sfere u sfernim koordinatama.
2. Za konus je karakteristično da su mu sve izvodnice pod istim uglom u odnosu na njegovu osu simetrije, koja je u ovom slučaju  $z$ -osa. Dakle, za sve tačke konusa karakterističan konstantan ugao  $\phi$ . Recimo  $\phi = \frac{\pi}{4}$  predstavlja, u sfernim koordinatama, jednačinu konusne površi sa vrhom u koordinatnom početku i izvodnicama koje su pod uglom  $\frac{\pi}{4}$  u odnosu na  $z$  osu.
3.  $xy$ -ravan možemo posmatrati kao specijalni slučaj konusne površi, onaj za koji je  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Dakle, skup tačaka

$$D^* = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi = \frac{\pi}{2}\}$$

predstavlja  $xy$ -ravan u sfernim koordinatama.

4. Vertikalna poluravan kojoj je rub  $z$ -osa je okarakterisana time što je ugao  $\theta$  za sve njene tačke konstantan. To znači da je jednačina ovakve poluravni upravo  $\theta = const$ , ili, preciznije, da je skup tačaka ovakve poluravni moguće opisati kao

$$D^* = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho \geq 0, \quad \theta = const, \quad \phi \in [0, \pi]\} .$$

**Primer 2.18.** Korišćenjem sfernih koordinata izračunati zapreminu dela jedinične sfere koji se nalazi iznad ravni  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Rešenje: Traženu zapreminu izračunaćemo kao  $V = \iiint_D dV$ , gde je  $D$  deo jedinične sfere iznad ravni  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

S obzirom da je sugerisano da zadatak rešimo korišćenjem sfernih koordinata, jedini pravi zadatak nam je da odredimo granice integracije.

Uočimo da je u pravouglim koordinatama potrebno izračunati

$$V = \iiint_D dV = \iint_G dx dy \int_{\text{ravan}}^{\text{sfera}} dz .$$

Prelaskom na sferne koordinate ćemo pojednostaviti problem opisivanja domena integracije (određivanja granica).

Na osnovu prethodno izvedenih formula u vezi sa sfernim koordinatama, znamo da je

$$V = \iiint_D dV = \iiint_{D^*} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta ,$$

gde je  $D^*$  oblast u  $\rho\theta\phi$ -koordinatnom sistemu koja odgovara posmatranoj oblasti u pravouglim  $(xyz)$  koordinatama. Iskoristili smo izračunati Jakobijan transformacije, odnosno element zapremine.

Određujući granice integracije za promenljive  $\rho$ ,  $\theta$  i  $\phi$ , uočavamo da dati odsečak sfere opisujemo uzimajući vrednosti ugla  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Dalje, ravan  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$  u sfernim koordinatama ima oblik

$$z = \rho \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \phi} .$$

Odavde zaključujemo i da poluprava koja polazi iz koordinatnog početka prodire ravan  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$  na rastojanju

$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \phi}$  i tada ulazi u oblast  $V^*$ , a iz nje izlazi nakon što prođe kroz jediničnu sferu, odnosno za  $\rho = 1$ . Ovim smo odredili granice u kojima se kreće promenljiva  $\rho$ , za svaki ugao  $\phi$ :

$$\rho \in \left[ \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \phi}, 1 \right] .$$

Konačno, posmatrajući projekciju u  $xz$  (ili  $yz$ -) koordinatnoj ravni, uočavamo da je vrednost ugla  $\phi$  u tački u kojoj se seku sfera i ravan ona za koju važi da je

$$\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Ovim smo odredili i granice u kojima se kreće promenljiva  $\phi$ :

$$\phi \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Sada je, konačno

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dV = \iiint_{D^*} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\phi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2 \cos \phi}}^1 \rho^2 \sin \phi \, d\rho = \dots \end{aligned}$$

## 3 Krivolinijski integrali

### 3.1 Krive. Parametrizacija krivih

Intuitivno, *kriva* je putanja koju, pri kretanju kroz prostor, opisuje neka tačka (objekat). Formalno, krivu  $C$  posmatramo kao (vektorsku) funkciju jednog parametra:

$$\vec{r} : (a, b) \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3.$$

Tada je domen funkcije interval  $I = (a, b)$  realnih brojeva (koji može biti i interval  $(-\infty, \infty)$ ), a kodomen preslikavanja je podskup prostora  $\mathbb{R}^3$ . Uzimajući u obzir da su elementi prostora  $\mathbb{R}^3$  tačke određene koordinatama  $(x, y, z)$ , imamo da je

$$C : \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Kriva je, dakle, definisana kao *vektorska funkcija* (jedne promenljive), gde se skalarne funkcije  $x(t), y(t), z(t)$   $I \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  nazivaju *parametarske jednačine* krive  $C$ , a  $t$  je *parametar*. Parametar  $t$  često interpretiramo kao vreme, pa svaka tačka  $(x(t), y(t), z(t))$  krive predstavlja položaj (koordinate) u prostoru u kom se nalazi posmatrani objekat (tačka) čije kretanje posmatramo, nakon vremena  $t$ .

Vektorska jednačina krive je

$$C : \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

Ukoliko posmatramo krive u ravni, onda je kodomen preslikavanja skup  $\mathbb{R}^2$ , što znači da je kriva definisana kao

$$C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

a njena vektorska jednačina je tada

$$C : \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad t \in I.$$

Kriva je *prosta* ukoliko je  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  injektivno preslikavanje, odnosno, ukoliko važi  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ . Za prostu krivu važi da nema tačaka samopreseka.

Kriva  $C$  je *zatvorena* ukoliko za preslikavanje  $\vec{r}$ , definisano na intervalu  $[a, b]$ , važi da je  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ . U tom slučaju, početna tačka krive,  $A = \vec{r}(a)$ , i krajnja tačka krive,  $B = \vec{r}(b)$ , se poklapaju.

**Primer 3.1.** *Odrediti parametarske reprezentacije za:*

- duž čija je početna tačka  $A(a_1, a_2, a_3)$ , a krajnja tačka  $B(b_1, b_2, b_3)$ ;*
- centralnu elipsu sa poluosama  $a$  i  $b$ , u  $xy$ -ravni;*
- centralnu kružnicu poluprečnika  $r_0$  u horizontalnoj ravni  $z = z_0$ ;*
- centralni jedinični kružni heliks, čija je osa  $z$ -osa;*
- krivu koja je grafik funkcije  $y = f(x)$  za  $x \in I$ ;*
- krivu koja je presek površi  $x^2 + y^2 = 9$  i  $z = 1 - y^2$ .*

Rešenje:

- a) S obzirom da je vektor pravca posmatranog pravolinijskog segmenta određen kao  $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ , jedna parametarska reprezentacija posmatrane duži je određena parametarskim jednačinama

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \quad y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2), \quad z(t) = a_3 + t(b_3 - a_3), \quad t \in [0, 1],$$

ili, u vektorskom obliku

$$\vec{r}(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1))\vec{i} + (a_2 + t(b_2 - a_2))\vec{j} + (a_3 + t(b_3 - a_3))\vec{k}.$$

Uočimo da su početna i krajnja tačka duži određene kao  $\vec{r}(0) = A$  i  $\vec{r}(1) = B$ .

- b) S obzirom da je posmatrana elipsa u  $xy$ -ravni, zaključujemo da je za sve njene tačke  $z = 0$ . Koristeći poznatu parametarsku reprezentaciju elipse u ravni,  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$ , dobijamo vektorsku reprezentaciju posmatrane (prostorne) krive u obliku

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t, 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- c) Jedna parametarska reprezentacija ove krive je

$$\vec{r}(t) = (r_0 \cos t, r_0 \sin t, z_0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- d) Posmatrani heliks je kriva čija je projekcija na  $xy$ -ravan jedinična centralna kružnica, što znači da su dve parametarske jednačine ove krive  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ . Treća koordinata linearno zavisi od  $t$ . Recimo, uzimajući da je  $z(t) = t$ , i  $t \in [0, 2\pi]$ , definišaćemo heliks koji je visine  $2\pi$ , i koji se sastoji od samo jednog "navoja". Drugačiji izbor linearne funkcije  $z$  rezultovao bi krivom koja pravi drugačiji broj obrta oko ose, i/ili je drugačije visine.

- e) S obzirom da je reč o krivoj koja pripada  $xy$ -ravni, možemo je parametrizovati kao prostornu krivu uzimajući da je  $z(t) = 0$  za sve vrednosti parametra, ili možemo posmatrati vektorsku funkciju  $\vec{r} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ . U drugom slučaju (sa kojim ćemo se često susretati), parametrizaciju posmatrane krive moguće je jednostavno napisati u obliku:

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} = (t, f(t)), \quad t \in I.$$

- f) Kriva koja predstavlja presek datih površi sadrži tačke koje zadovoljavaju obe navedene jednačine. Koristeći poznatu parametrizaciju cilindrične površi, i direktno uvrštavajući dobijene vrednosti u jednačinu druge površi, dobijamo da je

$$\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 1 - 9 \sin^2 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(Napomena: Površima i njihovim parametrizacijama ćemo se uskoro detaljnije pozabaviti. U prethodnom primeru smo, pre svega se oslanjajući na znanje o cilindričnim koordinatama, intuitivno parametrizovali cilindričnu površ.)

Parametarska reprezentacija krive  $C$  nije jedinstvena. Svako injektivno preslikavanje intervala  $(c, d)$  na interval  $(a, b)$  tako da  $s \mapsto t(s)$  za elemente  $s \in (c, d)$ , definiše *reparametrizaciju* krive  $C$ . Dakle, ako je  $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , onda je  $\vec{r}(s) = (x(t(s)), y(t(s)), z(t(s)))$  reparametrizacija krive  $C$ . Važno je imati na umu da se reparametrizovanjem ne menja grafički prikaz krive; opisana putanja čestice izgleda isto, ali se, u opštem slučaju, menja brzina kretanja čestice duž te putanje.

Tako, na primer, umesto parametrizacije jedinične centralne kružnice u  $xy$ -ravni date jednačinama

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

možemo posmatrati reparametrizaciju definisanu preslikavanjem

$$s = \frac{t}{2}, \quad \text{kada } s \in [0, \pi],$$

a odgovarajuće parametarske jednačine su

$$x(s) = \cos 2s, \quad y(s) = \sin 2s, \quad z(s) = 0.$$

Jasno je da će rezultujuća kriva biti ista centralna jedinična kružnica, ali će se čestica duž nje kretati dva puta brže i opisati je dok se parametar  $s$  kreće duž dva puta kraćeg (vremenskog) intervala nego što je to bio slučaj sa parametrom  $t$ .

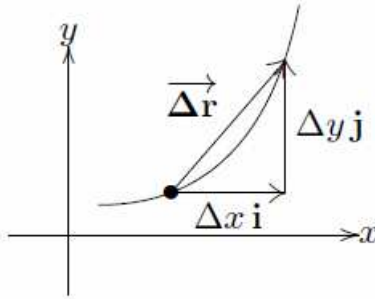
Posmatrajmo dva položaja tačke koja se kreće duž krive  $C$ :  $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , prvo za vrednost parametra  $t$ , a zatim za vrednost  $(t + \Delta t)$ . To odgovara položajima tačke u dva bliska vremenska trenutka. Tada je

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

vektor promene položaja koji je određen ovim dvema tačkama krive i važi da je

$$\Delta\vec{r}(t) = (x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k}) - (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$$

Za slučaj ravne krive, vektor  $\Delta\vec{r}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$  prikazan je na Slici 31.



Slika 31: Vektor promene položaja tačke i aproksimacija dužine segmenta krive.

Deljenjem sa  $\Delta t$ , i posmatranjem graničnog slučaja kada  $\Delta t \rightarrow 0$  (i uočavajući da tada i  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  i  $\Delta z \rightarrow 0$ ), dolazimo do

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

što je, po definiciji, izvod vektorske funkcije  $\vec{r}$ :

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Vektor  $(x'(t), y'(t), z'(t))$  izvoda skalarnih funkcija koje predstavljaju parametarske jednačine krive  $C$  određuje tangenti vektor na krivu u posmatranoj tački  $t$ . Primitimo da ovaj tangenti vektor nije obavezno jedinični. Zbog toga definišemo jedinični tangenti vektor (normalizujući vektor  $\vec{r}'$ ):

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}.$$

Uočimo da slučaj kada  $\Delta t \rightarrow 0$  odgovara situaciji kada posmatramo promenu položaja tačke za malu promenu vremena. Na taj način je definisan *vektor brzine* posmatranog kretanja. Dakle, tangenti vektor  $\vec{r}'(t)$  na krivu u posmatranoj tački  $t$  interpretira se kao vektor brzine kretanja (vektor promene položaja u jedinici vremena) duž posmatrane krive u posmatranoj tački.

Dalje, posmatrajmo veličinu  $\Delta s$ , koja označava dužinu puta pređenog duž posmatrane putanje (krive), tokom prelaska iz položaja  $\vec{r}(t)$  u položaj  $\vec{r}(t + \Delta t)$ . Kako putanja nije, u opštem slučaju, pravolinijska, dužina pređenog puta se samo približno može odrediti kao dužina vektora  $\Delta\vec{r}(t)$ :

$$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

U slučaju kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , odnosno, kada su posmatrani položaji dve bliske tačke krive, ovo je dovoljno dobra aproksimacija dužine pređenog puta. Dalje, deljenjem sa  $\Delta t$  i posmatranjem graničnog procesa, dobijamo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\vec{r}(t)|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2},$$

odnosno

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = |\vec{r}'(t)|.$$

Dakle, intenzitet  $|\vec{r}'(t)|$  tangentskog vektora na krivu, odnosno vektora brzine kretanja, u svakoj tački definiše *brzinu* kretanja (dužinu pređenog puta u jedinici vremena). Uočimo da je brzina skalarna veličina, za razliku od vektora brzine. Termin u engleskom jeziku za ove dve veličine se razlikuju: “velocity” je brzina kao vektorska veličina, a “speed” je odgovarajuća skalarna veličina.

Navedimo još jednom neke od važnih relacija koje važe za prethodno definisane veličine i uvedene oznake:

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \\ \frac{ds}{dt} &= |\vec{r}'(t)| \\ \vec{r}'(t) &= \vec{T} \cdot |\vec{r}'(t)| = \vec{T} \cdot \frac{ds}{dt} \\ ds &= |\vec{r}'(t)| \cdot dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \\ s(t) &= \int_a^t ds = \int_a^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Poslednja relacija je nama već dobro poznata formula za izračunavanje dužine luka krive koja je zadata parametarskim jednačinama. Dakle, za datu vrednost parametra  $t$  funkcija  $s = s(t)$  određuje dužinu luka (pređenog puta duž) krive, od početne tačke do tačke sa koordinatama  $(x(t), y(t), z(t))$ . Ukoliko reparametrizujemo krivu, koristeći vezu

$$t = t(s) \quad \text{za} \quad s(t) = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

dobićemo važnu parametrizaciju posmatrane krive  $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$  koja ima osobinu da je za nju

$$\vec{r}'(s) = \vec{T}(s),$$

odnosno da su za ovu parametrizaciju tangentski vektori na krivu u svakoj tački jedinični. To interpretiramo kao parametrizaciju koja obezbeđuje kretanje po krivoj jediničnom brzinom. Ovakva parametrizacija je često poželjna i zove se *prirodna parametrizacija krive* ili *parametrizacija dužinom luka*.

**Primer 3.2.** *Napisati prirodnu parametrizaciju duži određene tačkama  $A(2, 3, 0)$  i  $B(3, 2, 5)$ .*

*Rešenje:* U prethodnom primeru smo već naveli jednu parametrizaciju duži koja spaja dve date tačke:

$$\vec{r}(t) = (2 + t, 3 - t, 5t), \quad t \in [0, 1].$$

Prirodna parametrizacija podrazumeva da kao parametar koristimo dužinu (luka)  $s(t)$  posmatrane krive:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_0^t \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2} dt = \sqrt{27} \int_0^t dt = \sqrt{27}t.$$

Kako je tada

$$t = \frac{s}{\sqrt{27}},$$

zamenom dobijamo prirodnu parametrizaciju posmatrane krive

$$\vec{r}(s) = \left(2 + \frac{s}{\sqrt{27}}, 3 - \frac{s}{\sqrt{27}}, 5 \frac{s}{\sqrt{27}}\right), \quad s \in [0, \sqrt{27}].$$

Birajući vrednost parametra  $s$  iz navedenog intervala, definišemo (biramo) dužinu pređenog puta čestice duž krive, od početne tačke. Tada  $\vec{r}(s)$  daje koordinate tačke koja pripada krivoj i nalazi se na zadatom (lučnom) rastojanju od početne tačke krive.

Kao što je već navedeno, tangentski vektor

$$\vec{r}'(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{27}}, -\frac{1}{\sqrt{27}}, \frac{5}{\sqrt{27}}\right)$$

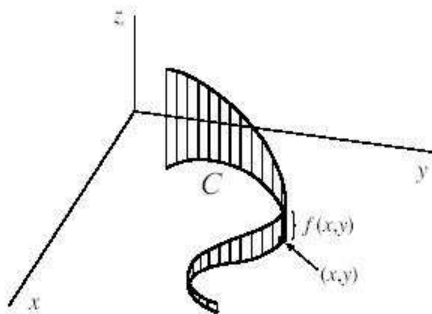


je jedinični, u svakoj tački krive. On je, takođe, i konstantnog pravca, što je u skladu sa činjenicom da je posmatrana kriva u stvari pravolinijski segment.

### 3.2 Krivolinijski integral skalarne funkcije

Određeni integral funkcije jedne promenljive definisali smo posmatrajući (ograničenu i neprekidnu) skalarnu funkciju  $y = f(x)$  definisanu nad nekim pravolinijskim segmentom - zatvorenim intervalom realne ose. Geometrijski, ovim određujemo površinu ravnog lika (krivolinijskog trapeza) koji je na datom intervalu između krive i  $x$ -ose. Situaciju možemo interpretirati i tako što posmatramo pravolinijski segment (duž, interval) i na njemu neravnomerno raspoređenu neku masu - svakoj tački duži "dodeljena" je masa koja je određena vrednošću funkcije u toj tački. Tada određeni integral daje ukupnu masu raspoređenu duž segmenta.

Uopštimo posmatrani problem tako što posmatramo skalarnu funkciju  $f$  definisanu nad domenom koji sadrži i krivolinijski segment, u ravni ili prostoru. I u ovom slučaju možemo smatrati da data funkcija određuje raspodelu neke mase duž krive, a da je naš zadatak da odredimo ukupnu masu raspoređenu duž krive. Ili, želimo da odredimo površinu površi koja se nalazi iznad krivolinijskog segmenta, a ispod krive koja je određena vrednostima skalarne funkcije  $f$ . Ovo je ilustrovano na Slici 32.



Slika 32: Skalarna funkcija  $z = f(x, y)$  definisana je nad ravnom krivom  $C$ . Označena površina površi odgovara vrednosti krivolinijskog integrala funkcije  $f$  po krivoj  $C$ .

Uočimo da ovaj opštiji problem intuitivno lako svodimo na problem koji smo posmatrali kod određenog integrala: dovoljno je da "ispravimo" krivu koja sada predstavlja domen integracije. Ovim ćemo se rukovoditi i pri formalnom definisanju, kao i izračunavanju opisanog *krivolinijskog* integrala.

Posmatrajmo, dakle, krivu  $C$  definisanu parametarski:

$$C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I,$$

gde je  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Ovako definisana kriva je ravna kriva (nalazi se u ravni; u ovom slučaju reč je o koordinatnoj ravni  $xy$ ). Analogiju sa određenim integralom ćemo lakše uočiti i grafički predstaviti ograničivši se na dvodimenzionalni slučaj. Uopštenje za slučaj prostornih krivih sledi direktno.

Dalje, posmatrajmo skalarnu funkciju dve promenljive,  $z = f(x, y)$ , za  $(x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2$ . Pretpostavimo da kriva  $C$  pripada domenu  $G$  funkcije  $f$ , tj. da  $(x(t), y(t)) \in G$  za  $t \in I$ . Analogno kao kod definisanja određenog integrala, podelimo krivu  $C$  deobnim tačkama. U ovom slučaju, to postizemo posmatrajući podelu intervala  $I$ , odnosno posmatrajući tačke  $t_i$ , za  $i = 0, \dots, n$ , i generišući tačke  $(x(t_i), y(t_i))$  koje pripadaju krivoj i koje je dele na pod-segmente. Označimo sa  $\Delta s_i$  dužinu  $i$ -tog pod-segmenta krive  $C$ . Izaberimo, zatim, na svakom takvom pod-segmentu tačku  $(x_i^*, y_i^*) = (x(t_i^*), y(t_i^*))$  za neko  $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ . Dakle, tačka  $(x_i^*, y_i^*)$  je na luku krive  $C$ , između tačaka  $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$  i  $(x(t_i), y(t_i))$ . Odredimo vrednost funkcije  $f$  u uočenoj tački svakog pod-segmenta:  $f(x_i^*, y_i^*) = f(x(t_i^*), y(t_i^*))$ .

Kao i do sad, aproksimiramo vrednost funkcije  $f$  u tačkama (celog)  $i$ -tog pod-segmenta vrednošću  $f(x_i^*, y_i^*) = f(x(t_i^*), y(t_i^*))$ . Tada se površina dela posmatrane površi nad uočenim pod-segmentom može aproksimirati površinom

pravougaonika čije su stranice vrednost funkcije  $f(x_i^*, y_i^*) = f(x(t_i^*), y(t_i^*))$  i dužina (krivolinijskog) pod-segmenta  $\Delta s_i$ . Površina cele površi biće zatim približno jednaka zbiru površina svih aproksimirajućih pravougaonika:

$$\sum_{i=1}^n f(x(t_i^*), y(t_i^*)) \Delta s_i .$$

U ovom izrazu prepoznamo, još jednom, uobičajeni oblik integralne sume. Ako sada posmatramo podelu krive  $C$  takvu da broj  $n$  deobnih tačaka neograničeno raste, a dužina svakog podsegmenta  $\max(\Delta s_i)$  teži nuli, dobijamo sve tačniju aproksimaciju tražene površine površi. Granična vrednost definisane integralne sume, ukoliko postoji nezavisno od načina podele (izbora deobnih tačaka duž krive), kao i izbora tačaka  $(x_i^*, y_i^*) = (x(t_i^*), y(t_i^*))$ , definiše *krivolinijski integral skalarne funkcije  $f$  duž krive  $C$* :

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\max(\Delta s_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x(t_i^*), y(t_i^*)) \Delta s_i . \quad (8)$$

Ovaj integral se još naziva i *krivolinijski integral po luku krive* ili *krivolinijski integral prve vrste*. Sa  $ds$  označavamo *element luka*, odnosno dužinu beskonačno malog pod-segmenta krive.

Napomene:

- Krivolinijski integral, odnosno granična vrednost posmatrana u (8), postoji (za svaki izbor vrednosti  $t_i$ , odnosno svaku podelu luka krive, kao i za svaki izbor tačaka  $(x_i^*, y_i^*)$ ) ukoliko je funkcija  $f$  neprekidna, a kriva  $C$  glatka, ili po delovima glatka.
- Osobine krivolinijskog integrala su analogne osobinama određenog (i svih do sad posmatranih integrala). Najvažnije su nam:

1.  $\int_C \alpha f(x, y) ds = \alpha \int_C f(x, y) ds$ , za  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
2.  $\int_C (f(x, y) \pm g(x, y)) ds = \int_C f(x, y) ds \pm \int_C g(x, y) ds$ ;
3.  $\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds$ , za  $C = C_1 \cup C_2$  i  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$  (izuzev, eventualno, zajedničkih rubnih tačaka).

- Ako je kriva  $C$  zatvorena, uobičajeno je za krivolinijski integral funkcije nad takvom krivom koristiti oznaku  $\oint_C f(x, y) ds$ .
- Ako važi da je  $f(x, y) \equiv 1$ , onda je  $\int_C f(x, y) ds = \int_C ds = \Delta s$ , odnosno, ovaj integral daje dužinu luka posmatrane krive  $C$ .
- Krivolinijski integral skalarne funkcije (po luku krive) ne zavisi od smera kretanja duž krive (orijentacije krive), niti od parametrizacije krive.

### 3.2.1 Izračunavanje krivolinijskog integrala skalarne funkcije

Element luka  $ds$  predstavlja dužinu beskonačno malog (kratkog) pod-segmenta krive. Znajući da je, za krivu  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt ,$$

direktno zaključujemo da je

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt .$$

Uočavamo da smo, baš kao i kod izračunavanja višestrukih integrala, i problem izračunavanja krivolinijskog integrala sveli na izračunavanje određenog integrala.

Uopštenje na slučaj skalarne funkcije tri promenljive i prostorne krive  $C$  je direktno: za funkciju  $u = f(x, y, z)$  definisanu nad  $D \subset \mathbb{R}^3$  i parametarski zadatu krivu  $C : \vec{r}(t) = (\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{z}(t))$ , gde  $t \in [a, b] = I$ , i sve tačke krive  $C$  pripadaju domenu  $D$  funkcije  $f$ , je

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) |\vec{r}'(t)| dt ,$$

pri čemu je

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} .$$

**Primer 3.3.** Izračunati  $\int_C xyz ds$ , ako je  $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ , za  $t \in [0, 4\pi]$ . Zatim izračunati dužinu krive  $C$ .

**Rešenje:** Prostorna kriva  $C$  po kojoj integralimo je data u parametarskom obliku, što zadatak čini prilično lakim. Zadana kriva (heliks) je prikazana na Slici 33.



Slika 33: Kriva  $C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$  za  $t \in [0, 4\pi]$ , koja predstavlja domen integracije u Primeru 3.3

S obzirom da je

$$f(x(t), y(t), z(t)) = x(t)y(t)z(t) = 3t \sin t \cos t ,$$

i da je

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt = |(-\sin t, \cos t, 3)| dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 9} dt = \sqrt{10} dt ,$$

dobijamo da je

$$\int_C xyz ds = \int_0^{4\pi} 3t \sin t \cos t \sqrt{10} dt = \frac{3\sqrt{10}}{2} \int_0^{4\pi} t \sin 2t dt = \frac{3\sqrt{10}}{2} \left( \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{4\pi} = -3\sqrt{10}\pi .$$

Uočimo da je vrednost integrala negativna, i da je to u skladu sa činjenicom da je funkcija negativna nad posmatranom krivom, ili nad nekim njenim delovima.

Dalje izračunavamo dužinu posmatrane krive. Znamo da je to

$$\int_C ds = \int_0^{4\pi} \sqrt{10} dt = 4\sqrt{10}\pi .$$

Uočimo da dužina krive ne može biti negativna.

**Primer 3.4.** Izračunati  $\int_C y ds$ , ako je  $C : y = 2\sqrt{x}$ , od  $x = 3$  do  $x = 24$ .

**Rešenje:** U ovom slučaju kriva je data u eksplicitnom obliku i potrebno je da je parametrizujemo. To možemo uraditi na više načina, a najjednostavnije je da za funkciju  $y = f(x)$  posmatramo parametrizaciju  $C : \vec{r}(t) = (t, f(t))$ , odnosno parametarske jednačine  $x = t, y = f(t)$ , za  $t \in [x_1, x_2] = [t_1, t_2]$ .

Za ovakvu parametrizaciju izračunavamo element luka

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt = |(1, f'(t))| dt = \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

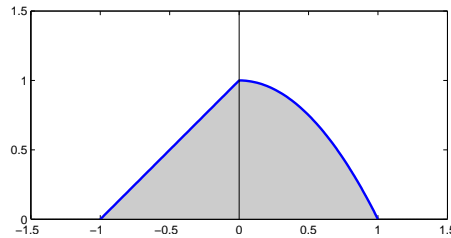
što nam je takođe poznat rezultat, iz priče o izračunavanju dužine luka eksplicitno zadate krive, i može se koristiti kao obrazac za element luka eksplicitno date krive.

Kako je u posmatranom primeru  $C : \vec{r}(t) = (t, 2\sqrt{t})$ , za  $t \in [3, 24]$ , i  $ds = \sqrt{1 + \frac{1}{t}} dt$ , dobijamo

$$\int_C y ds = \int_3^{24} 2\sqrt{t} \sqrt{1 + \frac{1}{t}} dt = 2 \int_3^{24} \sqrt{t+1} dt = 156 .$$

**Primer 3.5.** Izračunati  $\oint_C xy ds$ , ako je  $C$  rub oblasti ograničene  $x$ -osom i graficima funkcija  $y = x + 1$  za  $x < 0$  i  $y = 1 - x^2$  za  $x \geq 0$ .

**Rešenje:** Oblast čiji rub predstavlja kriva  $C$  prikazana je na Slici 34.



Slika 34: Oblast  $G$  i njen rub  $C$  koji predstavlja domen integracije u Primeru 3.5.

Kriva  $C$  predstavlja uniju tri krive, pa ćemo iskoristiti jednu od osobina krivolinijskog integrala i traženi integral izračunati kao zbir tri krivolinijska integrala:

$$\oint_C xy ds = \int_{C_1} xy ds + \int_{C_2} xy ds + \int_{C_3} xy ds ,$$

gde je  $C_1$  deo prave  $y = 0$  za  $x \in [-1, 1]$ ;  $C_2$  deo parabole  $y = 1 - x^2$  za  $x \in [0, 1]$  i  $C_3$  deo prave  $y = x + 1$  za  $x \in [-1, 0]$ .

Pre svega, potrebno je odrediti parametrizacije krivih  $C_1, C_2, C_3$ . Kako je reč o eksplicitno zadatim krivim, parametarske jednačine lako dobijamo

$$\begin{array}{llll} C_1 : & \vec{r}(t) = (t, 0), & t \in [-1, 1], & \vec{r}'(t) = (1, 0), & ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{1 + 0} dt = dt . \\ C_2 : & \vec{r}(t) = (t, 1 - t^2), & t \in [0, 1], & \vec{r}'(t) = (1, -2t), & ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt . \\ C_3 : & \vec{r}(t) = (t, t + 1), & t \in [-1, 0], & \vec{r}'(t) = (1, 1), & ds = |\vec{r}'(t)| dt = \sqrt{1 + 1} dt = \sqrt{2} dt . \end{array}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \oint_C xy ds &= \int_{C_1} xy ds + \int_{C_2} xy ds + \int_{C_3} xy ds \\ &= \int_{-1}^1 t \cdot 0 dt + \int_0^1 t(1 - t^2) \sqrt{1 + 4t^2} dt + \int_{-1}^0 t(t + 1) \sqrt{2} dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

### 3.3 Skalarna i vektorska polja. Elementi teorije polja

Posmatrajući funkcije  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ , možemo ih klasifikovati prema vrednostima prirodnih brojeva  $n$  i  $m$  na sledeći način:

- ako je  $n = 1$ ,  $f$  je funkcija jedne promenljive;
- ako je  $n > 1$ ,  $f$  je funkcija više promenljivih;
- ako je  $m = 1$ ,  $f$  je skalarna funkcija;
- ako je  $m > 1$ ,  $f$  je vektorska funkcija.

U okviru kursa iz Matematičke analize 1 smo se prvenstveno bavili funkcijama za koje je  $n = m = 1$ , dakle skalarnim funkcijama jedne promenljive. Višestruke integrale smo definisali za skalarne funkcije više promenljivih, dakle, za slučaj kada je  $n > 1$  i  $m = 1$ . Kada smo definisali krive u ravni i prostoru, posmatrali smo vektorske funkcije jedne (skalarne) promenljive - dakle, slučajeve kada je  $n = 1$ , i  $m = 2$  (ravna kriva) ili  $m = 3$  (prostorna kriva).

Konačno, dolazimo do slučaja kada dopuštamo da je  $n > 1$  i  $m > 1$ , i time definišemo *vektorsko polje*. Dakle, vektorsko polje je vektorska funkcija više promenljivih. Možemo reći i da je vektorsko polje vektorska funkcija vektorske promenljive.

Napominjemo da je u upotrebi i termin *skalarno polje*; označava skalarnu funkciju više promenljivih, ili - skalarnu funkciju vektorske promenljive, sa kojom smo se već susreli u mnogo situacija. Dakle, pojam *polja* vezujemo za preslikavanja gde je argument vektor, odnosno gde je  $n > 1$ .

Dalje, naglašavamo i da ćemo se u radu sa vektorskim poljima uglavnom sretati sa funkcijama za koje je  $n = 2$  ili  $n = 3$ , i  $m = 2$  ili  $m = 3$ . Ovo znači da ćemo tačkama (vektorima) ravni opredeljavati vektore te iste ravni, ili prostora, i da ćemo tačkama (vektorima) 3D prostora dodeljivati vektore istog tog prostora.

Intuitivan primer predstavlja domen preslikavanja koji čine sve tačke Zemljine atmosfere, kao jedan podskup prostora  $\mathbb{R}^3$ . Ako svakoj takvoj tački dodelimo vrednost temperature u toj tački, definisali smo skalarno polje. Ako svakoj tački domena (atmosfera) dodelimo "informaciju" o strujanju vazduha u toj tački, što podrazumeva pravac, smer i intenzitet (tj, vektor brzine tog strujanja), definisali smo vektorsko polje.

Drugi klasični primeri vektorskih polja su polje brzine fluida, polje sile, gravitaciono polje, i slično.

Vektorsko polje definišemo koristeći skalarne funkcije. Tako, na primer, za skalarne funkcije (skalarna polja)  $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , možemo definisati vektorska polja

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

ili

$$\vec{H}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} + R(x, y)\vec{k}.$$

Osobine vektorskih polja suštinski zavise od osobina skalarnih funkcija-komponenta.

Prikazaćemo grafički neka vektorska polja. Najčešće ih nećemo crtati u daljem radu, ali nije loše da, za početak, steknemo što jasniju sliku o čemu pričamo kada pričamo o vektorskim poljima.

**Primer 3.6.** Prikazati grafički sledeća vektorska polja:

a)  $\vec{F}(x, y) = 2\vec{i} + \vec{j}$ ;

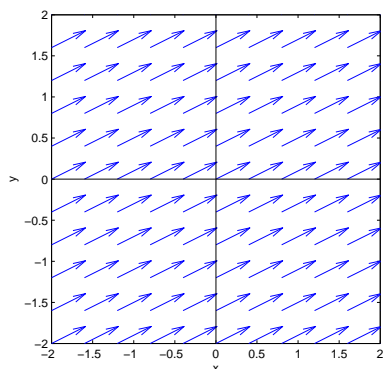
b)  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$ ;

c)  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ ;

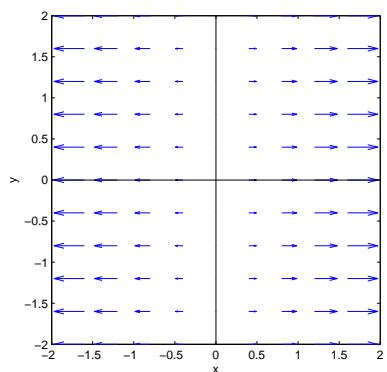
d)  $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ ;

**Rešenje:**

- a) Svakoj tački domena, koji je u ovom slučaju  $xy$ -ravan, pridružen je vektor čije su koordinate  $(2, 1)$ . Ovo je, dakle, konstantno vektorsko polje, jer su svim tačkama ravni (domena) dodeljene iste vrednosti. Vektorsko polje je prikazano na Slici 35 za izbor tačaka domena.

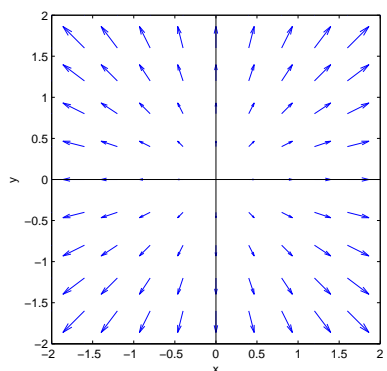


Slika 35: Vektorsko polje  $\vec{F}(x, y) = 2\vec{i} + \vec{j}$ .



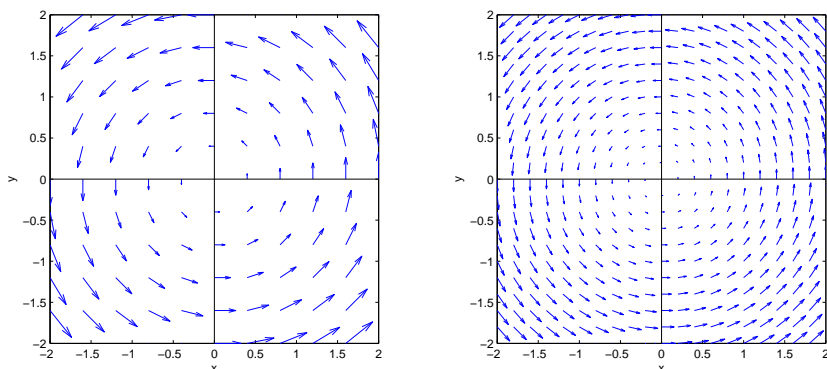
Slika 36: Vektorsko polje  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i}$ .

- b) U ovom slučaju svakoj tački ravni je dodeljen vektor koji je paralelan sa  $x$ -osom, a čija dužina (intenzitet) i smer zavise od tačke kojoj je dodeljen. Tačkama  $y$ -ose dodeljen je nula-vektor. Vektorsko polje je prikazano na Slici 36, za izbor tačaka domena.
- c) U svakoj tački  $xy$ -ravni odgovarajući vektor je jednak vektoru položaja posmatrane tačke. Svi vektori su usmereni suprotno od koordinatnog početka, a intenzitet im je jednak rastojanju tačke od koordinatnog početka. Vektorsko polje je prikazano na Slici 37 za izbor tačaka domena.



Slika 37: Vektorsko polje  $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

- d) Ovo polje je prikazano na Slici 38 (sa dva različita izbora tačaka u kojima je vektor prikazan; treba imati na umu činjenicu da se *svakoj* tački ravni dodeljuje vektor, a da mi iz praktičnih razloga, prikazujemo samo konačan podskup tog skupa vektora).



Slika 38: Vektorsko polje  $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ .

Ako uočimo da je skalarni proizvod  $(-y, x) \cdot (x, y) = -yx + xy = 0$ , zaključujemo da je dodeljeni vektor u svakoj tački ortogonalan na vektor položaja te tačke, a da su intenziteti dodeljenog vektora i vektora položaja tačke jednaki. Ovo vektorsko polje prikazuje kretanje fluida ravnomernom brzinom oko koordinatnog početka.

Uočimo da se ovakvim poljima prikazuje dejstvo neke sile u svakoj tački posmatranog skupa tačaka. Ako, recimo, posmatramo krivu koja je trajektorija kretanja neke tačke, i ako je u svakoj tački krive (trajektorije) definisano dejstvo posmatrane sile, možemo pokušati da odredimo ukupan rad te sile duž posmatrane trajektorije. Ovo će nas dovesti do još jedne vrste integrala. Međutim, pre nego što se pozabavimo ovim problemom, zadržaćemo se na još nekim važnim pojmovima i osobinama vezanim za vektorska polja.

### 3.3.1 Gradijent, divergencija, rotor

Skalarna i vektorska polja su (skalarne i vektorske) funkcije više promenljivih, pa svaka priča o diferenciranju polja neminovno vodi do parcijalnih izvoda, bilo da je reč o parcijalnim izvodima skalarnog polja, ili da je reč o parcijalnim izvodima skalarnih funkcija-komponenti kojima je definisano vektorsko polje.

Informaciju koju dobijamo poznavanjem parcijalnih izvoda skalarnog polja smo do sada “objedinjavali” definišući totalni diferencijal funkcije. Sada navodimo još jedan važan pojam koji definišemo koristeći parcijalne izvode.

**Definicija 3.1.** Za dato skalarno polje  $u = f(x, y, z)$  za koje su definisani parcijalni izvodi  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , vektor

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

naziva se gradijent te funkcije (skalarnog polja).

Uočavamo da gradijent preslikava skalarno polje u vektorsko. Ovo polje se, za datu skalarnu funkciju, naziva gradijentno polje.

Sa pojmom gradijenta funkcije više promenljivih smo se već susreli. Podsetimo se nekoliko važnih osobina gradijenta:

- Potreban uslov za postojanje ekstrema funkcije  $u = f(x, y, z)$  u nekoj tački domena je da je u toj tački  $\text{grad } f = 0$ .
- Izvod funkcije  $u = f(x, y, z)$  u pravcu datom jediničnim vektorom  $\vec{l}_0 = (l_1, l_2, l_3)$  je definisan kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x + l_1 \Delta t, y + l_2 \Delta t, z + l_3 \Delta t) - f(x, y, z)}{\Delta t}$$

a može se lako izračunati korišćenjem gradijenta:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_0} = \text{grad } f \cdot \vec{l}_0.$$

- Izvod (po pravcu) funkcije je najveći u pravcu gradijenta funkcije. Dakle, pravac gradijenta je pravac najbrže promene (rasta ili opadanja) funkcije. Promena je jednaka intenzitetu gradijenta,  $|\text{grad } f|$ .

- U smeru gradijenta funkcija (najbrže) raste, a u smeru suprotnom od gradijenta funkcija najbrže opada.
- U svim pravcima različitim od pravca gradijenta promena (skalarne) funkcije  $f$  je između vrednosti  $(-|\text{grad } f|)$  i  $|\text{grad } f|$ .
- U pravcu ortogonalnom na pravac gradijenta promena funkcije je beskonačno mala.

Ilustrativan primer korišćenja gradijenta je

**Primer 3.7.** Funkcijom  $z(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$  opisana je konfiguracija nekog terena. Ako se nalazimo u tački sa koordinatama  $(60, 100)$ , u kom pravcu je nagib terena najveći? Kolika je najveća visinska promena ako se krećemo iz te tačke?

**Rešenje:** Grafik date funkcija  $z$  je paraboloid čije su nivo-krive (preseki sa horizontalnim ravnima) elipse čije su polu-ose paralelne sa  $x$ - i  $y$ -osama, a maksimum (teme) paraboloida je u tački  $(0, 0, 1000)$ . Ovim paraboloidom je prikazano brdo (konfiguracija nekog terena). Kako je  $z(60, 100) = 764$ , tačka u kojoj stojimo nalazi se na visini od  $764m$ . Pravac najvećeg rasta funkcije iz neke tačke je pravac gradijenta te funkcije u toj tački. U ovom slučaju je

$$\text{grad } z = \left( \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-0.02x, -0.04y),$$

a u posmatranoj tački je

$$\text{grad } z(60, 100) = (-1.2, -4).$$

Dakle, vektor pravca u kom funkcija (visina terena) najbrže raste (posmatrano iz tačke  $(60, 100)$ ) je vektor  $(-1.2, -4)$ . S obzirom na njegove (negativne) koordinate, jasno je da je pravac kretanja u kom će visina terena najbrže rasti pravac ka koordinatnom početku, odnosno, temenu paraboloida, ili, ka vrhu ovog posmatranog brega.

Kako je

$$|\text{grad } z(60, 100)| = \sqrt{1.2^2 + 4^2} = 4.176,$$

zaključujemo da će se za  $1m$  promene položaja u horizontalnoj ravni visina na kojoj se nalazimo (u pravcu gradijenta - najbržeg rasta) povećati za  $4.176m$ .

Dalje, posmatramo vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Ukoliko postoje svi parcijalni izvodi skalarnih funkcija  $P, Q, R$ , po promenljivim  $x, y, z$ , definišemo još dva pojma.

**Definicija 3.2.** Divergencija vektorskog polja  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  je

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Uočimo da divergencija preslikava vektorsko polje u skalarno.

**Definicija 3.3.** Rotor vektorskog polja  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  je

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Uočimo da rotor preslikava vektorsko polje u vektorsko.

Praktičan način zapisivanja ovih operatora omogućen je korišćenjem *Hamiltonovog diferencijalnog operatora*, koji se još zove i operator *nabla*. Definisan je kao

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$



Ovaj operator može da se posmatra i koristi i kao vektor, i kao operator parcijalnih izvoda. Sada možemo izraziti operacije gradijenta, divergencije i rotora na sledeći način

- $\text{grad } f = \nabla f$  (ovde je *nabla* operator izvoda);
- $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$  (ovde primenjujemo skalarni proizvod između dva vektora, a zatim i operator);
- $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$  (ovde primenjujemo vektorski proizvod između dva vektora, a zatim i operator).

**Primer 3.8.** a) Odrediti gradijent polja  $u = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

b) Odrediti divergenciju i rotor polja  $\vec{F} = (x^2y, xyz, -x^2y^2)$ .

**Rešenje:**

a)  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (x, y)$ .

b) Za dato polje je  $P(x, y, z) = x^2y$ ,  $Q(x, y, z) = xyz$  i  $R(x, y, z) = -x^2y^2$ . Onda je

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2xy + xz,$$

i

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xyz & -x^2y^2 \end{vmatrix} = -(2x^2y + xy)\vec{i} + 2xy^2\vec{j} + (yz - x^2)\vec{k}.$$

Na osnovu definisanih veličina možemo klasifikovati vektorska polja. Tako, na primer, kažemo da je

- vektorsko polje  $\vec{F}$  *potencijalno* (ili konzervativno) ukoliko postoji skalarno polje  $f$  takvo da je  $\vec{F} = \nabla f$ .

Polje  $f$  zove se *potencijal* polja  $\vec{F}$ . Gradijentno polje skalarne funkcije je potencijalno. Ovo malo podseća na vezu funkcije i njene primitivne funkcije, ali sada posmatrajući funkciju više promenljivih i njene parcijalne izvode.

- vektorsko polje  $\vec{F}$  *bezvrtložno* ako je  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ .

Rotor možemo shvatiti kao meru tendencije polja za vrtložno (rotaciono) kretanje.

- vektorsko polje *solenoidno* ako je  $\text{div } \vec{F} = 0$ .

Divergencija je operator kojim se meri intenzitet izvora, odnosno ponora polja, u svakoj tački. Može se razumeti i kao mera promene gustine polja.

Može se dokazati tvrđenje

Vektorsko polje je potencijalno ako i samo ako je bezvrtložno.

Drugim rečima, ako je rotor vektorskog polja jednak nuli, onda postoji potencijal tog polja (i obrnuto). Ova teorema će nam kasnije biti od velike koristi. Napominjemo da se tvrđenje da je  $\text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$  direktno proverava, a tvrđenju u suprotnom smeru (da je polje  $\vec{F}$  gradijentno ukoliko je  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ ) ćemo se još posvetiti malo kasnije.

**Primer 3.9.** Ispitati da li je polje  $\vec{F} = 2xy^3z^4\vec{i} + 3x^2y^2z^4\vec{j} + 4x^2y^3z^3\vec{k}$  gradijentno.

**Rešenje:** Za dato vektorsko polje je  $P(x, y, z) = 2xy^3z^4$ ,  $Q(x, y, z) = 3x^2y^2z^4$  i  $R(x, y, z) = 4x^2y^3z^3$ . Dalje je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3z^4 & 3x^2y^2z^4 & 4x^2y^3z^3 \end{vmatrix} = (12x^2y^2z^3 - 12x^2y^2z^3)\vec{i} + (8xy^3z^3 - 8xy^3z^3)\vec{j} + (6xy^2z^4 - 6xy^2z^4)\vec{k} = \vec{0},$$

a odatle sledi, na osnovu prethodno navedenog tvrđenja, da je posmatrano polje konzervativno (gradijentno).

### 3.4 Krivolinijski integral vektorske funkcije

Nakon što smo definisali integral skalarne funkcije duž posmatrane krive, posmatraćemo vektorsku funkciju  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  koja je definisana nad nekim skupom  $G \subset \mathbb{R}^2$  i definisati njen integral duž posmatrane (ravne) krive  $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ,  $t \in I$ , gde je  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Pretpostavljamo da sve tačke krive pripadaju skupu  $G$ . Dakle, i pri definisanju krivolinijskog integrala vektorske funkcije ćemo prvo posmatrati dvodimenzionalni slučaj, a uopštenje na prostorne krive i odgovarajuća vektorska polja ćemo na kraju lako izvesti.

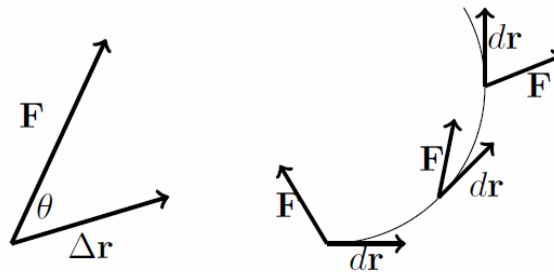
Fizička veličina (interpretacija) koju posmatramo u ovoj situaciji je rad sile. Sila je vektorska veličina. Posmatramo njeno dejstvo na neku tačku koja se pod dejstvom te sile kreće duž neke putanje. Ukoliko je putanja pravolinijska, a sila konstantna duž te putanje, i pri tome deluje u pravcu kretanja (vektor sile i vektor putanje su kolinearni i istog smera), *rad sile je definisan kao proizvod intenziteta sile i dužine pređenog puta pod dejstvom te sile*. U praksi najčešće nastupa opštiji slučaj, kada sila nije konstantna, putanja nije pravolinijska, a pravac kretanja i pravac sile nisu kolinearni. To znači da jednostavno množenje intenziteta dva vektora neće biti dovoljno da definiše rad sile u opštem slučaju.

Pretpostavimo da sila  $\vec{F}$  koja nije kolinearna sa pravcem kretanja  $\vec{r}$  deluje na tačku i uzrokuje kretanje duž pravolinijske putanje. Tada je potrebno razložiti silu na komponente, od kojih je jedna u pravcu kretanja, a druga ortogonalna na taj pravac. Samo komponenta koja deluje u pravcu kretanja utiče na kretanje i definiše rad. Ta komponenta jednaka je projekciji vektora sile  $\vec{F}$  na posmatrani pravac  $\vec{r}$ , pa je rad sada:

$$A = |\vec{F}| \cos \angle(\vec{F}, \vec{r}) |\vec{r}| = \vec{F} \cdot \vec{r}.$$

Dakle, *rad (konstantne) sile duž pravolinijske putanje jednak je skalarnom proizvodu vektora sile i vektora putanje*.

Dopustimo sada da je sila u svakoj posmatranoj tački definisana vektorskim poljem  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  (dakle, nije konstantna) i da kretanje koje se pod njenim dejstvom odvija nije pravolinijsko, nego krivolinijsko, duž  $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ,  $t \in I$ . Ovo je ilustrovano na Slici 39.



Slika 39: Rad sile  $\vec{F}$  duž krive  $C$ .

Rad te sile možemo približno izračunati posmatrajući podelu krive na segmente, i aproksimirajući svaki segment krive pravolinijskim segmentom  $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})$  za neke vrednosti  $t_{i-1}, t_i \in I$ , i posmatrajući silu  $\vec{F}_i = (P(x(t_i), y(t_i)), Q(x(t_i), y(t_i)))$  na takvom segmentu (dakle, smatramo da duž čitavog segmenta, koji je aproksimiran pravolinijskim segmentom, deluje konstantna sila, jednaka onoj koja deluje u tački  $(x(t_i), y(t_i))$ ). Ako sa  $A_i$  označimo rad na takvom jednom podsegmentu krive, dobijenom za  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ , onda je

$$A_i \approx \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i.$$

Sabirajući rad duž krive, za sve posmatrane pod-segmente, dobijamo integralnu sumu:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i .$$

Posmatrajući dalje podelu krive takvu da  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  teži nuli, pri čemu i  $\Delta \vec{r}_i \rightarrow 0$ , dobijamo sve tačniju aproksimaciju rada sile duž krive. Ukoliko tako definisana granična vrednost posmatrane integralne sume postoji, nezavisno od načina podele krive na segmente, ona je jednaka *krivolinijskom integralu vektorske funkcije*  $\vec{F}$  duž krive  $C$ :

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

Uočimo da vektor  $\Delta \vec{r}_i$ , u slučaju kada  $\Delta t_i \rightarrow 0$  ima položaj tangentskog vektora na krivu u tački  $\vec{r}(t_{i-1}) = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ .

Napomene:

- Posmatrana granična vrednost integralne sume postoji (za svaku podelu krive) ukoliko je vektorsko polje  $\vec{F}$  neprekidno (što znači da su neprekidne skalarne funkcije-komponente) i ukoliko je kriva  $C$  (po delovima) glatka.
- Sve osnovne osobine krivolinijskog integrala vektorske funkcije analogne su osobinama krivolinijskog integrala skalarne funkcije.
- Orijehtacija krive (smer kretanja duž krive) utiče na vrednost krivolinijskog integrala vektorske funkcije; važi da je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

pri čemu je  $-C$  kriva suprotno orijentisana u odnosu na  $C$ .

Ovo je intuitivno jasno, s obzirom da se rad sile u jednom smeru kretanja po krivoj stvara, a u suprotnom gubi. Promena smeru krive povezana je sa smerom tangente na krivu, a projekcija vektora sile na vektore istog pravca i intenziteta, a suprotnog smeru (zbog promene ugla), menja predznak.

### 3.5 Izračunavanje krivolinijskog integrala vektorske funkcije

Za krivu  $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ,  $t \in I = [a, b]$  je

$$d\vec{r} = (dx, dy) = (x'(t) dt, y'(t) dt) = \vec{r}'(t) dt ,$$

pa direktno dobijamo da je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt .$$

Ovo je osnovna formula za izračunavanje krivolinijskog integrala vektorske funkcije.

Dalje, već smo napomenuli da je  $\vec{r}'(t)$  tangentski vektor na krivu. Ovaj vektor nije obavezno jedinični, pa dobijamo da je

$$\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \vec{T}(t)$$

jedinični tangentski vektor na krivu  $C$ . Podsetimo se i da je  $|\vec{r}'(t)| dt = ds$ . Sada možemo izvesti

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} |\vec{r}'(t)| dt = \vec{T}(t) ds .$$

Dakle

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds .$$

Ovom vezom se krivolinijski integral vektorske funkcije svodi na krivolinijski integral po luku krive. Skalarne funkcija koju integralimo je projekcija sile  $\vec{F}$  na (jedinični) tangentski vektor u svakoj tački krive. Uočimo: ako je

vektor sile ortogonalan na krivu (na njenu tangentu) u svakoj tački krive, njihov skalarni proizvod, a samim tim i odgovarajući krivolinijski integral je jednak nuli. Ovo može biti baš korisno zapažanje.

Konačno,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (P, Q) \cdot (dx, dy) = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy .$$

Na ovaj način dolazimo do još jedne formulacije krivolinijskog integrala, zbog koje se krivolinijski integral vektorske funkcije često zove *krivolinijski integral po koordinatama*. Ponekad nailazimo i na ime *krivolinijski integral druge vrste*.

Uopštenje na slučaj kada duž prostorne krive  $C : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ,  $t \in I$ , gde je  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  deluje sila (vektorsko polje)  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  sledi direktno:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz .$$

Ilustrovaćemo postupak izračunavanja na nekoliko primera.

**Primer 3.10.** *Izračunati*

$$\int_C y dx + x^2 dy, \quad \text{od } A(0, 0) \text{ do } B(1, 1).$$

- a) *Posmatrati putanju duž prave  $y = x$ .*  
 b) *Posmatrati putanju koja je unija dva pravolinijska segmenta duž koordinatnih osa; od tačke  $A$  do tačke  $(1, 0)$ , a zatim od tačke  $(1, 0)$  do tačke  $B$ .*

**Rešenje:** U ovom slučaju je  $\vec{F} = (y, x^2)$ . Parametrizaciju krive koja spaja tačke  $A$  i  $B$  odredićemo za svaki od slučajeva posebno.

- a) Kriva duž koje polje deluje je ovde  $\vec{r}(t) = (t, t)$ , za  $t \in [0, 1]$ . Tada je  $d\vec{r} = (dx, dy) = (1, 1) dt$  i

$$\int_C y dx + x^2 dy = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t, t^2) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (t + t^2) dt = \frac{5}{6} .$$

- b) U ovom slučaju je  $C = C_1 \cup C_2$  i važi da je  $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$ , za  $t \in [0, 1]$  i  $\vec{r}_2(t) = (1, t)$ , za  $t \in [0, 1]$ .  
 Dalje je  $d\vec{r}_1 = (1, 0) dt$  i  $d\vec{r}_2 = (0, 1) dt$ .

Konačno je

$$\begin{aligned} \int_C y dx + x^2 dy &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \int_0^1 (0, t^2) \cdot (1, 0) dt + \int_0^1 (t, 1) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_0^1 0 dt + \int_0^1 dt = t \Big|_0^1 = 1 . \end{aligned}$$

Jasno, duž različitih putanja rad sile  $\vec{F} = (y, x^2)$  je različit.

**Primer 3.11.** *Izračunati  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , gde je*

$$\vec{F}(x, y, z) = 8x^2yz\vec{i} + 5z\vec{j} - 4xy\vec{k} \quad \text{i} \quad C : \vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad t \in [0, 1] .$$

**Rešenje:** S obzirom da je ovde  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ , dobijamo da je

$$\vec{F} = (8t^7, 5t^3, -4t^3), \quad d\vec{r} = (x'(t), y'(t), z'(t)) dt = (1, 2t, 3t^2) dt.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^1 (8t^7, 5t^3, -4t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\ &= \int_0^1 (8t^7 + 10t^4 - 12t^5) dt \\ &= 8 \cdot \frac{t^8}{8} \Big|_0^1 + 10 \cdot \frac{t^5}{5} \Big|_0^1 - 12 \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_0^1 \\ &= 1 + 2 - 2 = 1 \end{aligned}$$

**Primer 3.12.** Ako je  $C$  centralna jedinična kružnica, orijentisana pozitivno, izračunati rad sile  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$  duž te krive.

**Rešenje:** Uočimo da je dato vektorsko polje ortogonalno na (tangentne vektore na) trajektoriju  $C$ . Tada je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{T}}_{=0} ds = 0.$$

U ovom slučaju je geometrijsko razumevanje problema (i odgovarajuća formula za računanje integrala) od velike pomoći za brzo izračunavanje.

**Primer 3.13.** Izračunati  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , ako je  $\vec{F} = (y, x)$ , a kriva  $C$  je rub isečka centralne jedinične kružnice za  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ , pozitivno orijentisana.

**Rešenje:** U ovom slučaju je  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , pri čemu je

$$\begin{aligned} C_1: \quad \vec{r}(t) &= (t, 0), & t &\in [0, 1] & d\vec{r} &= (1, 0) dt \\ C_2: \quad \vec{r}(t) &= (\cos \theta, \sin \theta), & t &\in [0, \frac{\pi}{4}] & d\vec{r} &= (-\sin \theta, \cos \theta) dt \\ C_3: \quad \vec{r}(t) &= (t, t), & t &\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] & d\vec{r} &= (1, 1) dt. \end{aligned}$$

S obzirom da je duž krive  $C_1$  zadovoljeno da je polje  $\vec{F}(t) = (0, t)$  ortogonalno na krivu (koja je u ovom slučaju pravolinijski segment na  $x$ -osi i za koju je  $\vec{T} = (1, 0)$ ), dobijamo da je  $\vec{F} \cdot \vec{T} = (0, t) \cdot (1, 0) = 0$ , odnosno, da je

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0.$$

Duž krive  $C_2$  je

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin \theta, \cos \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vodeći računa o orijentaciji krive  $C_3$ , gde se krećemo po pravolinijskom segmentu od tačke  $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  do tačke  $O(0, 0)$ , dobijamo

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (t, t) \cdot (1, 1) dt = - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2t dt = -t^2 \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Konačno, traženi integral je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

### 3.6 Krivolinijski integral gradijentnog polja. Fundamentalna teorema integralnog računa za krivolinijski integral. Nezavisnost integrala gradijentnog polja od putanje integracije.

Podsetimo se: vektorsko polje  $\vec{F}$  je gradijentno, ukoliko postoji skalarno polje  $f$  takvo da je  $\nabla f = \vec{F}$ . U tom slučaju, skalarno polje  $f$  zove se potencijal vektorskog polja  $\vec{F}$ .

U nastavku ćemo se posvetiti krivolinijskom integralu gradijentnog vektorskog polja. Ispostaviće se da ovakav integral ima neke zanimljive osobine koje omogućavaju njegovo rešavanje na jednostavniji način nego u slučaju opšteg vektorskog polja.

Podsetimo se još i Njutn-Lajbnicove formule, koju smo još nazvali i fundamentalnom teoremom integralnog računa i koju smo koristili pri rešavanju određenog integrala skalarne funkcije  $y = f(x)$  jedne promenljive:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a),$$

ako je  $F$  primitivna funkcija funkcije  $f$ , tj  $F'(x) = f(x)$ .

Dakle, ukoliko znamo da je  $f$  izvod funkcije  $F$ , za izračunavanje integrala funkcije  $f$  dovoljno je da odredimo vrednost funkcije  $F$  u krajnjim tačkama intervala integracije.

Sada ćemo formulisati fundamentalnu teoremu za krivolinijski integral, koja ima mnogo sličnosti sa Njutn-Lajbnicovom formulom.

**Teorema 3.1.** (Fundamentalna teorema za krivolinijski integral) *Ako je  $C : \vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  glatka kriva sa početnom tačkom  $P_1$  i krajnjom tačkom  $P_2$ , i  $\vec{F} = \nabla f$  neprekidno gradijentno vektorsko polje (potencijalne) skalarne funkcije  $f$ , tada je*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) = f(P_2) - f(P_1).$$

Ukoliko koristimo zapis integrala po koordinatama, dobijamo:

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_C (f'_x, f'_y, f'_z) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \int df = f(P_2) - f(P_1),$$

što sasvim podseća na Njutn-Lajbnicovu formulu.

**Dokaz:** Koristeći da je

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = (x'_t dt, y'_t dt, z'_t dt) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$f = f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t)),$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\vec{r}(t))] dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) \end{aligned}$$

Ilustrovaćemo fundamentalnu teoremu primerom:

**Primer 3.14.** Posmatrajmo vektorsko polje  $\vec{F} = (y, x)$  i odredimo njegov rad duž krive koja predstavlja rub isečka centralne jedinične kužnice za  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

**Rešenje:** Ovaj zadatak smo već rešavali u Primeru 3.13. Sada ćemo ga rešiti na drugačiji način. Nije teško zaključiti da je polje  $\vec{F} = (y, x)$  gradijentno, odnosno da postoji funkcija  $f$  takva da je  $f'_x = y$  i da je  $f'_y = x$ . Ta funkcija je  $f(x, y) = xy$  i predstavlja potencijal polja  $\vec{F}$ .

Na osnovu fundamentalne teoreme za krivolinijski integral, sada je

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{C_1} \nabla f \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \nabla f \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \nabla f \cdot d\vec{r} \\ &= f(1, 0) - f(0, 0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1, 0) + f(0, 0) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo da se na ovaj način do rešenja dolazi znatno jednostavnije nego direktnim izračunavanjem (kao u Primeru 3.13), ali da u opštem slučaju ne možemo lako pogoditi da je dato polje gradijentno, kao ni kako izgleda odgovarajuća potencijalna funkcija. Ovim pitanjima - (1) kako utvrditi da je vektorsko polje gradijentno, odnosno, da postoji potencijalna funkcija, i (2) kako odrediti potencijalnu funkciju za neko gradijentno polje - pozabavićemo se uskoro detaljnije.

**Primer 3.15.** Izračunati  $\int_C \nabla f \cdot d\vec{r}$ , ako je  $f(x, y, z) = \cos(\pi x) + \sin(\pi y) - xyz$ , a  $C$  bilo koja kriva koja spaja tačke  $P_1(1, 0.5, 2)$  i  $P_2(2, 1, -1)$ .

**Rešenje:** Ovo je sasvim jednostavno, s obzirom da je jasno da se traži integral gradijentnog polja date potencijalne funkcije  $f$ . Tako je

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1) = f(2, 1, -1) - f(1, 0.5, 2) = 3 - (-1) = 4.$$

Navedimo neka veoma važna zapažanja:

- S obzirom na tvrđenje fundamentalne teoreme, uočavamo da rad (krivolinijski integral) gradijentnog polja zavisi samo od promene potencijala polja, tj. od razlike vrednosti potencijalne funkcije u krajnjim tačkama putanje integracije. Jasno je i da je rad gradijentnog polja duž zatvorene krive jednak nuli, s obzirom da se u tom slučaju početna i krajnja tačka krive poklapaju.
- Kako vrednost krivolinijskog integrala gradijentnog polja zavisi samo od krajnjih tačaka putanje integracije, a ne od same putanje, jasno je da je vrednost tog integrala ista duž svih krivih koje povezuju isti par tačaka. Drugim rečima: *krivolinijski integral gradijentnog polja ne zavisi od putanje integracije.*
- Iz prethodnog je jasno da se integral gradijentnog polja može računati koristeći bilo koju (proizvoljnu) putanju koja spaja dve posmatrane tačke. To nam daje mogućnost da sami biramo putanju integracije.
- Za svaku zatvorenu putanju  $C$  važi da je  $\oint_C \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$ .
- Gradijentno polje se još naziva i konzervativno, upravo zbog prethodno navedene osobine koja formuliše zakon održanja energije u gradijentnom polju. Konzervativno polje ne može generisati konstantno kretanje (bez dodatnog ulaganja energije nema proizvedenog rada). Ovakva su, recimo, električno i gravitaciono polje. Magnetno polje, na primer, nije gradijentno (konzervativno). U njemu je moguće postojanje zatvorenih putanja duž kojih se ostvaruje pozitivan rad. Ili: ulaganjem male energije za održanje magnetnog polja može se - bar teoretski - ostvariti rad bez ulaganja energije.

- Definicija konzervativnog polja takođe proizilazi iz prethodne osobine i glasi: *vektorsko polje  $\vec{F}$  je konzervativno ukoliko za svaku zatvorenu krivu  $C$  važi da je  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .*

Na osnovu navedenih zapažanja možemo formulisati sledeća međusobno *ekvivalentna tvrđenja*:

1. Vektorsko polje  $\vec{F}$  je gradijentno, odnosno, postoji skalarno polje  $f$  takvo da je  $\vec{F} = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ .
2. Vektorsko polje  $\vec{F}$  je konzervativno, odnosno za svaku zatvorenu krivu  $C$  važi da je  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ .
3.  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ne zavisi od putanje integracije.

Ekvivalentnost ovih tvrđenja nećemo formalno dokazivati.

Sada znamo da krivolinijski integral vektorskog polja najlakše izračunavamo kada je polje gradijentno, a putanja integracije zatvorena; znamo da je svaki takav integral jednak nuli.

Ukoliko putanja integracije  $C$  nije zatvorena, već spaja tačke  $P_1$  i  $P_2$  koje su različite, a polje  $\vec{F}$  jeste gradijentno, imamo dve mogućnosti da pogodno izračunamo krivolinijski integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ :

- Određujemo potencijalnu funkciju  $f$  polja  $\vec{F}$  a zatim koristimo fundamentalnu teoremu koja tvrdi da je  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1)$ .
- Koristimo nezavisnost integrala gradijentnog polja od putanje integracije i biramo proizvoljno najpogodniju putanju koja spaja tačke  $P_1$  i  $P_2$  za računanje integrala. Ovim postupkom možemo dobiti i potencijalnu funkciju.

Važna pitanja na koja još treba da odgovorimo su:

1. Kako da utvrdimo da li je dato vektorsko polje gradijentno.
2. Ako znamo da je polje gradijentno, kako da odredimo njegovu potencijalnu funkciju.

1. *Kako da utvrdimo da li je dato vektorsko polje gradijentno.*

Posmatrajmo dvodimenzionalni slučaj i pretpostavimo da je vektorsko polje  $\vec{F}$  gradijentno. To znači da je

$$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y)) = \nabla f = (f'_x, f'_y) \Rightarrow f'_x = P(x, y), f'_y = Q(x, y).$$

Pod odgovarajućim uslovima, za mešovite izvode funkcije  $f$  važi

$$f''_{xy} = f''_{yx} \quad \text{odnosno} \quad P'_y = Q'_x.$$

Dakle, ukoliko je  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  gradijentno vektorsko polje, onda mora da važi da je  $P'_y = Q'_x$ . Može se pokazati da važi i obrnuto: ako su  $P$  i  $Q$  definisane na nekoj otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti, i tu imaju neprekidne prve parcijalne izvode, onda iz uslova da je  $P'_y = Q'_x$ , sledi da je  $\vec{F}$  gradijentno.

U slučaju kada je  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ , primenjujemo isti postupak i argumentaciju. Zaključujemo da, ako je  $\vec{F}$  gradijentno polje funkcije  $f$ , što znači da je

$$f'_x = P(x, y, z), \quad f'_y = Q(x, y, z), \quad f'_z = R(x, y, z),$$

mora važiti da je

$$f''_{xy} = f''_{yx}, \quad f''_{xz} = f''_{zx}, \quad f''_{yz} = f''_{zy}$$



odnosno

$$P'_y = Q'_x, \quad P'_z = R'_x, \quad Q'_z = R'_y.$$

Nije teško uočiti da, ukoliko navedene jednakosti važe, dobijamo da je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y) = \vec{0}.$$

Ovim smo dokazali jedan smer tvrđenja koje smo već ranije naveli, govoreći o osobinama vektorskih polja: ako je  $\vec{F}$  gradijentno, ono je bezvrtložno. Kao što smo i tada napomenuli, može se pokazati da važi i tvrđenje u suprotnom smeru. Na osnovu svega navedenog, možemo definisati kriterijum za utvrđivanje da li je dato vektorsko polje  $\vec{F}$  gradijentno:

Da bi vektorsko polje  $\vec{F}$  bilo gradijentno, potrebno je, i dovoljno, da je  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ .

**Primer 3.16.** *Odrediti za koju vrednost parametra  $m$  je vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + (x + myz)\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$  gradijentno.*

**Rešenje:** S obzirom da je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & (x + myz) & (y^2 + z^2) \end{vmatrix} = 2y\vec{i} + \vec{k} - \vec{k} - my\vec{i} = (2 - m)y\vec{i}$$

jasno je da je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2.$$

Dakle, posmatrano polje je gradijentno za  $m = 2$ .

2. *Kako da odredimo potencijalnu funkciju datog gradijentnog polja.*

- Anti-diferenciranjem.

Znajući sve parcijalne izvode prvog reda neke funkcije, treba da odredimo tu funkciju. Postupak ćemo prikazati na Primeru 3.17. U primeru (a) posmatramo funkciju dve, a u primeru (b) funkciju tri promenljive.

**Primer 3.17.** *Odrediti potencijalnu funkciju gradijentnog vektorskog polja*

- $\vec{F}(x, y) = (4x^2 + 8xy, 3y^2 + 4x^2)$ .
- $\vec{F}(x, y, z) = 2xy^3z^4\vec{i} + 3x^2y^2z^4\vec{j} + 4x^2y^3z^3\vec{k}$ .

**Rešenje:**

- Lako je proveriti da je dato polje gradijentno, jer su parcijalni izvodi

$$P'_y = (4x^2 + 8xy)'_y = 8x, \quad \text{i} \quad Q'_x = (3y^2 + 4x^2)'_x = 8x;$$

očigledno jednaki.

Za parcijalne izvode funkcije  $f$  važi:

$$f'_x = 4x^2 + 8xy, \quad f'_y = 3y^2 + 4x^2,$$

pa je odatle

$$f(x, y) = \int (4x^2 + 8xy) dx = \frac{4x^3}{3} + 4x^2y + \varphi(y).$$

Kako je za ovako određenu funkciju  $f$

$$f'_y = 4x^2 + \varphi'(y)$$

a na osnovu uslova je  $f'_y = 3y^2 + 4x^2$ , zaključujemo da je

$$4x^2 + \varphi'(y) = 3y^2 + 4x^2 \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 .$$

Tada je

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C ,$$

a tražena potencijalna funkcija je

$$f(x, y) = \frac{4x^3}{3} + 4x^2y + y^3 + C$$

za bilo koje  $C \in \mathbb{R}$ .

- b) U Primeru 3.9 smo utvrdili da je posmatrano vektorsko polje gradijentno. Određujemo, dakle, funkciju  $f$  koja ispunjava uslov da je  $\nabla f = \vec{F}$  postupkom anti-diferenciranja. Za parcijalne izvode funkcije  $f$  važi:

$$f'_x = 2xy^3z^4 , \quad f'_y = 3x^2y^2z^4 , \quad f'_z = 4x^2y^3z^3 ,$$

pa je odatle

$$f(x, y, z) = \int (2xy^3z^4) dx = x^2y^3z^4 + \varphi(y, z) .$$

Za ovako određenu funkciju  $f$  je

$$f'_y = 3x^2y^2z^4 + \varphi'_y(y, z) ,$$

a uzimajući u obzir uslov zadatka dalje dobijamo

$$f'_y = 3x^2y^2z^4 + \varphi'_y(y, z) = 3x^2y^2z^4 .$$

Tada je

$$\varphi'_y(y, z) = 0 \Rightarrow \varphi(y, z) = \psi(z) .$$

Dakle,

$$f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + \psi(z) ,$$

a tada je

$$f'_z = 4x^2y^3z^3 + \psi'(z) .$$

Koristeći i treći uslov zadatka dobijamo da je

$$f'_z = 4x^2y^3z^3 + \psi'(z) = 4x^2y^3z^3 \Rightarrow \psi'(z) = 0 \Rightarrow \psi(z) = C ,$$

i konačno zaključujemo da je tražena potencijalna funkcija

$$f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + C$$

za bilo koju realnu vrednost konstante  $C$ .

- Izračunavanjem integrala posmatranog vektorskog polja koristeći pogodnu putanju integracije.

S obzirom da krivolinijski integral gradijentnog vektorskog polja ne zavisi od putanje integracije, odnosno da je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \nabla f \cdot d\vec{r} = f(P_2) - f(P_1) ,$$

za bilo koju putanju koja spaja tačke  $P_1$  i  $P_2$ , jasno je da za (svaku) fiksiranu tačku  $P_1(x_0, y_0, z_0)$  i (svaku) promenljivu tačku  $P_2(x, y, z)$  važi da je

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} .$$

Ukoliko putanju  $C$  izaberemo tako da je jednaka uniji tri pravolinijska segmenta,  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ , od kojih je svaki paralelan jednoj od koordinatnih osa, navedeni krivolinijski integral lako rešavamo, i na taj način dolazimo i do potencijalne funkcije  $f$ .

Pretpostavimo, radi jednostavnijeg zapisa, da je  $P_1$  koordinatni početak,  $P_1(0, 0, 0)$ . Tada se pravolinijski segmenti  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  mogu parametrizovati na sledeći način:

$$\begin{aligned} C_1 : \vec{r}(t) &= (t, 0, 0), & t \in [0, x] & \quad d\vec{r} = (1, 0, 0) dt = (dx, 0, 0) \\ C_2 : \vec{r}(t) &= (x, t, 0), & t \in [0, y] & \quad d\vec{r} = (0, 1, 0) dt = (0, dy, 0) \\ C_3 : \vec{r}(t) &= (x, y, t), & t \in [0, z] & \quad d\vec{r} = (0, 0, 1) dt = (0, 0, dz) . \end{aligned}$$

Primetimo da su vrednosti  $x$ ,  $y$ ,  $z$  konstante u prethodnoj parametrizaciji.

Dalje je, za  $\vec{F} = (P, Q, R)$ ,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} Q dy + \int_{C_3} R dz ,$$

a navedeni integrali se direktno svode na određene integrale i jednostavno računaju.

Ilustrovaćemo postupak primerom:

**Primer 3.18.** *Odrediti potencijalnu funkciju gradijentnog vektorskog polja  $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + 2yz, y^2 + z^2)$ .*

**Rešenje:** Uočimo, prvo, da smo u Primeru 3.16 potvrdili da je dato vektorsko polje gradijentno.

Primenjujući prethodno opisani postupak, dobijamo da je, za proizvoljnu krivu  $C$  koja spaja tačke  $(0, 0, 0)$  i  $(x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= f(0, 0, 0) + \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= f(0, 0, 0) + \int_{C_1} y dx + \int_{C_2} (x + 2yz) dy + \int_{C_3} (y^2 + z^2) dz \\ &= f(0, 0, 0) + \int_0^x 0 dt + \int_0^y (x + 0) dt + \int_0^z (y^2 + t^2) dt \\ &= f(0, 0, 0) + 0 + xy + y^2 z + \frac{z^3}{3} . \end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x, y, z) = xy + y^2 z + \frac{z^3}{3} + const ,$$

gde je korišćena oznaka da je  $f(0, 0, 0) = const$

### 3.7 Grinova teorema

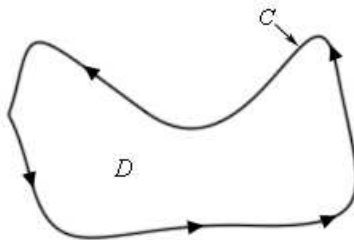
Naučili smo da za gradijentno vektorsko polje  $\vec{F}$  i zatvorenu krivu  $C$  važi da je  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ . Ukoliko polje nije gradijentno, navedeni integral po zatvorenoj krivoj  $C$  nije, u opštem slučaju, jednak nuli. Svakako, možemo ga izračunati po već navedenim pravilima, parametrizujući krivu (vodeći računa o njenoj orijentaciji!) i svodeći integral na određeni. Ispostavlja se, međutim, da ovakav integral možemo rešiti na još jedan način, i to svodeći ga na - dvostruki integral.

Pretpostavimo da je  $C$  zatvorena, prosta, ravna pozitivno orijentisana kriva. To znači, redom, da se početna i krajnja tačka ove krive poklapaju, da kriva ni u jednoj tački ne seče samu sebe, da su sve tačke krive sadržane u istoj ravni (pretpostavićemo da je to  $xy$ -koordinatna ravan) i da duž te krive posmatramo kretanje u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu.

Pretpostavićemo još i da je  $C$  glatka, ili po delovima glatka kriva, što znači da ima najviše konačno mnogo spiceva.

Prosta zatvorena ravna kriva je rub prosto povezane oblasti - podskupa iste ravni. Ta oblast naziva se unutrašnjost krive  $C$ . Označićemo je sa  $D$ . Uočimo da, krećući se po rubu oblasti u pozitivnom smeru, uvek imamo unutrašnjost  $D$  sa leve strane.

Primer jedne takve krive i njoj odgovarajuće unutrašnjosti prikazan je na Slici 40.



Slika 40: Zatvorena, prosta, pozitivno orijentisana kriva  $C$  i njom ograničena oblast  $D$ . Grinova teorema povezuje krivolinijski integral vektorske funkcije duž krive  $C$  i dvostruki integral (na odgovarajući način određene) skalarne funkcije nad oblašću  $D$ .

**Teorema 3.2.** (Grinova teorema) *Neka je  $C$  zatvorena, prosta, glatka, ili po delovima glatka, ravna, pozitivno orijentisana kriva i neka je  $D \subset \mathbb{R}^2$  unutrašnjost krive  $C$ . Neka je vektorsko polje  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  definisano i diferencijabilno na čitavoj oblasti  $D$ .*

*Tada važi Grinova formula:*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy .$$

Dokaz ove teoreme nećemo navoditi. Ova teorema, koja povezuje krivolinijski i dvostruki integral, je jedna od tri poznate *formule veze*. Preostale dve ćemo kasnije formulisati.

Nekoliko napomena:

- Grinova teorema je formulisana za *zatvorenu* krivu i njenu unutrašnjost. Ukoliko kriva nije zatvorena, možemo je zatvoriti, a zatim primeniti teoremu na odgovarajući način.
- Teorema koju smo formulisali odnosi se na proste krive i jednostruko povezane oblasti. Ukoliko je oblast određena većim brojem krivih, teoremu možemo primeniti, ali tek nakon što je na odgovarajući način prilagodimo.

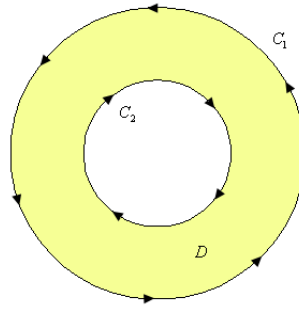
Na Slici 41 je prikazana oblast koju određuju dve zatvorene krive. Ova oblast nije jednostruko povezana, pa se na nju ne može direktno primeniti Teorema 3.2. Orijeentišimo krive  $C_1$  i  $C_2$  pozitivno, što znači da za svaku važi da, krećući se po njoj u pozitivnom smeru, spoljašnjost oblasti  $D$  imamo sa desne, a unutrašnjost sa leve strane. Tada Grinova teorema tvrdi da je

$$\oint_{C_1} P dx + Q dy + \oint_{C_2} P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy .$$

- Birajući na odgovarajući način funkcije  $P = P(x, y)$  i  $Q = Q(x, y)$ , tako da je  $Q'_x - P'_y = 1$ , možemo dobiti formulu za izračunavanje površine oblasti  $D$  korišćenjem krivolinijskog integrala po rubu te oblasti:

$$\Delta D = \iint_D dx dy = \iint_D \underbrace{(Q'_x - P'_y)}_{=1} dx dy = -\frac{1}{2} \oint_C y dx - x dy .$$

Navedeni izbor za funkcije  $P$  i  $Q$ , gde smo koristili da je  $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$  i da je  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$  (pa je  $P'_y(x, y) = -\frac{1}{2}$  i  $Q'_x(x, y) = \frac{1}{2}$ , odakle je  $Q'_x - P'_y = 1$ ) je samo jedan od neograničeno mnogo mogućih pogodnih izbora.



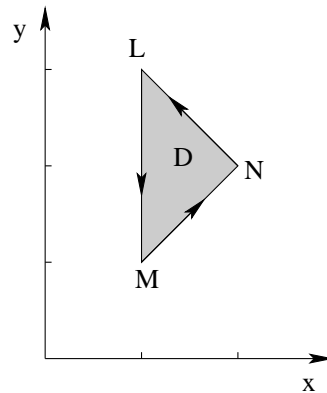
Slika 41: Oblast  $D$  je dvostruko povezana i ograničena je dvema zatvorenim, prostim, pozitivno orijentisanim krivama  $C_1$  i  $C_2$ .

Ilustrovaćemo primenu Grinove teoreme na nekoliko primera.

**Primer 3.19.** Izračunati  $\oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$  ako je  $C$  pozitivno orijentisan rub trougla  $D$  sa temenima  $M(1, 1)$ ,  $N(2, 2)$ ,  $L(1, 3)$ .

**Rešenje:** Ovaj integral svakako znamo da rešimo “direktno” (po definiciji krivolinijskog integrala), a sada ćemo ga izračunati korišćenjem Grinove formule. Time ćemo “uštedeti” sebi posao predstavljanja krive  $C$  u obliku unije tri segmenta i rastavljanja problema na tri nezavisna problema.

Kako je kriva  $C$  prosta, zatvorena, po delovima glatka i pozitivno orijentisana, a funkcije  $P(x, y) = 2(x^2 + y^2)$  i  $Q(x, y) = (x + y)^2$  definisane i diferencijabilne nad unutrašnjošću trougla  $D$ , uslovi za primenu teoreme Grina su ispunjeni. Na Slici 42 prikazana je oblast  $D$  i njen rub  $C$ .



Slika 42: Oblast  $D$  je unutrašnjost trougla sa temenima  $M(1, 1)$ ,  $N(2, 2)$ ,  $L(1, 3)$ , a kriva  $C$  je pozitivno orijentisan rub te oblasti.

Kako je  $P'_y(x, y) = 4y$  i  $Q'_x(x, y) = 2(x + y)$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy &= \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy \\ &= \int_1^2 \int_x^{4-x} 2(x - y) dy dx \\ &= \int_1^2 y(2x - y) \Big|_x^{4-x} dx \\ &= \int_1^2 (12x - 3x^2 - 16) dx = \dots \end{aligned}$$

**Primer 3.20.** Izračunati  $\oint_C ye^{-x} dx + (\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}) dy$  ako je  $C$  pozitivno orijentisana kružnica sa centrom u tački  $(2, 0)$ , poluprečnika 1.

**Rešenje:** I ovde bismo mogli da pokušamo da računamo integral direktno, ali nam je jasno da to neće biti sasvim jednostavno. Izgleda da je primena Grinove teoreme i u ovom slučaju dobar izbor.

U ovom slučaju su funkcije  $P(x, y) = ye^{-x}$  i  $Q(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}$ , pa je

$$P'_y(x, y) = e^{-x}, \quad Q'_x(x, y) = x + e^{-x}.$$

Odatle je

$$Q'_x - P'_y = x \quad \Rightarrow \quad \oint_C ye^{-x} dx + (\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}) dy = \iint_D x dx dy.$$

Ovaj integral ne moramo da računamo. Možemo da iskoristimo formulu za centar mase koju smo naveli pričajući o dvostrukom integralu, a čiji deo ovde prepoznajemo.

Znamo da je centar mase kružnice, ukoliko je masa homogeno raspoređena (što je ovde slučaj) istovremeno i centar te kružnice. Ovde je to tačka  $(x, y) = (2, 0)$ .

Dakle, kako je

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\text{Area}(D)} = 2,$$

ovde je

$$\iint_D x dx dy = 2\text{Area}(D) = 2\pi,$$

jer je površina posmatrane kružnice jednaka  $\pi$ .

**Primer 3.21.** Izračunati  $\int_C y dx + x^2 dy$  ako je  $C$  putanja koja polazi iz tačke  $M(0, 0)$  duž prave linije do tačke  $N(1, 0)$ , a zatim duž prave linije završava u tački  $L(1, 1)$ .

**Rešenje:** Ukoliko i ovde želimo da primenimo Grinovu teoremu, moramo obratiti pažnju na činjenicu da putanja integracije nije zatvorena kriva i da se teorema ne može (direktno) primeniti. Ono što u ovakvim situacijama možemo da uradimo je da "zatvorimo" krivu proizvoljnim, pogodno izabranim segmentom.

Ukoliko putanju  $C$  zatvorimo pravolinijskim segmentom  $C_1$  koji spaja tačku  $L(1, 1)$  sa tačkom  $M(0, 0)$ , kontura  $C \cup C_1$  je pozitivno orijentisana, prosta i zatvorena, pa važi da je

$$\oint_{C \cup C_1} y dx + x^2 dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D (2x - 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (2x - 1) dy dx = \frac{1}{6}.$$

Kako je

$$\oint_{C \cup C_1} y dx + x^2 dy = \int_C y dx + x^2 dy + \int_{C_1} y dx + x^2 dy,$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int_C y \, dx + x^2 \, dy &= \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy - \int_{C_1} y \, dx + x^2 \, dy \\ &= \frac{1}{6} + \int_{-C_1} y \, dx + x^2 \, dy \\ &= \frac{1}{6} + \int_0^1 (t, t^2) \cdot (1, 1) \, dt = \frac{1}{6} \int_0^1 (t + t^2) \, dt \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1.\end{aligned}$$

Koristili smo parametrizaciju  $\vec{r}(t) = (t, t)$  za  $t \in [0, 1]$  krive  $-C_1$ .

## 4 Površinski integral

### 4.1 Površ. Parametrizacija površi.

Površ je vektorska funkcija dve skalarne promenljive, odnosno preslikavanje skupa  $\mathbb{R}^2$  u skup  $\mathbb{R}^3$ . Površ  $S$  je dakle definisana kao vektorska funkcija

$$S : \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad \text{za} \quad (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2 .$$

Površ parametarski opisujemo koristeći dva parametra, analogno načinu na koji definišemo krivu, gde koristimo jedan parametar. Funkcije  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  i  $z = z(u, v)$  su tri skalarne funkcije dve promenljive, koje se zovu parametarske jednačine površi  $S$ .

Znajući da često pod pojmom površi podrazumevamo grafik skalarne funkcije dve promenljive,  $z = f(x, y)$ , uočavamo da ovako definisan skup tačaka možemo identifikovati sa njihovim vektorima položaja

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u, v)\vec{k} = (u, v, f(u, v)) , \quad (u, v) \in G ,$$

ili, zadržavajući inicijalne oznake za promenljive,

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k} = (x, y, f(x, y)) , \quad (x, y) \in G .$$

Ovo je jedna parametarska reprezentacija posmatrane površi koju ćemo često koristiti za prikazivanje površi koje su zadate kao grafici eksplicitno zadatih funkcija dve promenljive. U tom smislu, koristićemo i da se površ definisana kao  $y = f(x, z)$  za  $(x, z) \in G$  može parametarski prikazati kao

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + f(u, v)\vec{j} + v\vec{k} = (u, f(u, v), v) , \quad (u, v) \in G ,$$

odnosno

$$\vec{r}(x, z) = x\vec{i} + f(x, z)\vec{j} + z\vec{k} = (x, f(x, z), z) , \quad (x, z) \in G ,$$

a da je parametrizacija površi  $x = f(y, z)$ , za  $(y, z) \in G$

$$\vec{r}(u, v) = f(u, v)\vec{i} + u\vec{j} + v\vec{k} = (f(u, v), u, v) , \quad (u, v) \in G ,$$

odnosno

$$\vec{r}(y, z) = f(y, z)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (f(y, z), y, z) , \quad (y, z) \in G .$$

Navešćemo nekoliko primera parametrizacija površi.

**Primer 4.1.** *Napisati vektorske jednačine (parametrizacije) površi*

a)  $x = 5y^2 + 2z^2 - 10$ ;

b)  $x^2 + y^2 = 4$ ;

c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;

d)  $x + y + z = 1$ .

**Rešenje:**



a) Posmatrana površ je eliptični paraboloid, i oblika je  $x = f(y, z)$ . Parametrizacija takve površi je

$$\vec{r}(u, v) = (5u^2 + 2v^2 - 10) \vec{i} + u \vec{j} + v \vec{k} = (5u^2 + 2v^2 - 10, u, v), \quad (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2.$$

b) Data površ je cilindrična, sa osom koja je jednaka  $z$ -osi i nivo-krivama koje su kružnice poluprečnika 2. Parametrizacija ove površi je

$$\vec{r}(u, v) = 2 \cos u \vec{i} + 2 \sin u \vec{j} + v \vec{k} = (2 \cos u, 2 \sin u, v), \quad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Uočavamo izvesnu sličnost sa jednačinama prelaska na cilindrične koordinate, ali ovde koristimo određenu (konstantnu) vrednost poluprečnika (odnosno, samo dva parametra!).

c) Za parametrizaciju sfere poluprečnika 2 korišćemo jednačine slične jednačinama prelaska na sferne koordinate. I ovde, međutim, imamo samo dve promenljive - poluprečnik sfere je određen. Dakle,

$$\vec{r}(u, v) = 2 \sin u \cos v \vec{i} + 2 \sin u \sin v \vec{j} + 2 \cos u \vec{k} = (2 \sin u \cos v, 2 \sin u \sin v, 2 \cos u), \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi].$$

d) Datu jednačinu ravni možemo zapisati u obliku  $z = 1 - x - y$ , a zatim parametarski predstaviti kao

$$\vec{r}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (1 - u - v) \vec{k} = (u, v, 1 - u - v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

ili

$$\vec{r}(x, y) = x \vec{i} + y \vec{j} + (1 - x - y) \vec{k} = (x, y, 1 - x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Posmatrajmo tačku  $A$  na površi  $S$  koja je data koordinatama  $A(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , a zatim i tačke  $B(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v), z(u + \Delta u, v))$ ,  $D(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v), z(u, v + \Delta v))$  i  $C(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v), z(u + \Delta u, v + \Delta v))$  koje, zajedno sa taškom  $A$ , obrazuju temena krivolinijskog četvorougla  $ABCD$  na površi  $S$ , a dobijaju se za malu promenu vrednosti parametra  $u$ , odnosno  $v$ , u odnosu na tačku  $A$ . Potrebno je da odredimo površinu  $\Delta S$  ovako određenog krivolinijskog četvorougla, pri čemu ćemo se zadovoljiti aproksimacijom: umesto četvorougla  $ABCD$  posmatraćemo na odgovarajući način konstruisan paralelogram. Površinu paralelograma znamo da odredimo.

Vektori koji određuju stranice tog paralelograma su

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v), z(u + \Delta u, v)) - (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v), z(u, v + \Delta v)) - (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Odatle je

$$\vec{AB} \approx (x'_u \Delta u, y'_u \Delta u, z'_u \Delta u) = \vec{r}'_u(u, v) \Delta u \quad \text{i} \quad \vec{AD} \approx (x'_v \Delta v, y'_v \Delta v, z'_v \Delta v) = \vec{r}'_v(u, v) \Delta v,$$

a površina paralelograma određenog ovim vektorima je jednaka intenzitetu vektorskog proizvoda posmatranih vektora:

$$\Delta S \approx |\vec{r}'_u \Delta u \times \vec{r}'_v \Delta v| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \Delta u \Delta v. \quad (9)$$

Ukoliko vrednosti  $\Delta u$  i  $\Delta v$  teže nuli, aproksimacija krivolinijskog četvorougla (segmenta površi  $S$ ) opisanim paralelogramom je sve tačnija. U tom graničnom procesu, vektori  $\vec{AB}$  i  $\vec{AD}$  teže graničnim položajima tangentnih vektora u tački  $A$  na krive koje određuju stranice krivolinijskog četvorougla. Tako je definisan i *element površi*:

$$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv. \quad (10)$$

Uočimo još i sledeće:

- Vektori  $\vec{r}'_u$  i  $\vec{r}'_v$  su tangentni vektori (ne obavezno jedinični) na površ  $S$  u posmatranoj tački, a ravan određena ovim vektorima je tangentna ravan površi  $S$  u istoj tački.

- Vektorski proizvod  $(\vec{r}'_u \Delta u \times \vec{r}'_v \Delta v)$  je vektor koji je ortogonalan na (tangentnu ravan na) površ  $S$  u posmatranoj tački  $A$ , odnosno na paralelogram kojim smo aproksimirali posmatrani krivolinijski četvorougao  $ABCD$  (isečak iz  $S$ ). Intenzitet ovog vektorskog proizvoda je, dakle, približno jednak površini krivolinijskog četvorougla  $ABCD$ . Smer ovog vektorskog proizvoda određuje se po pravilu desnog koordinatnog sistema.
- Ako je sa  $\vec{n}$  označen jedinični vektor normale na površ u nekoj tački, onda (koristeći (10)) važi da je

$$(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv = \pm \vec{n} dS .$$

- Uobičajena je oznaka

$$d\vec{S} = \vec{n} dS$$

i

$$d\vec{S} = \pm(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv .$$

Ovde je važno imati na umu da iz činjenice da je

$$\vec{n} dS = \pm(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv$$

nikako ne sledi da je  $\vec{n} = \pm(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)$  i  $dS = du dv$  jer je  $|\vec{n}| = 1$  a vektor  $\pm(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v)$  nije jedinični. Važi, međutim, da je

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} .$$

Slično kao što smo u nekim situacijama vodili računa o orijentaciji krivih, vodićemo računa i o orijentaciji površi. Osim u izuzetnim slučajevima, površ ima dve strane koje se razlikuju po smeru vektora normale i odgovaraju dvema različitim orijentacijama. Birajući smer (predznak) vektora normale opredeljujemo se za jednu od dve strane, tj. jednu od dve orijentacije površi. Ako je površ zatvorena, što znači da deli prostor na dva disjunktna skupa (unutrašnju i spoljašnju oblast površi), smatraćemo pozitivnom onu stranu takve površi kojoj odgovara vektor normale usmeren ka spoljašnjoj oblasti.

Posmatrajmo specijalni slučaj kada je površ data kao grafik eksplicitno zadate funkcije  $z = f(x, y)$  i odredimo vektor normale  $\vec{n}$ , element površi  $dS$ , kao i vektor  $d\vec{S}$  za takvu površ.

Kao što smo već naveli, parametrizacija ove površi je

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u, v)\vec{k} = (u, v, f(u, v)) , \quad (u, v) \in G$$

a tada su

$$\vec{r}'_u(u, v) = (1, 0, f'_u(u, v)) , \quad \vec{r}'_v(u, v) = (0, 1, f'_v(u, v)) .$$

Dalje je

$$d\vec{S} = (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_u \\ 0 & 1 & f'_v \end{vmatrix} du dv = (-f'_u, -f'_v, 1) du dv .$$

Takođe je i

$$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \sqrt{1 + (f'_u)^2 + (f'_v)^2} du dv .$$

Ako uočimo da je prilikom parametrizacije uvedena (trivijalna) smena  $x = u, y = v$ , možemo napisati i da je

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy$$

i

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy .$$

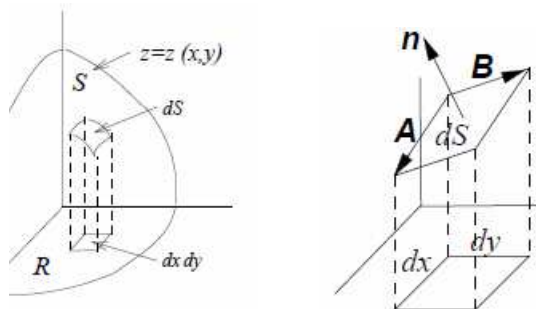
Ove formule ćemo kasnije intenzivno koristiti. Analogno se mogu izvesti i odgovarajuće formule za površi oblika  $y = f(x, z)$  i  $x = f(y, z)$ .

Uočimo još i da je za vektor  $d\vec{S} = (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy$  zadovoljeno da je

$$\cos(\vec{k}, d\vec{S}) = \frac{\vec{k} \cdot d\vec{S}}{dS} = \frac{(0, 0, 1) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1)}{dS} = \frac{1}{dS} \geq 0$$

što znači da ovako određen vektor normale na površ,  $d\vec{S} = (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy$  obrazuje sa pozitivnim smerom  $z$ -ose (tj. vektorom  $\vec{k}$ ) oštar ugao. Drugim rečima, ovako određen vektor  $d\vec{S}$  je usmeren naviše i odgovara gornjoj strani posmatrane površi. Nasuprot tome, vektor  $(f'_x, f'_y, -1)$  je vektor normale na donju stranu površi  $z = f(x, y)$ . Ovo zapažanje će nam kasnije biti od koristi.

Na Slici 43 prikazana je površ oblika  $z = f(x, y)$ , element površi aproksimiran paralelogramom nad tangentnim vektorima na površ, kao i vektor normale na (gornju stranu) površ.



Slika 43: Površ  $S$  definisana funkcijom  $z = f(x, y)$ . Krivolinijski četvorougao i njegova aproksimacija paralelogramom nad tangentnim vektorima. Vektor normale na tako određen paralelogram; njegov intenzitet je jednak površini paralelograma.

## 4.2 Površinski integral skalarnog polja

Kada smo definisali krivolinijski integral skalarnog polja, kao fizičku interpretaciju smo naveli određivanje ukupne mase koja je neravnomerno raspoređena po nekoj krivoj. Sada ćemo posmatrati sličan problem: neka masa je neravnomerno raspoređena po površi, a naš zadatak je da odredimo ukupni masu na površi, znajući njenu gustinu u svakoj tački površi.

Pretpostavimo da je površ  $S$  data parametarski,

$$S : \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad \text{za} \quad (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2 .$$

Dalje, pretpostavimo da je gustina mase raspoređene po površi definisana funkcijom  $u = f(x, y, z) : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  i da je ova funkcija definisana u svakoj tački površi  $S$ , odnosno da je  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in D$  za svako  $(u, v) \in G$ .

Uočimo da, ukoliko je gustina konstantna (tj. masa ravnomerno raspoređena po površi), ukupnu masu možemo odrediti kao proizvod gustine i površine površi. Mi, međutim, posmatramo neravnomerno raspoređenu masu. Dodatno pitanje je i pitanje određivanja površine površi.

Kao i do sad, problem ćemo rešiti tako što ćemo površ podeliti na segmente - krivolinijske četvorouglove koji se dobijaju podelom domena  $G$ . Ako (radi jednostavnijeg zapisa) pretpostavimo da je domen  $G$  pravougaonik, odnosno da je  $G = [a, b] \times [c, d]$ , onda je jedna podela određena izborom tačaka  $u_i, i = 1, \dots, n$  i  $v_j, j = 1, \dots, m$ , tako da je

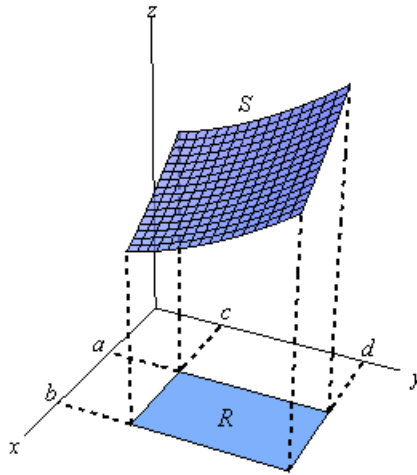
$$a = u_0 < u_1 < \dots < u_n = b, \quad c = v_0 < v_1 < \dots < v_m = d .$$

Koristimo i oznaku

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}, \quad \Delta v_j = v_j - v_{j-1} .$$

Podela površi je ilustrovana na Slici 44.

Svaki četvorougao (segment  $S_{ij}$ ) je određen tačkama površi  $S$  oblika  $A(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j), z(u_i, v_j)), B(x(u_i + \Delta u_i, v_j), y(u_i + \Delta u_i, v_j), z(u_i + \Delta u_i, v_j)), D(x(u_i, v_j + \Delta v_j), y(u_i, v_j + \Delta v_j), z(u_i, v_j + \Delta v_j)), C(x(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j), y(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j), z(u_i + \Delta u_i, v_j + \Delta v_j))$ .



Slika 44: Podela površi  $S$  na segmente koji su krivolinijski četvorouglovi.

Pri određivanju ukupne mase korišćićemo aproksimaciju: smatraćemo da je gustina konstantna na jednom segmentu  $S_{ij}$  određenom na prethodno opisani način. Tada će masa raspoređena na jednom krivolinijskom četvorouglu - segmentu  $S_{ij}$  - biti približno jednaka proizvodu površine segmenta i odabrane (konstantne) vrednosti funkcije gustine  $f$  nad tim paralelogramom.

Na osnovu svega navedenog možemo napisati da je masa raspoređena na jednom segmentu  $S_{ij}$  približno jednaka

$$m_{i,j} \approx f(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \Delta S_{ij}$$

pri čemu je  $f(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j))$  gustina u proizvoljno odabranoj tački posmatranog segmenta  $S_{ij}$ . Ukupna masa raspoređena na  $S$  se dobija sabiranjem “doprinosā” svih segmenata:

$$m \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \Delta S_{ij} .$$

Posmatrajući granični slučaj kada se broj segmenata neograničeno povećava i pri tome površina svakog od njih teži nuli, odnosno koristeći  $\Delta S_{ij} \rightarrow dS$ , dobijamo tačnu meru mase raspoređene po površi  $S$ :

$$m = \lim_{\Delta S_{ij} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \Delta S_{ij} = \iint_S f(x, y, z) dS .$$

Ukoliko prethodna granična vrednost postoji bez obzira na način podele površi  $S$  i nezavisno od načina izbora tačaka  $(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j))$ , ona definiše *površinski integral skalarne funkcije  $f$  po površi  $S$* .

Napomene:

- Prethodno navedena granična vrednost, kojom je definisan površinski integral, postoji ukoliko je  $S$  glatka, ili po delovima glatka površ, a  $u = f(x, y, z)$  neprekidna funkcija nad  $S$ .
- Površinski integral skalarne funkcije naziva se još i *površinski integral po površini površi*, ili *površinski integral prve vrste*.
- Površinski integral ima osobine analogne osobinama svih do sada definisanih integrala, pa ih nećemo eksplicitno navoditi.
- Površinski integral skalarne funkcije ne zavisi od parametrizacije, niti od orijentacije površi  $S$ .

### 4.2.1 Izračunavanje površinskog integrala skalarnog polja

Uočimo da smo u Odeljku 4.1 već izveli izraz (10) za element površine površi koji se pojavljuje u definiciji površinskog integrala. Taj izraz sada možemo iskoristiti pri izračunavanju površinskog integrala funkcije  $u = f(x, y, z)$  po površi  $S : \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$  za  $(u, v) \in G$ :

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv .$$

Ukoliko je površ definisana eksplicitno zadatom funkcijom  $z = z(x, y)$ , možemo koristiti jednostavniju formulu, koju smo takođe izveli u Odeljku 4.1:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy .$$

U slučaju kada je  $f(x, y, z) \equiv 1$  (masa jedinične gustine 1 je homogeno raspoređena po površi), posmatrani površinski integral jednak je površini površi  $S$ :

$$\Delta S = \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S dS = \iint_G |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv .$$

Za  $S : \vec{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$  (uočimo da je ovo parametrizacija površi koja je grafik eksplicitno zadate funkcije  $z = z(x, y)$ ) je onda

$$\Delta S = \iint_S dS = \iint_G \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy .$$

Ilustrovaćemo izračunavanje i korišćenje definisanog površinskog integrala na nekoliko primera.

**Primer 4.2.** Izračunati  $\iint_S y dS$  ako je površ  $S$  deo cilindra  $x^2 + y^2 = 3$ , između ravni  $z = 0$  i  $z = 6$ .

**Rešenje:** U Primeru 4.1(b) smo već razmatrali način parametrizovanja cilindrične površi, pa dobijeni rezultat sada direktno koristimo. Parametrizacija date površi  $S$  je

$$S : \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sqrt{3} \cos u \vec{i} + \sqrt{3} \sin u \vec{j} + v \vec{k} = (\sqrt{3} \cos u, \sqrt{3} \sin u, v) , \quad u \in [0, 2\pi], v \in [0, 6] .$$

Dalje je

$$\vec{r}'_u(u, v) = (-\sqrt{3} \sin u, \sqrt{3} \cos u, 0) , \quad \vec{r}'_v(u, v) = (0, 0, 1) ,$$

a vektorski proizvod ovih vektora je

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3} \sin u & \sqrt{3} \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sqrt{3} \cos u, \sqrt{3} \sin u, 0) .$$

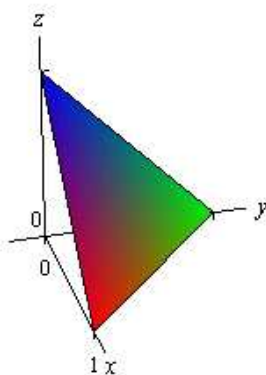
Dalje je

$$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = \sqrt{3 \cos^2 u + 3 \sin^2 u} du dv = \sqrt{3} du dv ,$$

i konačno

$$\iint_S y dS = \iint_G \sqrt{3} \sin u \sqrt{3} du dv = 3 \int_0^6 dv \int_0^{2\pi} \sin u du = 0 .$$

**Primer 4.3.** Izračunati  $\iint_S 6xy dS$ , ako je površ  $S$  deo ravni  $x + y + z = 1$ , u prvom oktantu.



Slika 45: Površ  $S$ , deo ravni  $x + y + z = 1$  u prvom oktantu, Primer 4.3.

**Rešenje:** Površ  $S$  je prikazana na Slici 45. Uočimo da je površ  $S$  grafik funkcije  $z = 1 - x - y$  u prvom oktantu i da možemo koristiti formule koje se odnose na površi koje su zadate eksplicitnim funkcijama. Projekcija površi  $S$  na  $xy$ -ravan je

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq (1 - x)\}.$$

Dakle,

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} dx dy,$$

a

$$\iint_S 6xy dS = 6 \iint_G xy \sqrt{3} dx dy = 6\sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

**Primer 4.4.** Izračunati površinu dela paraboloida  $z = 4 - x^2 - y^2$  iznad  $xy$ -ravni.

**Rešenje:** Koristićemo formulu

$$\Delta S = \iint_S dS = \iint_G \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

za funkciju  $z = z(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ , i

$$G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Sada je

$$\Delta S = \iint_G \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r \sqrt{1 + 4r^2} dr = \dots$$

Uočimo da smo pri rešavanju dvostrukog integrala uveli polarne koordinate,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r \in [0, 2]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , a da se poslednji integral može rešiti smenom  $(1 + 4r^2) = t^2$ .

### 4.3 Površinski integral vektorskog polja

Posmatrajmo orijentisanu površ  $S : \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$  za  $(u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2$  i protok nekog fluida kroz nju. Protok je definisan pravcem, smerom i intenzitetom u svakoj tački površi, odnosno - definisan je

vektorskim poljem  $\vec{F}$ . Ukupan protok vektorskog polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$  naziva se *fluks* polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$ .

Ukoliko je površ  $S$  ravna, a protok konstantan i normalan na  $S$ , fluks se izračunava kao proizvod površine površi i intenziteta vektora konstantnog vektorskog polja. Mi, međutim, želimo da odredimo fluks i u slučaju kada površ nije ravna, a vektorsko polje nije konstantno, niti ortogonalno na površ.

Ukoliko vektor polja  $\vec{F}$  nije ortogonalan na površ u uočenoj tački, protok je određen komponentom vektora polja koja deluje u pravcu (smeru) normale na površ. To znači da se intenzitet protoka smanjuje sa povećanjem ugla između vektora (elementa polja  $\vec{F}$ ) i normale  $\vec{n}$  na površ  $S$ . Ukoliko je vektor kretanja fluida u nekoj tački ortogonalan na normalu na površ, odnosno paralelan sa (tangentom na) površi, protok fluida kroz površ je 0. Ukoliko je ugao između vektora kretanja fluida i normale na površ tup, protok je negativan - ovo je u neposrednoj vezi sa orijentacijom površi (protok je pozitivan u jednom smeru kretanja, a negativan u suprotnom smeru kretanja kroz površ).

Intenzitet protoka polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$  u nekoj tački određen je, dakle, komponentom vektora polja u pravcu normale  $\vec{n}$  na površ; nju dobijamo računajući skalarni proizvod  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ .

Ako površ podelimo na segmente  $S_{ij}$  kao što smo već opisali u prethodna dva odeljka, fluks (protok) kroz svaki segment približno ćemo odrediti smatrajući da je polje  $\vec{F}$  konstantno na segmentu  $S_{ij}$ . Tada je fluks svakog segmenta  $S_{ij}$  jednak

$$\text{Flux}_{ij} \approx \vec{F}(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta S_{ij} ,$$

pri čemu je  $(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j))$  proizvoljna tačka segmenta  $S_{ij}$ , a  $\Delta S_{ij}$  površina tog segmenta.

Ukupan fluks polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$  je približno jednak zbiru svih protoka kroz segmente  $S_{ij}$ :

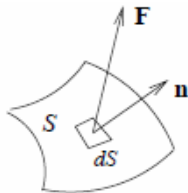
$$\text{Flux} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \vec{F}(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta S_{ij} ,$$

a posmatrajući granični slučaj kada se broj segmenata neograničeno povećava i pri tome površina svakog od njih teži nuli, odnosno koristeći  $\Delta S_{ij} \rightarrow dS$ , dobijamo tačnu vrednost fluksa polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$ :

$$\text{Flux} = \lim_{\Delta S_{ij} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \vec{F}(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j)) \cdot \vec{n} \Delta S_{ij} = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} dS = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} .$$

Ukoliko navedena granična vrednost postoji nezavisno od načina podele površi  $S$  i načina izbora tačaka  $(x^*(u_i, v_j), y^*(u_i, v_j), z^*(u_i, v_j))$ , njom je na navedeni način definisan *površinski integral vektorskog polja  $\vec{F}$  po površi  $S$* . Ovaj integral se još zove i *površinski integral druge vrste*.

Površ  $S$ , jedan segment  $S_{ij}$  površine  $\Delta S_{i,j} \rightarrow dS$ , normala na površ  $\vec{n}$  i odgovarajući vektor polja  $\vec{F}$  prikazani su na Slici 46.



Slika 46: Površ  $S$ , jedan segment  $S_{ij}$ , površine  $\Delta S_{i,j} \rightarrow dS$ , normala na površ  $\vec{n}$  i odgovarajući vektor polja  $\vec{F}$ .

Važno je uočiti da ovaj integral zavisi od orijentacije površi, odnosno izbora (predznaka) normale na površ.

### 4.3.1 Izračunavanje površinskog integrala vektorskog polja

U Odeljku 4.1 smo izveli izraz

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = \pm(\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) du dv ,$$

za površ  $S : \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$  za  $(u, v) \in G$ . Odatle je

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \iint_G \vec{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \, du \, dv .$$

Ukoliko je površ definisana eksplicitno zadatom funkcijom  $z = z(x, y)$ , možemo koristiti jednostavniju formulu, koju smo takođe izveli u Odeljku 4.1:

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) \, d\vec{S} = \iint_G (P(x, y, z(x, y)), Q(x, y, z(x, y)), R(x, y, z(x, y))) \cdot (-z'_x, -z'_y, 1) \, dx \, dy .$$

Ilustrovaćemo izračunavanje površinskog integrala vektorskog polja na dva primera.

**Primer 4.5.** Izračunati  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , ako je vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ , a površ  $S$  gornja strana dela ravni  $x - y + z = 1$  odsečenog koordinatnim osama.

**Rešenje:** Posmatrana površ  $S$  može se definisati kao grafik eksplicitno zadate krive  $z = 1 - x + y$ . Tačke u kojima ova ravan seče koordinatne ose imaju koordinate  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$ . Projekcija ovog skupa (površ  $S$ ) na  $xy$ -ravan je

$$G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad (x - 1) \leq y \leq 0\} .$$

Parametrizacija površi  $S$  je

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x + y), \quad (x, y) \in G ,$$

a za ovako zadatu površ je

$$d\vec{S} = (-z'_x, -z'_y, 1) \, dx \, dy = (1, -1, 1) \, dx \, dy .$$

Kako je  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z) = (x, y, 1 - x + y)$ , dobijamo da je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_G (x, y, 1 - x + y) \cdot (1, -1, 1) \, dx \, dy = \iint_G dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy = \frac{1}{2} .$$

Uočimo i da je

$$\iint_G dx \, dy = \text{Area}(G) = \frac{1}{2} ,$$

jer je  $G$  (jednakokraki) pravougli trougao sa katetama dužine 1.

**Primer 4.6.** Izračunati fluks polja  $\vec{F} = y\vec{j} - z\vec{k}$  kroz pozitivno orijentisanu površ  $S$  koju čine deo paraboloida  $y = x^2 + z^2$  za  $0 \leq y \leq 1$ , i deo ravni  $y = 1$ , za  $x^2 + z^2 \leq 1$ .

**Rešenje:** Površ  $S$  prikazana je na Slici 47. Sastoji se iz dela paraboloida  $y = x^2 + z^2$  za  $0 \leq y \leq 1$ , koji ćemo označiti sa  $S_1$ , i dela ravni  $y = 1$ , za  $x^2 + z^2 \leq 1$  (koji je “poklopac” površi  $S_1$ ) koji ćemo označiti sa  $S_2$ . Ova površ je zatvorena (što znači da deli prostor na dva disjunktne skupa - unutrašnju i spoljašnju oblast), a pozitivno je orijentisana ona njena strana kojoj odgovara normala usmerena ka spoljašnjosti.

Ukupan fluks datog polja jednak je zbiru fluksa kroz  $S_1$  i fluksa kroz  $S_2$ , odnosno

$$\text{Flux} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} .$$

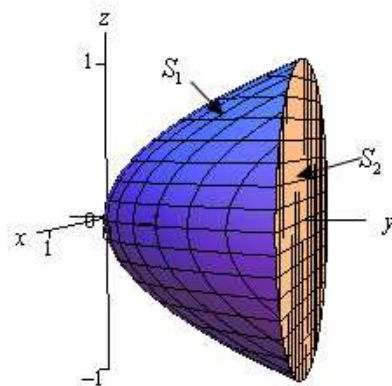
Parametrizacija površi  $S_1$ , koja je data eksplicitnom jednačinom oblika  $y = f(x, z)$  je

$$\vec{r}(x, z) = (x, x^2 + z^2, z), \quad (x, z) \in G_1$$

pri čemu je  $G_1 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$ , s obzirom da  $S_1$  posmatramo za  $y \in [0, 1]$ . Dalje je

$$d\vec{S} = (-f'_x, 1, -f'_z) \, dx \, dz = (-2x, 1, -2z) \, dx \, dz ,$$





Slika 47: Površ  $S$ , Primer 4.6. Deo paraboloida ( $S_1$ ) i deo ravni ( $S_2$ ).

ali ovde treba uočiti da izabrani vektor normale na površ  $S_1$  obrazuje sa  $y$ -osom oštar ugao. Zaista:

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = (-2x, 1, -2z) dx dz \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{d\vec{S}}{dS} = \frac{(-2x, 1, -2z) dx dz}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dz},$$

a onda je

$$\vec{n} \cdot \vec{j} = \frac{(-2x, 1, -2z)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \cdot (0, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \geq 0,$$

što znači da je  $\cos \angle(\vec{n}, \vec{j}) \geq 0$ , odnosno da je  $\angle(\vec{n}, \vec{j})$  oštar.

Kako je, međutim, potrebno odrediti fluks kroz pozitivno orijentisanu stranu površi  $S$ , znači da biramo normalu na  $S_1$  koja je pod tupim uglom u odnosu na  $y$  osu (ta normala usmerena je ka spoljašnjosti odlasti  $S$ ). Dakle, opredeljujemo se za

$$d\vec{S} = -\vec{n} dS = (2x, -1, 2z) dx dz.$$

Dalje je  $\vec{F}(x, y(x, z), z) = (0, y, -z) = (0, x^2 + z^2, -z)$  i konačno

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{G_1} (0, x^2 + z^2, -z) \cdot (2x, -1, 2z) dx dz = - \iint_{G_1} (x^2 + 3z^2) dx dz,$$

a ovaj integral dalje možemo rešiti uvođenjem polarnih koordinata,  $x = r \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ,  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) dr \\ &= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 (1 + 2 \sin^2 \theta) dr \\ &= - \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sin^2 \theta) d\theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \\ &= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= - \frac{1}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{8} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = -\pi. \end{aligned}$$

Fluks polja  $\vec{F}(x, y, z) = (0, y, -z) = (0, 1, -z)$  kroz površ  $S_2$ , koja je deo ravni  $y = 1$ , i kojoj odgovara vektor

normale  $\vec{n}_2 = \vec{j} = (0, 1, 0)$  je

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{G_2} (0, 1, -z) \cdot (0, 1, 0) dx dz \\ &= \iint_{G_2} dx dz = Area(G_2) = \pi . \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je površ  $S_2$  zadata eksplicitnom jednačinom  $y = f(x, z) = 1$ , za  $(x, z) \in G_2$ , gde je  $G_2 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$ , i da je tada  $dS = \sqrt{1 + 0 + 0} dx dz = dx dz$ .

Konačno je fluks polja  $\vec{F}$  kroz površ  $S$

$$\text{Flux} = -\pi + \pi = 0 .$$

## 4.4 Teorema Ostrogradskog-Gausa. Teorema Stouksa

Površinski integrali vektorskih polja nisu uvek sasvim jednostavni za izračunavanje pa je svakako ohrabrujuće znati da ponekad možemo probleme rešiti jednostavnije, zahvaljujući takozvanim *integralnim formulama veze*. Osim Grinove formule, koju smo naveli kao formulu veze koja povezuje dvostruki integral i krivolinijski integral vektorskog polja, na raspolaganju su nam još dve formule veze. Jedna je Formula Ostrogradskog-Gausa, koja povezuje površinski integral vektorskog polja sa trostrukim integralom, a druga je Formula Stouksa, koja povezuje površinski integral vektorskog polja sa krivolinijskim integralom vektorskog polja.

### 4.4.1 Teorema o divergenciji - Formula Ostrogradskog-Gausa

Posmatramo zatvorenu glatku ili po delovima glatku, pozitivno orijentisanu površ  $S$ . Ona deli 3D prostor na dva disjunktna skupa, unutrašnjost i spoljašnjost površi. Normala ove pozitivno orijentisane površi usmerena je ka spoljašnjosti. Unutrašnju oblast površi  $S$  označićemo sa  $V$ .

Dalje, posmatramo vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  koje je definisano i diferencijabilno u svim tačkama skupova  $S$  i  $V$ . Tada važi

**Formula Ostrogradskog - Gausa:**

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz . \quad (11)$$

Isto tvrđenje možemo fomulisati i ovako:

$$\iint_S (P, Q, R) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz .$$

Napomene:

- Divergencija  $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$  polja je skalarna funkcija koja izražava koliko protoka vektorsko polje generiše po jedinici zapremine, u svakoj tački te zapremine. Imajući to na umu, Teoremu o divergenciji čitamo kao: Ukupan protok vektorskog polja (fluida) kroz rubnu površ posmatrane oblasti jednak je ukupnoj količini fluida koji "izvire" unutar te oblasti.
- Važno je uočiti da se Teorema o divergenciji može primeniti samo na *zatvorenu* površ.
- Teorema o divergenciji je jedno uopštenje formule Grina, gde se integral po rubu oblasti (krivolinijski kod Teoreme Grina, površinski kod Teoreme o divergenciji) dovodi u vezu sa integralom po unutrašnjoj oblasti (dvostrukim kod Teoreme Grina, odnosno trostrukim kod Teoreme o divergenciji).

Ilustrovaćemo primenu Teoreme o divergenciji na nekoliko primera.

**Primer 4.7.** *Odrediti fluks polja  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$  kroz spoljašnju stranu centralne sfere poluprečnika  $a$ .*

**Rešenje:** Zadatak možemo rešiti “direktno”, a s obzirom da je data površ  $S$  zatvorena i pozitivno orijentisana, možemo primeniti i formulu Ostrogradskog-Gausa. Radi ilustracije, uradićemo i jedno i drugo.

a) Direktno:

Jednačina površi  $S$  je  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ . Uočimo da je svaka tačka centralne sfere poluprečnika  $a$  određena vektorom položaja  $(ax, ay, az)$ , a da je pravac ovog vektora (poluprečnika sfere koji odgovara posmatranoj tački) istovremeno i pravac normale na sferu  $S$ . Jedinični vektor normale je onda

$$\vec{n} = \frac{a(x, y, z)}{a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{(x, y, z)}{a}.$$

Kako je posmatrano polje  $\vec{F} = (x, y, z)$ , jasno je da je

$$\vec{F} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = |\vec{F}| |\vec{n}| \cos \angle(\vec{F}, \vec{n}) = |\vec{F}| = a,$$

jer je  $|\vec{n}| = 1$  i  $\cos \angle(\vec{F}, \vec{n}) = \cos 0 = 1$ .

Konačno je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = a \iint_S dS = a \text{Area}(S) = a 4\pi a^2 = 4\pi a^3.$$

b) Primenom formule Ostrogradskog-Gausa:

S obzirom da je  $\text{div } \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$ , dobijamo

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{F} dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \text{Volume}(V) = 3 \frac{4}{3} a^3 \pi = 4a^3 \pi.$$

Ovde je sa  $V$  označena unutrašnjost posmatrane centralne sfere, a sa  $\text{Volume}(V)$  zapremina te oblasti (lopte poluprečnika  $a$ ).

**Primer 4.8.** *Odrediti fluks polja  $\vec{F} = z \vec{k} = (0, 0, z)$  kroz spoljašnju stranu pozitivno orijentisane centralne sfere  $S$ , poluprečnika  $a$ .*

**Rešenje:** I u ovom primeru ćemo, kao i u prethodnom, zadatak rešiti na dva načina.

a) Direktno:

U prethodnom primeru smo već zaključili da je  $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{a}$ . Sada je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (0, 0, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} dS = \frac{1}{a} \iint_S z^2 dS.$$

Ovaj površinski integral skalarne funkcije se dalje rešava korišćenjem parametrizacije površi  $S$  i određivanjem  $dS$ . Parametrizaciju površi  $S$  navodimo koristeći ono što smo naučili u Primeru 4.1(c):

$$S : \vec{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u), \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Dalje računamo da je

$$dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| du dv = a^2 \sin u du dv ,$$

pa je traženi fluks sada

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \frac{1}{a} \iint_S z^2 dS \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi a^4 \cos^2 u \sin u du \\ &= -2\pi a^3 \int_1^{-1} t^2 dt = \frac{4}{3} a^3 \pi . \end{aligned}$$

Pri rešavanju određenog integrala koristili smo smenu  $\cos u = t$ .

b) Primenom formule Ostrogradskog-Gausa:

Kako je  $\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 1 = 1$ , dobijamo da je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iiint_V dx dy dz = \operatorname{Volume}(V) = \frac{4}{3} a^3 \pi .$$

Uočavamo da nam je u ovom primeru korišćenje formule Ostrogradskog - Gausa u velikoj meri olakšalo rešavanje problema.

**Primer 4.9.** Korišćenjem Teoreme o divergenciji izračunati  $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ , ako je vektorsko polje  $\vec{F} = (x, y, z)$ , a površ  $S$  gornja strana dela ravni  $x - y + z = 1$  odsečenog koordinatnim osama.

**Rešenje:** Uočimo prvo da smo ovaj problem rešili u Primeru 4.5. Uočimo, dalje, da je posmatrana površ  $S$  deo ravni, i da nije zatvorena. Ukoliko želimo da primenimo Teoremu o divergenciji, moramo na pogodan način zatvoriti površ.

Neka je  $\sigma = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$  zatvorena površ koju čine  $S$  i delovi koordinatnih ravni od koordinatnog početka do prodora osa kroz ravan  $x - y + z = 1$ ; označimo sa  $S_1$  odgovarajući deo  $xz$ -ravni, sa  $S_2$  deo  $yz$ -ravni, i sa  $S_3$  deo  $xy$ -ravni.

Sada je

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz ,$$

odnosno

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} .$$

Kako je  $\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$ , dobijamo da je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 3 \iiint_V dx dy dz = 3 \operatorname{Volume}(V) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

Ovde smo izračunali zapreminu oblasti  $V$ ,  $\operatorname{Volume}(V)$ , koristeći formulu za zapreminu piramide.

Dalje, s obzirom da su jedinični vektori normala na  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$ , redom  $\vec{n}_1 = \vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{n}_2 = \vec{i} = (1, 0, 0)$ , i  $\vec{n}_3 = \vec{k} = (0, 0, 1)$ , a za površi redom važi da su im jednačine

$$S_1 : y = 0 , \quad S_2 : x = 0 , \quad S_3 : z = 0 ,$$

dobijamo

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_{S_1} (x, 0, z) \cdot (0, 1, 0) dS = 0 ,$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS = \iint_{S_2} (0, y, z) \cdot (1, 0, 0) dS = 0,$$

i

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 dS = \iint_{S_3} (x, y, 0) \cdot (0, 0, 1) dS = 0.$$

Iz svega navedenog zaključujemo da je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{2}.$$

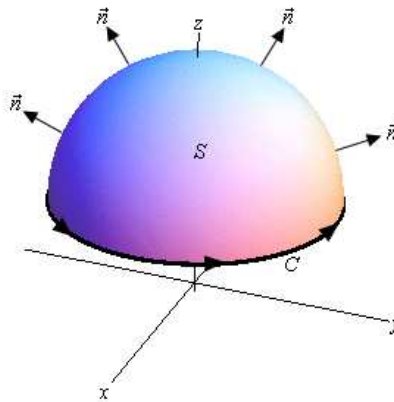
#### 4.4.2 Teorema Stouksa

Još jedno uopštenje formule Grina je Teorema Stouksa. Ova formula predstavlja vezu između krivolinijskog i površinskog integrala.

Posmatrajmo u 3D prostoru površ  $S$  koja je dvostrana, glatka, ili po delovima glatka, i koja je ograničena zatvorenim krivom  $C$  tako da su  $S$  i  $C$  saglasno orijentisane.

Pod saglasnom orijentacijom površi i njene rubne krive podrazumevamo da pri zamišljenom kretanju osobe u pozitivnom smeru duž krive, tako da je osoba uspravljena u smeru normale na površ, površ ostaje uvek sa leve strane osobe koja se kreće. Alternativno, pod saglasnim orijentacijama krive i površi podrazumevamo da, ukoliko šaku desne ruke postavimo tak da palac bude usmeren kao normala na površ  $S$ , prsti uvek pokazuju pozitivan (saglasan) smer kretanja duž krive.

Primer saglasno orijentisanih površi i krive prikazan je na Slici 48.



Slika 48: Prikazana površ  $S$  i zatvorena kriva  $C$  koja je rub površi  $S$  su saglasno orijentisane.

Posmatrajmo još i vektorsko polje  $\vec{F} = (P, Q, R)$  koje je definisano i diferencijabilno nad  $C \cup S$ . Tada za saglasno orijentisane  $C$  i  $S$  važi

**Formula Stouksa:**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS. \quad (12)$$

Napomene:

- Rotor vektorskog polja,  $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$  je vektorsko polje koje predstavlja meru rotacionog kretanja polja  $\vec{F}$ . Do sada smo koristili činjenicu da je  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  potreban i dovoljan uslov da polje  $\vec{F}$  bude gradijentno, a njegov krivolinijski integral po zatvorenoj putanji jednak nuli. Sada imamo formulu koja dovodi u vezu izračunavanje krivolinijskog integrala po zatvorenoj putanji sa rotorom polja, i u slučaju kada polje nije konzervativno (gradijentno).

- Uočimo da je formula Grina specijalni slučaj formule Stouksa, onaj kada su površ  $S$  i njen rub  $C$  podskupovi  $xy$ -ravni.
- Ako želimo da primenimo formulu Stouksa na dati krivolinijski integral po zatvorenoj orijentisanoj krivoj  $C$ , potrebno je da odaberemo površ  $S$  po kojoj ćemo izračunati odgovarajući površinski integral (u skladu sa formulom Stouksa). Uočimo da površ  $S$  može biti *bilo koja* površ kojoj je kriva  $C$  rub i koja je orijentisana saglasno sa krivom  $C$ . Ukoliko je  $C$  ravna kriva, prirodno je, ali ne i obavezno, za  $S$  izabrati deo ravni koja sadrži  $C$  i predstavlja njenu unutrašnjost.

Primenu formule Stouksa ilustrovaćemo primerom.

**Primer 4.10.** Izračunati rad sile  $\vec{F} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x\vec{k}$  duž pozitivno orijentisanog ruba trougla sa temenima  $M(1, 0, 0)$ ,  $N(0, 1, 0)$  i  $L(0, 0, 1)$ .

**Rešenje:** Rad sile duž neke putanje  $C$  izračunavamo kao

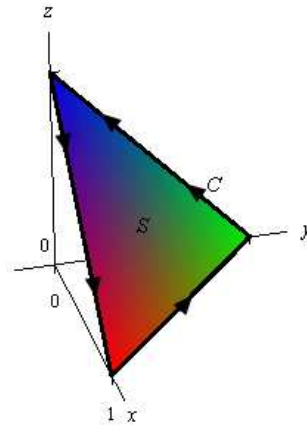
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ovde je  $C$  pozitivno orijentisan rub trougla  $MNL$ , a navedeni integral možemo izračunati “direktno”, parametrizujući svaku od stranica trougla i posmatrajući tri odgovarajuća krivolinijska integrala.

Opređelićemo se, umesto toga, da integral izračunamo primenom formule Stouksa. Data kriva je zatvorena i pozitivno orijentisana. Da bismo primenili teorem Stouksa potrebno je da izaberemo površ  $S$  takvu da joj je  $C$  rub, i da je orijentisemo saglasno orijentaciji  $C$ .

Uočavamo da je  $C$  ravna kriva - tri date tačke, a samim tim i trougao određen njima, svakako pripadaju jednoj ravni. Nije teško zaključiti da jednačina  $x + y + z = 1$  predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz  $M$ ,  $N$ , i  $L$ .

Mada nije obavezno da  $S$  izaberemo kao deo ravni  $x + y + z = 1$ , ovaj izbor je najprirodniji. Ovako izabrana površ  $S$  prikazana je na Slici 49.



Slika 49: Površ  $S$  izabrana kao deo ravni kojoj je data kriva  $C$  rub, Primer 4.10.

Uočimo da orijentacija površi  $S$  koja je saglasna sa orijentacijom krive  $C$  odgovara normali  $n$  koja je usmerena naviše. Drugim rečima,  $S$  je gornja strana dela ravni  $x + y + z = 1$ , u prvom oktantu.

Parametrizacija površi je

$$S: \vec{r}(x, y) = (x, y, 1 - x - y), \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1 - x].$$

Dalje je

$$d\vec{S} = (-z'_x, -z'_y, 1) dx dy = (1, 1, 1) dx dy.$$

Potrebno je još da odredimo rotor posmatranog polja  $\vec{F}$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & y^2 & x \end{vmatrix} = 2z\vec{j} - \vec{j} = (0, 2z - 1, 0).$$

Na posmatranoj površi  $S$  je

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (0, 2z - 1, 0) = (0, 2(1 - x - y) - 1, 0) = (0, 1 - 2x - 2y, 0),$$

a onda je, na osnovu formule Stouksa,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_G (0, 1 - 2x - 2y, 0) \cdot (1, 1, 1) dx dy \\ &= \iint_G (1 - 2x - 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - 2x - 2y) dy \\ &= \int_0^1 (y - 2xy - y^2) \Big|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

## 5 Osnove teorije redova

Red je zbir beskonačno mnogo elemenata. Sabirci (elementi) mogu biti brojevi (tada govorimo o *brojnim redovima*) ili funkcije (tada govorimo o *funkcionalnim redovima*). Ono što je uvek važno pitanje je da li je posmatrani zbir beskonačno mnogo sabiraka konačan ili beskonačan broj. U tom smislu razlikujemo *konvergentan* i *divergentan* red; konvergentan red ima konačnu sumu, a divergentan je nema. Još jedno važno pitanje kojim se bavimo je koliki je zbir konvergentnog reda.

Kada posmatramo funkcionalne redove - redove čiji su elementi funkcije - pitanje konvergencije u opštem slučaju zavisi od vrednosti promenljive. U tom smislu pokušavamo da odredimo skup vrednosti promenljive za koji je posmatrani funkcionalni red (koji za svaku od vrednosti promenljive prelazi u brojni red) konvergentan, a zatim pokušavamo da odredimo i sumu reda, za one vrednosti promenljive za koje (konačna) suma postoji. Ovim uspostavljamo jednakost između nekih redova i nekih funkcija, a ove veze dalje koristimo u različitim situacijama - recimo, kada je uočene funkcije pogodno zameniti odgovarajućim sumama (sa lepim osobinama).

U nastavku ćemo se prvo pozabaviti brojnim redovima, a zatim i nekim specijalnim funkcionalnim redovima.

### 5.1 Brojni redovi

#### 5.1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Pretpostavimo da imamo beskonačan niz brojeva  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  i da želimo da odredimo zbir članova tog niza. Tako formiramo sledeće sume:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k . \end{aligned}$$

Uočavamo da se zbir svih članova polaznog niza  $\{a_n\}$  može dobiti kao granična vrednost niza  $s_n$ . Tako uvodimo oznake

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$$

ukoliko granična vrednost  $s$  postoji.

Pri tome,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nazivamo *beskonačnim (brojnim) redom*, a element  $a_k$  je *opšti član reda*. Niz  $\{s_n\}$  naziva se *niz parcijalnih suma reda*, a njegova granična vrednost  $s$ , ukoliko postoji, naziva se *suma reda*.

Ukoliko niz parcijalnih suma konvergira (odnosno, ukoliko granična vrednost  $s$  postoji i konačna je), kažemo da je red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  *konvergentan*. To znači da zbir beskonačno mnogo sabiraka  $a_k$  posmatranog reda ima konačan zbir.

U protivnom (ukoliko granična vrednost niza  $s_n$  parcijalnih suma ne postoji, ili nije konačna), kažemo da je red



$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  *divergentan*. To znači da je zbir beskonačno mnogo sabiraka  $a_k$  beskonačan. Uočimo da je sasvim intuitivno da sabiranjem beskonačno mnogo sabiraka dobijemo beskonačan zbir. Neočekivano je, međutim, da to ne mora uvek da se dogodi, što i pravi prostor za temu kojom se bavimo u ovom odeljku. Pokušaćemo da utvrdimo od čega zavisi da li je posmatrana beskonačna suma konačna ili beskonačna, kao i koji su kriterijumi da ove osobine prepoznamo kod nekog konkretnog reda. Uz to, uočićemo da beskonačne sume mogu da imaju još neke neobične osobine.

Nekoliko ilustrativnih primera:

**Primer 5.1.** *Ispitati konvergenciju datih redova i odrediti sumu za one koji konvergiraju:*

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{k=1}^{\infty} k, & \text{b) } & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{c) } & \sum_{k=0}^{\infty} q^k, \\ \text{d) } & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, & \text{e) } & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k. \end{aligned}$$

**Rešenje:** S obzirom da smo sumu reda definisali kao graničnu vrednost niza parcijalnih suma, konvergenciju redova (i sumu, onda kada postoji) ćemo ispitivati posmatrajući u svakom od slučajeva, niz parcijalnih suma.

a)  $n$ -ta parcijalna suma ovog reda je

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty,$$

posmatrani red divergira (ima beskonačnu sumu).

b)  $n$ -ta parcijalna suma ovog reda je

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty,$$

posmatrani red divergira (ima beskonačnu sumu).

c)  $n$ -ta parcijalna suma ovog geometrijskog reda je (za  $q \neq 1$ )

$$s_n = \sum_{k=1}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Iskoristili smo poznatu formulu za zbir prvih  $n$  (odnosno ovde prvih  $n+1$ ) članova geometrijskog reda. Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ \infty & q \geq 1 \\ \text{ne postoji} & q \leq -1 \end{cases}$$

zaključujemo da *geometrijski red*  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergira kada je  $|q| < 1$  i da mu je tada suma jednaka  $s = \frac{1}{1-q}$ , a da za druge vrednosti  $q$  ovaj red divergira. Ovaj red je prilično značajan za naš dalji rad i treba ga imati na umu.

d) Kako za opšti član reda važi:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

$n$ -ta parcijalna suma je

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

zaključujemo da posmatrani red konvergira i da mu je suma jednaka 1.

e) Uočimo da za posmatrani red

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

niz parcijalnih suma ima elemente

$$s_0 = 1; \quad s_1 = 1 - 1 = 0; \quad s_2 = 1 - 1 + 1 = 1; \dots$$

odnosno  $s_{2n} = 1$  i  $s_{2n+1} = 0$ . Za ovakav niz, koji ima dva konvergentna podniza, ali su granične vrednosti podnizova različite, znamo da divergira (odnosno, da nema graničnu vrednost). Zaključujemo da i dati brojni red divergira, ali uočavamo da u ovom slučaju nije reč o tome da red nema konačnu sumu, već da suma reda ne postoji (ne može da se odredi); vrednost sume sa svakim novim sabirkom osciluje između dve (konačne) vrednosti, 0 i 1.

Uočimo da u prethodnom primeru tri od pet navedenih brojnih redova imaju prvi član sa indeksom 1, a ne 0, kako je navedeno u uvodnom delu teksta i definiciji. Ovo je sasvim uobičajena situacija i često ćemo nailaziti na nju. Naglašavamo da se red može definisati tako da počinje članom čiji je indeks veći od 1, odnosno članom koji ima bilo koji konačan indeks. Kako je suštinska osobina reda ta da ima beskonačno mnogo članova (sabiraka), nije protivno definiciji red početi bilo kojim konačnim indeksom. Uočimo da u Primeru 5.1(a) nije od značaja da li je početni indeks 0 ili 1, red u oba slučaja ima iste članove; u Primeru 5.1(b) i (d) član sa indeksom 0 nije definisan i red zbog toga ne može početi od indeksa 0; u Primeru 5.1(c) dobijamo dva različita reda u zavisnosti od toga da li je prvi član sa indeksom 1 ili sa indeksom 0, pa ovde izbor postoji i ima uticaja na oblik reda i njegovu sumu.

U vezi sa ovim poslednjim zapažanjem treba imati na umu dve važne činjenice:

- Izostavljanje (dodavanje, menjanje) konačno mnogo članova reda ne utiče na konvergenciju reda - konvergentan red ostaje konvergentan, a divergentan ostaje divergentan. To je posledica činjenice da je zbir konačno mnogo sabiraka (koje eventualno dodajemo ili izostavljamo) konačan i da, sabran sa konačnom ili beskonačnom sumom preostalih beskonačno mnogo sabiraka ne utiče na prirodu (konvergenciju) reda.
- Izostavljanje (dodavanje, menjanje) konačno mnogo članova reda utiče na sumu reda, ukoliko je ta suma konačna. Ovo je sasvim prirodno, jer (konačna) suma reda zavisi od svih (beskonačno mnogo) sabiraka koje posmatramo u redu.

Uočimo još i da možemo da “pomeramo” indekse članova reda, a da ne menjamo red. Na primer, ukoliko želimo da red

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+5}{2^k}$$

napišemo tako da mu početni indeks, umesto 2, bude 0, a da elementi reda ostanu nepromenjeni, možemo uvesti smenu  $k - 2 = i$ , za koju važi da je  $i = 0$  za  $k = 2$ , pa dati red možemo zapisati u obliku

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+2)+5}{2^{i+2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i+7}{2^{i+2}}.$$

Ukoliko nam više odgovara da koristimo polazni indeks  $k$ , možemo ponovo uvesti smenu  $i = k$ , nakon čega dobijamo da je

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+5}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+7}{2^{k+2}} .$$

Ova mogućnost pomeranja indeksa će nam kasnije biti od koristi.

Osnovne operacije sa redovima su: množenje reda skalarom, sabiranje redova i množenje redova. Definišemo ih na sledeći način:

1. Za  $\alpha \in R$  je

$$\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k .$$

Pri tome, ukoliko je  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergentan, onda je i  $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergentan, i takođe, ako je prvi divergentan, takav je i drugi.

2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) .$$

Pri tome, zbir dva konvergentna reda je konvergentan red; zbir konvergentnog i divergentnog reda je divergentan; zbir dva divergentna reda može biti i konvergentan i divergentan. Primeri za poslednje tvrđenje su redovi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k$$

koji su divergentni, a takav im je i zbir  
odnosno redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k+1}$$

koji su divergentni, ali je njihov zbir  
 $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$  konvergentan.

3.

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k ,$$

gde je

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} .$$

O konvergenciji proizvoda redova se, u opštem slučaju, ne može ništa reći na osnovu saznanja o konvergenciji redova - činilaca.

Napomenućemo još i da važne osobine redova zavise od toga da li su im svi članovi pozitivni (istog znaka) ili posmatrani red sadrži beskonačno mnogo pozitivnih i beskonačno mnogo negativnih članova. (Još jednom napominjemo da konačno mnogo članova ne utiče na osobine reda, pa to važi i za konačno mnogo članova sa suprotnim predznakom od ostalih.) Ukoliko su svi članovi reda pozitivni, važi tvrđenje:

*Promenom redosleda sabiraka u konvergentnom pozitivnom redu čiji je zbir  $s$  dobija se konvergentan pozitivan red čiji je zbir takođe  $s$ .*

Mada nam se verovatno čini da ovo tvrđenje ni po čemu nije posebno, i da samo navodi osobinu komutativnosti za sabiranje, ispostavlja se da ono ipak nije sasvim trivijalno. Pokazaćemo uskoro da se na komutativnost sabiranja

ne možemo osloniti kada je reč o sumama beskonačno mnogo sabiraka, bar ne u slučaju kada red ima i pozitivne i negativne članove.

### 5.1.2 Kriterijumi konvergencije

Ukoliko smo u mogućnosti da odredimo sumu posmatranog reda, na osnovu toga svakako bez dvoumljenja možemo da odgovorimo na pitanje da li posmatrani red konvergira ili ne. Međutim, sumiranje reda nije uvek jednostavno. Sa druge strane, često nam nije potrebno da znamo sumu reda, već samo da utvrdimo da li ona postoji (kao konačna), odnosno da li posmatrani red konvergira. Kriterijumi konvergencije omogućavaju da analizom opšteg člana reda i utvrđivanjem da li on ispunjava neke određene uslove, zaključimo da li posmatrani red konvergira ili ne (a da pri tom ne odredimo njegovu sumu).

Navešemo (bez dokaza) nekoliko najčešće korišćenih kriterijuma konvergencije.

#### • Kriterijum divergencije

Za red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  sa opštim članom  $a_k$  uočavamo da je  $a_k = s_k - s_{k-1}$ . Ukoliko posmatrani red konvergira, i ima sumu  $s$ , važi i da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k - \lim_{k \rightarrow \infty} s_{k-1} = s - s = 0.$$

Navedeni zaključak predstavlja važan *potreban* (ali ne i dovoljan!) uslov konvergencije:

Ako red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergira, onda je  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Činjenica da navedeni uslov nije dovoljan za konvergenciju je već ilustrovana Primerom 5.1(b): opšti član posmatranog reda teži nuli, ali suma reda nije konačna, odnosno - red ne konvergira, jer niz parcijalnih suma ne konvergira.

Ovaj potreban uslov konvergencije pogodnije je koristiti u obliku

Ako  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$  onda red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ne konvergira.

Zbog prethodno navedenog, ovaj uslov se često zove i *kriterijum divergencije*.

Uobičajeno je, pri ispitivanju konvergencije nekog reda, proveriti prvo da li je ispunjeno da  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Ukoliko nije, ispitivanje je završeno, sa zaključkom da red divergira. Ukoliko opšti član reda teži nuli, *ne možemo ništa zaključiti o konvergenciji reda*, već nastavljamo dalja ispitivanja, koristeći neke od kriterijuma konvergencije koje navodimo u nastavku.

#### • Integralni kriterijum

Pretpostavimo da je funkcija  $f(x) : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  neprekidna, pozitivna i monotono opadajuća, i da je  $f(k) = a_k$ . Tada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergira} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergira.}$$

Ovaj kriterijum konvergencije nam omogućava da zaključak o konvergenciji reda donesemo na osnovu zaključka o konvergenciji odgovarajućeg nesvojstvenog integrala. Važno je uočiti da, u slučaju da red i integral konvergiraju, ne možemo zaključiti da konvergiraju ka istoj vrednosti (odnosno, da je suma reda jednaka vrednosti integrala). Napomenimo još i da donja granica integrala i prva vrednost indeksa sume moraju biti jednake, ali to može biti i neka druga vrednost, različita od 1.

**Primer 5.2.** Ispitati konvergenciju harmonijskog reda  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .

**Rešenje:** Uočimo da funkcija  $f(x) = \frac{1}{x}$  na intervalu  $[1, \infty)$  ispunjava sve uslove integralnog kriterijuma konvergencije. Posmatrajući nesvojstveni integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{1}{x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln T - \ln 1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln T = \infty$$

zaključujemo da on divergira. Tada, na osnovu integralnog kriterijuma, sledi da i red  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergira.

**Primer 5.3.** Ispitati konvergenciju hiper-harmonijskog reda  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ , za  $p \in \mathbb{R}$ .

**Rešenje:** Uočimo da funkcija  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  na intervalu  $[1, \infty)$  ispunjava sve uslove integralnog kriterijuma konvergencije. Posmatrajući nesvojstveni integral (za  $p \neq 1$ )

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{1}{x^p} dx \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \\ &= \begin{cases} \infty & \text{za } 1-p > 0 \\ \frac{1}{p-1} & \text{za } 1-p < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

i uzimajući u obzir zaključak prethodnog primera (slučaj  $p = 1$ ), konačno navodimo da za hiper-harmonijski red važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konvergira za } p > 1 \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ divergira za } p \leq 1.$$

### • Uporedni kriterijum 1

Ako za opšte članove  $a_k$  i  $b_k$  dva brojna reda,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  i  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , važi da je  $0 \leq a_k \leq b_k$  za sve vrednosti  $k$ , onda

Ako  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergira, onda i  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergira;

Ako  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergira, onda i  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergira.

### • Uporedni kriterijum 2

Ako za opšte članove  $a_k$  i  $b_k$  dva brojna reda,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  i  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , važi  $a_k \sim b_k$  za  $k \rightarrow \infty$ , onda

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergira ako i samo ako  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergira.

(Podsetimo se:  $a_k \sim b_k$  ukoliko je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ ,  $l \neq 0$ , i  $l \neq \infty$ .)

Uporedni kriterijumi nam omogućavaju da izvedemo zaključak o konvergenciji jednog reda, znajući da li neki drugi pogodno izabran red konvergira (ili divergira). Odmah je jasno da je pravilan izbor reda sa kojim upoređujemo posmatrani red od velikog značaja. Veoma često u uporednim kriterijumima se koriste hiper-harmonijski red (Primer 5.3), i geometrijski red (Primer 5.1(c)).

**Primer 5.4.** Ispitati konvergenciju reda  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k - k}$ .

**Rešenje:** Uočimo da važi

$$\frac{1}{3^k - k} \sim \frac{1}{3^k} = \left(\frac{1}{3}\right)^k, \quad \text{za } k \rightarrow \infty.$$

Kako za red  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$  znamo da konvergira, jer je to geometrijski red za koji je  $q = \frac{1}{3}$ , odnosno važi da je  $|q| < 1$ , na osnovu Upporednog kriterijuma 2 zaključujemo da i polazni red konvergira.

• **Dalamberov (količnički) kriterijum**

Ako za brojni red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  uvedemo oznaku da je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l$ , onda važi:

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergira}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergira}$$

$$l = 1 \Rightarrow \text{Dalamberov kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji/divergenciji posmatranog reda.}$$

**Primer 5.5.** Ispitati konvergenciju datih redova:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-10)^k}{4^{2k+1}(k+1)};$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k}.$$

**Rešenje:** Oblik opšteg člana datih redova sugerise da je pogodno pokušeti primeniti Dalamberov kriterijum za ispitivanje njihove konvergencije.

a) Opšti član ovog reda je  $a_k = \frac{(-10)^k}{4^{2k+1}(k+1)}$ , pa zaključujemo da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-10)^{k+1} 4^{2k+1} (k+1)}{(-10)^k 4^{2k+3} (k+2)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{10}{4^2} \frac{k+1}{k+2} = \frac{5}{8} < 1$$

odnosno, da dati red konvergira.

b) Opšti član ovog reda je  $a_k = \frac{k!}{5^k}$ , pa zaključujemo da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)! 5^n}{n! 5^{n+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{5} = \infty > 1,$$

a odatle zaključujemo da posmatrani red divergira.

• **Košijev (korenski) kriterijum**

Ako za brojni red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  uvedemo oznaku da je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l$ , onda važi:

$$l < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergira}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergira}$$

$$l = 1 \Rightarrow \text{Košijev kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji/divergenciji posmatranog reda .}$$

**Primer 5.6.** Ispitati konvergenciju datih redova:

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{k-1}{k+2} \right)^{k(k+1)} ;$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-12)^k}{k}.$$

**Rešenje:** Oblik opšteg člana datih redova sugerise da je pogodno pokušati primeniti Košijev kriterijum za ispitivanje njihove konvergencije.

a) Opšti član ovog reda je  $a_k = \left( \frac{k-1}{k+2} \right)^{k(k+1)}$ , pa zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left( \frac{k-1}{k+2} \right)^{k(k+1)}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{k-1}{k+2} \right)^{k+1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{-\frac{k+2}{3}} \right)^{\frac{-(k+2)}{3} \cdot \frac{3}{-(k+2)} (k+1)} \\ &= e^{\frac{3(k+1)}{-(k+2)}} = e^{-3} < 1 \end{aligned}$$

odnosno, da posmatrani red konvergira.

b) Opšti član ovog reda je  $a_k = \frac{(-12)^k}{k}$ , pa zaključujemo da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-12)^k}{k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{12}{\sqrt[k]{k}} = 12 > 1$$

odnosno, da posmatrani red divergira.

**Primer 5.7.** Ispitati konvergenciju reda  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ .

**Rešenje:** Konvergenciju harmonijskog reda smo već ispitivali i, koristeći integralni kriterijum, utvrdili da red divergira. Sada ćemo proveriti sa li se na ovaj zadatak jednako uspešno mogu primeniti i Košijev i Dalamberov kriterijum konvergencije.

Ako za posmatrani red, čiji je opšti član  $a_k = \frac{1}{k}$ , primenimo Dalamberov kriterijum, zaključujemo da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1,$$

a tada Dalamberov kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Ako na isti red primenimo Košijev kriterijum, zaključujemo da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k}} = 1,$$

pa ni ovaj kriterijum ne daje odgovor o konvergenciji.

Zaključujemo da je poznavanje više kriterijuma konvergencije često od koristi, jer nije moguće uvek uspešno primeniti svaki od njih, pa je dobar izbor kriterijuma od velikog značaja (naravno, kada više kriterijuma daje odgovor o konvergenciji istog reda, svi moraju dati isti odgovor!)

### 5.1.3 Alternativni redovi

Već smo naglasili da redovi mogu da imaju i pozitivne i negativne članove i da su nam, pored redova čiji su svi (ili skoro svi) članovi istog znaka, interesantni i oni redovi koji imaju beskonačno mnogo članova sa jednim i beskonačno mnogo članova sa drugim predznakom.

Primer jednog takvog reda je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Red čiji članovi naizmenično menjaju predznak naziva se *alternativni red*.

Za prethodno navedeni red smo napisali da je konvergentan i da mu je suma  $\ln 2$ . Ovo je rezultat koji u ovom trenutku prihvatamo bez dokaza. U nastavku ćemo se još vratiti na njega i dokazati da je navedena vrednost zaista suma posmatranog alternativnog reda.

Uočimo da navedeni red konvergira, ali da red  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergira (to je harmonijski red). Dakle, promenom znaka (nekim) članovima polaznog reda, tako da svi postanu pozitivni (što smo postigli posmatranjem apsolutne vrednosti opšteg člana) od konvergentnog reda dobili smo divergentan. U vezi sa navedenim, uvodimo sledeće dve definicije:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{apsolutno konvergira ako} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{konvergira.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{uslovno konvergira ako} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{konvergira, dok} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{divergira.}$$

Napomene:

- Ako red konvergira apsolutno, on konvergira i uslovno. Obrnuto ne mora da važi. Zbog toga često kažemo da je apsolutna konvergencija “jača” od uslovne.
- Ako red konvergira apsolutno, redosled članova ne utiče na konvergenciju, ni na sumu reda (za svaku promenu redosleda dobija se konvergentan red sa istom sumom).
- Suma apsolutno konvergentnog reda jednaka je zbiru sume (pod-)reda sa pozitivnim članovima i sume (pod-)reda sa negativnim članovima.
- Ukoliko red konvergira uslovno, njegova suma zavisi od redosleda njegovih članova.
- Interesantno je da se može dokazati da se članovi uslovno konvergentnog reda (ukoliko on ne konvergira i apsolutno) uvek mogu navesti u poretku koji je takav da suma posmatranog reda bude jednaka proizvoljnom unapred izabranom realnom broju.



Među redovima koji imaju i pozitivne i negativne članove posebno izdvajamo *alternativne redove*. Njihov opšti oblik je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k \quad \text{ili} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k .$$

Za ispitivanje uslovne konvergencije alternativnih redova možemo koristiti

### Lajbnicov kriterijum

Alternativni red  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$  (ili  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ ) uslovno konvergira ukoliko su istovremeno ispunjeni sledeći uslovi:

- $b_k \geq 0$ ;
- $b_k$  je monotono opadajući niz;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$ .

Važno je imati na umu da, ukoliko neki od uslova Lajbnicovog kriterijuma nije ispunjen, ovaj kriterijum ne daje nikakav odgovor o uslovnoj konvergenciji posmatranog reda (tj., ne možemo zaključiti da red divergira ako uslovi nisu ispunjeni). U tom slučaju konvergenciju moramo ispitivati na neki drugi način.

Napominjemo da za ispitivanje apsolutne konvergencije alternativnih redova možemo koristiti bilo koji od prethodno navedenih kriterijuma koji se odnose na redove sa pozitivnim članovima.

**Primer 5.8.** *Ispitati uslovnu i apsolutnu konvergenciju datih redova:*

- a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^p}$ , za  $p \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{k^2 + 5}$ .

### Rešenje:

a) Kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^p} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

hiper-harmonijski red za koji smo u Primeru 5.3 utvrdili da konvergira za  $p > 1$ , zaključujemo da posmatrani alternativni red apsolutno (a samim tim i uslovno) konvergira za  $p > 1$ . Za vrednosti  $p \leq 1$  hiper-harmonijski red divergira, pa posmatrani alternativni red za  $p \leq 1$  ne konvergira apsolutno. Ostaje da utvrdimo da li za  $p \leq 1$  dati alternativni red konvergira uslovno.

Kako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^p} = \begin{cases} 0, & p > 0 \\ \infty, & p < 0 \\ 1, & p = 0 \end{cases}$$

na osnovu Lajbnicovog kriterijuma utvrđujemo da posmatrani alternativni red uslovno konvergira za  $p > 0$ , odnosno (s obzirom na prethodne zaključke o apsolutnoj konvergenciji), za  $p \in (0, 1]$ .

Za vrednosti  $p \leq 0$  Lajbnicov kriterijum nam ne daje odgovor o konvergenciji, jer uslovi nisu ispunjeni. Međutim, kako je za  $p \leq 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k^p} \neq 0 ,$$

na osnovu Kriterijuma o divergenciji zaključujemo da posmatrani alternativni red za  $p \leq 0$  divergira.

b)

## 5.2 Stepeni redovi

Ukoliko umesto beskonačne sume brojeva posmatramo beskonačnu sumu funkcija

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

definisali smo *funkcionalni* red. Ovaj red je definisan za svaku vrednost  $x$  za koju su definisane sve funkcije  $f_k$ . Za svaku konkretnu vrednost promenljive,  $x = x_0$ , funkcionalni red  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$  predstavlja jedan brojni red, koji može da konvergira, ili divergira. Jasno je da konvergencija funkcionalnog reda u opštem slučaju zavisi od vrednosti promenljive  $x$ . Skup svih vrednosti promenljive  $x$  za koje posmatrani funkcionalni red konvergira naziva se *interval konvergencije*.

Analogno kao za brojne redove, i za funkcionalne redove definišemo  $n$ -tu parcijalnu sumu,  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , kao i sumu reda  $s(x)$ , kao graničnu vrednost niza parcijalnih suma:

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Primer funkcionalnog reda sa kojim smo se već susreli je geometrijski red. Uz oznaku  $q = x$ , možemo napisati da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x},$$

za  $|x| < 1$ . Znamo da za ostale vrednosti  $x$  geometrijski red divergira.

Geometrijski red je jedan primer specijalne vrste funkcionalnih redova kojima ćemo posvetiti malo više pažnje. Ti redovi nazivaju se *stepeni redovi*.

Opšti oblik stepenog reda je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-a)^k, \quad \text{za } a, a_k \in \mathbb{R}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Realni brojevi  $a_k$  nazivaju se *koeficijenti stepenog reda*.

Radi pojednostavljivanja zapisa, a bez umanjenja opštosti, često ćemo posmatrati slučaj kada je  $a = 0$ , a stepeni red je oblika

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Uočavamo da su stepeni redovi definisani za sve vrednosti  $x \in \mathbb{R}$ . U nastavku ćemo se malo detaljnije pozabaviti određivanjem oblasti njihove konvergencije, a zatim i ispitati neke od njihovih brojnih korisnih osobina.

### 5.2.1 Poluprečnik konvergencije i interval konvergencije

U određivanju oblasti (intervala) konvergencije stepenog reda veliku pomoć nam pruža sledeće tvrđenje, koje navodimo bez dokaza:

**Teorema 5.1.** (Abelova teorema) *Ako stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  konvergira za  $x = x_0$ , onda on konvergira i za sve vrednosti  $x$  za koje je  $|x| < |x_0|$ .*

*Ako stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  divergira za  $x = x_0$ , onda on divergira i za sve vrednosti  $x$  za koje je  $|x| > |x_0|$ .*

Na osnovu prethodnog tvrđenja je jasno da postoji realna vrednost  $R$  koja je takva da stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  konvergira za svako  $x \in (-R, R)$ , a da divergira za  $|x| > R$ . Broj  $R$  naziva se *poluprečnik konvergencije*, a interval  $(-R, R)$  *interval* ili *oblast konvergencije* stepenog reda  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ .

Napomene:

- Na osnovu prethodno navedenih razmatranja ne možemo utvrditi da li posmatrani stepeni red konvergira u tačkama  $x = R$  i  $x = -R$ , odnosno na rubovima intervala konvergencije. Konvergenciju u ovim tačkama utvrđujemo dodatnim ispitivanjem koje podrazumeva da posmatramo brojne redove  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k R^k$  i  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (-1)^k R^k$ . Konvergenciju ovih redova utvrđujemo korišćenjem nekih od kriterijuma navedenih za brojne redove. Uočimo da za  $x = -R$  stepeni red postaje alternativni red.

- Ukoliko posmatramo stepeni red oblika  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - a)^k$ , možemo uvesti smenu  $x - a = t$  i ispitati red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ . Uočimo da je u ovom slučaju, za red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - a)^k$  čiji je poluprečnik konvergencije  $R$ , odgovarajući interval konvergencije  $(a - R, a + R)$ .

Sledeće važno pitanje je kako odrediti poluprečnik konvergencije  $R$  za dati stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ . Uočimo da i na stepeni red možemo primeniti Košijev i (ili) Dalamberov kriterijum za konvergenciju (brojnih) redova, i konstatovati da

- (Košijev kriterijum) stepeni red konvergira ukoliko je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1$  i divergira ukoliko je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1$ . To dalje znači da je poluprečnik konvergencije ovog reda ona vrednost  $x = R$  za koju je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |x| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} R = 1 ;$$

- (Dalamberov kriterijum) stepeni red konvergira ukoliko je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| < 1$  i divergira ukoliko je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| > 1$ . To dalje znači da je poluprečnik konvergencije ovog reda ona vrednost  $x = R$  za koju je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} x \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| R = 1 .$$

Prethodnim je dokazano tvrđenje koje nam omogućava da za dati stepeni red izračunamo poluprečnik konvergencije:

**Teorema 5.2.** (Teorema Koši-Adamara) Poluprečnik konvergencije stepenog reda  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  je broj  $R$  za koji važi:

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \text{ili} \quad R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} .$$

Ukoliko je  $R = \infty$ , posmatrani stepeni red konvergira za svaki realan broj  $x$ , a ukoliko je  $R = 0$ , stepeni red konvergira samo za  $x = 0$ . U slučaju da posmatramo stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - a)^k$ , poluprečnik konvergencije  $R = 0$  implicira da red konvergira samo za  $x = a$ .

Ilustrovaćemo Teoremu Koši-Adamara na nekoliko primera.

**Primer 5.9.** Odrediti oblast konvergencije za sledeće stepene redove:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k;$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + (-2)^k}{k} (x+1)^k.$$

**Rešenje:** U svakom od navedenih primera ćemo prvo primenom Teoreme Koši-Adamara odrediti poluprečnik konvergencije, a zatim ispitati konvergenciju stepenih redova u rubnim tačkama intervala konvergencije koristeći neki pogodno izabran kriterijum konvergencije brojnih redova.

a)

b) Za dati stepeni red je  $a_k = \frac{1}{k!}$ , pa je

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty.$$

To znači da posmatrani red konvergira za svako  $x \in \mathbb{R}$ .

c)

## 5.2.2 Osobine stepenih redova

Stepeni red  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$  na svakom zatvorenom intervalu  $I$  koji je sadržan u oblasti konvergencije reda ima neke veoma korisne osobine. Navešćemo nekoliko najvažnijih.

- Suma stepenog reda  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  je neprekidna funkcija za svako  $x \in I$ .

- $\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$ .

Poluprečnik konvergencije  $R$  zbira jednak je minimumu poluprečnika  $R_1, R_2$  sabiraka.

- Na intervalu  $I$  stepeni red može se integraliti “član po član”:

$$\int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^x a_k t^k dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^{k+1}}{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Poluprečnik konvergencije reda dobijenog integraljenjem jednak je poluprečniku konvergencije polaznog stepenog reda.

- Na intervalu  $I$  stepeni red može se diferencirati “član po član”:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Poluprečnik konvergencije reda dobijenog diferenciranjem jednak je poluprečniku konvergencije polaznog stepenog reda.

Navedene osobine možemo iskoristiti kada želimo da odredimo sumu nekog stepenog reda ili kada želimo da odredimo razvoj neke funkcije u stepeni red. Ovakvo “uspostavljanje veze” između stepenog reda i funkcije (koja predstavlja njegovu sumu) za vrednosti promenljive  $x$  iz intervala konvergencije je veoma važno u primeni redova. Na taj način možemo, ukoliko nam to odgovara, umesto neke funkcije koristiti njen razvoj u red, a sa takvim zapisom funkcije i mogućnost relativno jednostavnog diferenciranja, integraljenja, itd.

**Primer 5.10.** *Odrediti sumu reda  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ .*

**Rešenje:** Prvo ćemo odrediti poluprečnik konvergencije datog reda. Na taj način dobijamo oblast u kojoj će red konvergirati ka funkciji koju odredimo kao sumu reda, odnosno dobijamo vrednosti  $x$  za koje će rezultat koji dobijemo imati smisla.

Kako je

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = 1,$$

zaključujemo da posmatrani red konvergira za  $x \in (-1, 1)$ . Dalje, ispitujemo konvergenciju u rubnim tačkama intervala konvergencije.

Uvrštavanjem vrednosti  $x = 1$  u posmatrani red, dobijamo brojni red  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$ , za koji znamo da konvergira (na osnovu Lajbnicovog kriterijuma).

Uvrštavanjem vrednosti  $x = -1$  u polazni red dobijamo brojni red  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ , za koji znamo da divergira (harmonijski red).

Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da je oblast konvergencije posmatranog reda  $(-1, 1]$ .

Dalje, uočimo da je

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1} dt,$$

pa je

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1} dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot t^{k-1} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= \ln|1+t| \Big|_0^x = \ln(x+1). \end{aligned}$$

Koristili smo da za geometrijski red važi da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \frac{1}{1-(-t)}$$

za  $-t \in (-1, 1)$ , tj, za  $t \in (-1, 1)$ .

Konačno, imamo da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1].$$

Uočimo da odatle sledi i rezultat koji smo naveli kada smo govorili o alternativnim redovima i naveli primer:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln(1+1) = \ln 2$$

jer je navedeni brojni red onaj koji dobijamo kao vrednost posmatranog stepenog reda za  $x = 1$ .

**Primer 5.11.** Predstaviti u obliku stepenog reda sledeće funkcije:

a)  $f(x) = \arctg x$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ ;

c)  $f(x) = \ln(5-x)$ .

**Rešenje:**

a) Kako je

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k},$$

zaključujemo da je

$$f(x) = \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \Big|_0^x,$$

odnosno da je

$$\arctg x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Uočimo da navedeni razvoj konvergira za  $|-x^2| = |x|^2 \in (-1, 1)$ , odnosno za  $x \in (-1, 1)$ .

b) Ponovo se oslanjamo na mogućnost diferenciranja stepenog reda član po član, i onoga što znamo o geometrijskom redu, i dobijamo

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}.$$

Ovaj razvoj važi za  $x \in (-1, 1)$ .

c) U ovom primeru koristimo mogućnost integraljenja reda član po član. Uočimo prvo da je

$$\int_0^x \frac{dt}{5-t} = \ln 5 - \ln |5-x|.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \ln(5-x) &= - \int_0^x \frac{dt}{5-t} + \ln 5 \\ &= \ln 5 - \frac{1}{5} \int_0^x \frac{dt}{1-\frac{t}{5}} \\ &= \ln 5 - \frac{1}{5} \int_0^x \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t}{5} \right)^k \right) dt \\ &= \ln 5 - \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^k}{5^k} dt \\ &= \ln 5 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{5^{k+1}} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\ln(5-x) = \ln 5 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)5^{k+1}},$$

a ovaj razvoj važi za  $\frac{t}{5} \in (-1, 1)$ , odnosno  $x \in (-5, 5)$ .

Važno tvrđenje je formulisano narednom teoremom:

**Teorema 5.3.** (Teorema o jednakosti stepenih redova) Za dva stepena reda,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  i  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ , čiji su poluprečnici konvergencije, redom,  $R_1$  i  $R_2$ , važi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \Leftrightarrow \quad a_k = b_k$$

za  $k = 0, 1, 2, \dots$ , i  $x \in (-R, R)$ , pri čemu je  $R = \min\{R_1, R_2\}$ .

**Dokaz:** Ukoliko su  $a_k = b_k$  za sve vrednosti  $k = 0, 1, 2, \dots$ , jasno je da je  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ . Drugim rečima, iz jednakosti svih odgovarajućih koeficijenata sledi i jednakost stepenih redova.

Da bismo dokazali suprotan smer tvrđenja, pretpostavimo da su posmatrani stepeni redovi identički jednaki i pokažimo da su im tada odgovarajući koeficijenti jednaki.

Formirajmo razliku posmatranih redova, za  $x \in (-R, R)$ . Ta razlika (funkcija  $\varphi$ ) je identički jednaka nuli, s obzirom da su redovi identički jednaki:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k) x^k \equiv 0,$$

odnosno

$$\varphi(x) = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + (a_3 - b_3)x^3 + \dots \equiv 0.$$

S obzirom da  $x = 0$  pripada intervalu konvergencije  $(-R, R)$ , uvrštavanjem  $x = 0$  u prethodni izraz dobijamo da u toj tački važi:

$$\varphi(0) = a_0 - b_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = b_0.$$

Tada je

$$\varphi(x) = (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + (a_3 - b_3)x^3 + \dots \equiv 0.$$

Nad intervalom konvergencije stepeni red možemo diferencirati član po član, pa dobijamo:

$$\varphi'(x) = (a_1 - b_1) + 2(a_2 - b_2)x + 3(a_3 - b_3)x^2 + \dots \equiv 0,$$

a slično kao gore, uvrštavanjem  $x = 0$  u izvodnu funkciju, imamo

$$\varphi'(0) = a_1 - b_1 = 0.$$

Dakle, mora biti  $a_1 = b_1$ .

Daljim uzastopnim diferenciranjem funkcije  $\varphi$  i posmatranjem vrednosti izvoda za  $x = 0$ , dobijamo da za sve koeficijente važi

$$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dakle, dokazali smo da se funkcija na samo jedan način može prikazati u obliku stepenog reda.

### 5.2.3 Tejlorov i Maklorenov razvoj funkcije u red

Preostalo veoma važno pitanje na koje treba da damo odgovor je: kada i kako se neka funkcija može prikazati u obliku stepenog reda. Dakle, pretpostavimo da stepeni red  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$  konvergira ka nekoj funkciji  $f(x)$ , za  $x \in (a-R, a+R)$ . Želimo da utvrdimo kako se koeficijenti stepenog reda mogu odrediti na osnovu funkcije  $f$ .

Dakle

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + a_4(x-a)^4 + \dots,$$

a diferenciranjem (član po član, što možemo da uradimo unutar intervala konvergencije), dobijamo da važe i jednakosti

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \dots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + 4 \cdot 3a_4(x-a)^2 + \dots, \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-a) + \dots, \end{aligned}$$

itd.

Kako tačka  $x = a$  pripada intervalu konvergencije  $(a - R, a + R)$ , u toj tački prethodne jednakosti imaju oblik

$$f(a) = a_0, \quad f'(a) = a_1, \quad f''(a) = 2a_2, \quad f'''(a) = 3 \cdot 2a_3, \dots$$

odnosno

$$a_0 = f(a), \quad a_1 = \frac{f'(a)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \dots$$

ili, u opštem obliku

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ako sada uvrstimo dobijene koeficijente stepenog reda koji predstavlja *razvoj funkcije*  $f(x)$  u red, dobijamo da je

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots$$

ili

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Ovaj red predstavlja *Tejlorov red* funkcije  $f(x)$  u okolini tačke  $a$ . Ovo je i jedini stepeni red, po stepenima od  $(x-a)$  koji na intervalu  $(a-R, a+R)$  konvergira ka funkciji  $f(x)$ . Ako se funkcija  $f$  u okolini tačke  $a$  može razviti u Tejlorov red koji konvergira na nekom intervalu  $(a-R, a+R)$  za  $R > 0$ , kažemo da je  $f$  analitička funkcija u tački  $a$ .

Teško da nam može promaći sličnost (jednakost) koeficijenata Tejlorovog reda funkcije  $f$  u tački  $a$  sa koeficijentima Tejlorovog polinoma funkcije  $f$  u okolini iste tačke. U stvari, Tejlorov polinom je samo "konačan deo" Tejlorovog reda, koji koristimo kada u praksi želimo da aproksimiramo funkciju odgovarajućim polinomom. Kada smo pričali o Tejlorovom polinomu, napomenuli smo da se greška aproksimacije funkcije polinomom smanjuje ukoliko povećamo stepen (broj članova) polinoma. Dakle, ukoliko koristimo beskonačno mnogo članova polinoma, odnosno - Tejlorov red funkcije - možemo funkciju prikazati tačno, bez bilo kakve greške aproksimacije. Naravno, jednakost funkcije i reda važi samo na intervalu konvergencije - van njega red divergira i njegova suma ne postoji, pa se ne može poistovetiti sa vrednostima funkcije. Sa druge strane, Tejlorov polinom uvek možemo izračunati i njegova vrednost će uvek biti konačna. Međutim, u opštem slučaju ta vrednost je samo približna vrednost odgovarajuće posmatrane funkcije  $f$ .

Ukoliko je  $a = 0$ , Tejlorov red funkcije  $f$  ima oblik

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Ovaj stepeni red (Tejlorov red u okolini tačke 0) nazivamo *Maklorenov red* funkcije  $f$ .

Do sada smo već izveli Maklorenov red za neke funkcije. Tačnije, naveli smo kako se te funkcije mogu prikazati u obliku stepenog reda, a na osnovu tvrdjenja o jedinstvenosti razvoja u stepeni red i oblika samog razvoja, zaključujemo da su dobijeni stepeni redovi upravo Maklorenovi razvoji posmatranih funkcija. To su

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k, & x \in (-1, 1) \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}, & x \in (-1, 1] \\ \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}, & x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

**Primer 5.12.** Napisati Maklorenov razvoj funkcije  $f(x) = e^x$  i odrediti za koje vrednosti  $x$  red konvergira.



**Rešenje:** Kako važi da je

$$f^{(k)}(x) = e^x, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a odatle i

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dobijamo da je

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda je

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)!}{k!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty,$$

što znači da navedeni razvoj važi za svako  $x \in \mathbb{R}$ .

**Primer 5.13.** Napisati Maklorenov razvoj funkcije  $f(x) = \sin x$  i odrediti za koje vrednosti  $x$  red konvergira.

**Rešenje:** Izvodi funkcije  $f(x) = \sin x$  su redom

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x,$$

itd., a za njihove vrednosti u  $x = 0$  dobijamo

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tada je

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Poluprečnik konvergencije ovog reda, za koji je  $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$  je

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+2)(2k+3) = \infty,$$

što znači da navedeni razvoj važi za svako  $x \in \mathbb{R}$ .

**Primer 5.14.** Napisati Maklorenov razvoj funkcije  $f(x) = \cos x$  i odrediti za koje vrednosti  $x$  red konvergira.

**Rešenje:** Razvoj funkcije  $f(x) = \cos x$  izvešćemo diferenciranjem razvoja funkcije  $\sin x$ . Uočimo odmah da će poluprečnik konvergencije za razvoj funkcije  $\cos x$  tada biti isti kao za  $\sin x$ , odnosno, dobijeni Maklorenov red će konvergirati za svaku vrednost  $x \in \mathbb{R}$ .

Dakle,

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} x^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}. \end{aligned}$$

## 6 Laplasova transformacija

Metodama za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina prvog i višeg reda bavili smo se u okviru kursa iz Matematičke analize 1. Ovoj značajnoj i, u opštem slučaju, nimalo jednostavnoj temi pristupa se na različite načine koji uključuju različite metode rešavanja. Jedna od važnih primena stepenih redova je upravo njihovo korišćenje pri rešavanju diferencijalnih jednačina: funkcije koje se u jednačinama pojavljuju predstavljamo, kada je to moguće, odgovarajućim stepenim redovima, i rešenje dobijamo u obliku stepenog reda. Ovu primenu, međutim, nećemo ilustrovati niti dalje analizirati. Umesto toga, u ovom odeljku ćemo opisati postupak kojim se diferencijalne jednačine rešavaju tako što se pogodnom transformacijom prevedu u algebarske, reše, a zatim se dobijeno rešenje algebarske jednačine inverznom transformacijom prevodi u rešenje polazne diferencijalne jednačine. Transformacija koju za to koristimo zove se *Laplasova transformacija*. U nastavku ćemo definisati ovu transformaciju, navesti neke njene osobine i na nekoliko primera pokazati kako se ova transformacija primenjuje.

### 6.1 Motivacija i definicija

U prethodnom delu, posvećenom stepenim redovima, smo pokazali da za pojedine funkcije na odgovarajućem intervalu možemo uspostaviti vezu (jednakost) između funkcije i stepenog reda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A(x), \quad \text{za } x \in I,$$

gde smo ovog puta sa  $A(x)$  označili funkciju (koju smo uobičajeno označavali sa  $f(x)$ ), a sa  $I$ , kao i do sada, oblast konvergencije stepenog reda.

Uočimo da se koeficijenti stepenog reda dobijaju kao vrednosti funkcije definisane nad skupom prirodnih brojeva, jer je  $a_k = a(k)$  pravilo preslikavanja definisano za prirodne brojeve  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Preslikavanja skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva smo zvali realnim nizovima. Uspostavljanjem veze između stepenog reda čiji su koeficijenti  $a(k)$  i funkcije  $A(x)$  koja predstavlja sumu posmatranog reda, uspostavljeno je preslikavanje

$$a(k) \mapsto A(x)$$

odnosno korespondencija između diskretnih funkcija  $a(k)$  i neprekidnih funkcija  $A(x)$ .

Na primer, za geometrijski red važi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1.$$

Ovde je  $a_k = a(k) = 1$ , za sve vrednosti  $k = 0, 1, \dots$ , a uspostavljeno je preslikavanje

$$a(k) = 1 \mapsto A(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{za } |x| < 1.$$

Takođe, za eksponencijalnu funkciju je

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad x \in \mathbb{R},$$

odnosno, uspostavljeno je preslikavanje

$$a(k) = \frac{1}{k!} \quad \mapsto \quad A(x) = e^x, \quad \text{za } x \in \mathbb{R}.$$

Konačno, u opštem slučaju, kako važi da je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad x \in I,$$

uspostavljeno je preslikavanje

$$a(k) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \mapsto \quad A(x) = f(x), \quad \text{za } x \in I.$$

Značaj prethodnog zapažanja je u tome što uspostavlja vezu između dve funkcije; jedna je diskretna, a druga neprekidna. Ono što želimo je da ovu korespondenciju između funkcija dalje uopštimo i da pri tome izbegnemo ograničenje na korišćenje diskretnih funkcija, tj. koeficijenata  $a(k)$  stepenog reda. Sa tim ciljem vršimo nekoliko uopštenja i modifikacija uspostavljenog preslikavanja:

1. Umesto diskretne promenljive  $k$ , koja uzima vrednosti  $k = 0, 1, 2, \dots$ , koristićemo neprekidnu promenljivu  $t$  koja će uzimati vrednosti iz intervala  $[0, \infty)$ .
2. Prelaskom sa diskretne promenljive na neprekidnu prirodno prelazimo i sa sume na integral:

$$\text{umesto } \sum_{k=0}^{\infty} a(k)x^k \quad \text{koristimo } \int_0^{\infty} a(t)x^t dt.$$

3. Obezbeđujemo uslove za osnovu stepena,  $x$ :

- Prvo, ograničavamo vrednosti  $x$ , kao osnove stepena, i posmatramo  $x \in (0, 1)$ . Ovim smo obezbedili neprekidnost eksponencijalne funkcije  $x^t$ , i istovremeno ograničili vrednosti ove funkcije što je, intuitivno, neophodno za mogućnost da posmatrani integral konvergira.
- Koristimo zapis  $x = e^{\ln x}$ , a odatle i  $x^t = (e^{\ln x})^t$ . Za  $x \in (0, 1)$  je  $\ln x \in (-\infty, 0)$ . Uvešćemo smenu  $\ln x = -s$ , a tada  $s \in (0, \infty)$ . Nakon uvođenja ove smene, važi da je  $x^t = e^{-st}$ , za  $s > 0$ .
- Prilagodićemo oznake za “parove” odgovarajućih funkcija: (neprekidnu) funkciju “original” označićemo sa  $f(t)$ . Funkciju - “sliku” koja je odgovarajuća funkciji  $f(t)$  označićemo sa  $F(x)$  (u “diskretnoj verziji” ovaj par je bio  $a(k) \mapsto A(x)$ ). Konačno, uzimajući u obzir smene koje smo uveli u vezi sa promenljivom  $x$ , funkcija koju posmatramo je funkcija  $F(s)$ .

Nakon svih navedenih prilagođavanja možemo konačno napisati vezu između neprekidnih funkcija  $f(t)$  i  $F(s)$ , za  $s > 0$ :

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Na ovaj način smo definisali *transformaciju* funkcije  $f(t)$  u funkciju  $F(s)$  - uočimo da pri transformaciji funkcije dolazi i do promene promenljive. Ova transformacija naziva se *Laplasova transformacija* i možemo je smatrati neprekidnim analogonom razvoja funkcije u stepeni red.

Laplasova transformacija zasniva se na nesvojstvenom integralu (integral je definisan na beskonačnom intervalu integracije, a u opštem slučaju, u zavisnosti od ponašanja funkcije  $f(t)$  za  $t = 0$ , nesvojstvenost se može pojaviti i u donjoj granici integracije). S obzirom da nesvojstveni integral može da konvergira, ili da divergira, Laplasova transformacija funkcije  $f(t)$  može da postoji (ako odgovarajući nesvojstveni integral konvergira), ili da ne postoji (ukoliko odgovarajući nesvojstveni integral divergira). Važno pitanje *egzistencije* Laplasove transformacije  $F(s)$  za datu funkciju  $f(t)$  ćemo u sledećem odeljku malo detaljnije razmotriti. Pre toga ćemo navesti nekoliko ilustrativnih primera kojima ćemo odrediti Laplasovu transformaciju nekih funkcija i izvesti nekoliko osobina Laplasove transformacije.

## 6.2 Primeri Laplasove transformacije i osnovne osobine. Egzistencija Laplasove transformacije

Lako je zaključiti, oslanjajući se na osobinu linearnosti integrala, da Laplasova transformacija ima sledeća svojstva:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} &= \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}; \\ \mathcal{L}\{cf(t)\} &= c\mathcal{L}\{f(t)\},\end{aligned}$$

pri pretpostavci da Laplasove transformacije  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  i  $\mathcal{L}\{g(t)\}$  funkcija  $f(t)$  i  $g(t)$  postoje, i da je  $c \in \mathbb{R}$ .

Ove osobine potvrđujemo koristeći definiciju Laplasove transformacije:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} &= \int_0^\infty (f(t) + g(t))e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt + \int_0^\infty g(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}; \\ \mathcal{L}\{cf(t)\} &= \int_0^\infty cf(t)e^{-st} dt = c \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = c\mathcal{L}\{f(t)\}.\end{aligned}$$

**Primer 6.1.** *Odrediti Laplasovu transformaciju sledećih funkcija:*

$$a) f(t) = 0, \quad b) f(t) = c, \quad c) f(t) = e^{at}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad d) H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

**Rešenje:** Koristićemo definiciju Laplasove transformacije:

a)

$$\mathcal{L}\{0\} = \int_0^\infty 0 \cdot e^{-st} dt = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c\} &= \int_0^\infty c \cdot e^{-st} dt = c \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt \\ &= c \lim_{T \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^T \right) = -\frac{c}{s} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} + \frac{c}{s} e^0 = \frac{c}{s},\end{aligned}$$

uz uslov da je  $s > 0$ , jer je tada  $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = 0$ .

Uočimo da je, na osnovu navedenog,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}.$$

c)

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a},$$

uz uslov da je  $s > a$ . Izračunavanje integrala je analogno primeru (b).

d) Funkcija  $H(t)$  je poznata kao Hevisajdova funkcija.

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^\infty H(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

**Primer 6.2.** *Pretpostavljajući da je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , odrediti sledeće Laplasove transformacije:*

$$a) \mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}, \quad b) \mathcal{L}\{f(at)\}, \quad c) \mathcal{L}\{H(t-a) \cdot f(t-a)\}.$$

**Rešenje:**

a)

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(s-a)t} dt = F(s-a),$$

uz uslov da je  $s > a$ .

Uočimo da na osnovu ovog rezultata i činjenice da je  $\mathcal{L}\{1\} = F(s) = \frac{1}{s}$  možemo zaključiti da je  $\mathcal{L}\{e^{at}\} = F(s-a) = \frac{1}{s-a}$ , i time potvrditi rezultat koji smo izveli u prethodnom primeru.

b)

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(m)e^{-\frac{s}{a}m} dm = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

uz pretpostavku da je  $s > 0$ . Pri rešavanju integrala koristili smo smenu  $at = m$ ,  $a dt = dm$ .

c) Uočimo da za je

$$H(t-a) \cdot f(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t-a) \cdot f(t-a)\} &= \int_0^{\infty} H(t-a) \cdot f(t-a)e^{-st} dt = \int_{-a}^{\infty} H(m) \cdot f(m)e^{-s(m+a)} dm \\ &= \int_0^{\infty} f(m)e^{-s(m+a)} dm = e^{-sa} \int_0^{\infty} f(m)e^{-sm} dm \\ &= e^{-sa} F(s), \end{aligned}$$

gde smo koristili smenu  $t-a = m$ ,  $dt = dm$ , kao i da je  $\int_{-a}^0 H(m) \cdot f(m)e^{-s(m+a)} dm = 0$ .

**Primer 6.3.** Odrediti sledeće Laplasove transformacije:

$$a) \mathcal{L}\{t\}, \quad b) \mathcal{L}\{te^{at}\}, \quad c) \mathcal{L}\{t^n\}.$$

**Rešenje:**

a) Koristeći definiciju dobijamo (za  $s > 0$ ),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t\} &= \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( -\frac{t}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^T + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{s} e^{-sT} \right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Koristili smo parcijalnu integraciju za rešavanje polaznog integrala, a zatim i već izračunatu vrednost integrala  $\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}$ . Takođe, koristili smo Lopitalovo pravilo da bismo odredili da je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{s} e^{-sT} \right) = \frac{1}{s} \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{T}{e^{sT}} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{se^{sT}} \right) = 0.$$

b) Koristeći prethodni rezultat i Primer 6.2(a), dobijamo da je

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

c) Primenom definicije, uzastopnom primenom parcijalne integracije i uzastopnom primenom Lopitalovog pravila dobijamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( -\frac{t^n}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^T + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} \\ &= \frac{n(n-1)}{s^2} \int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-st} dt = \frac{n(n-1)}{s^2} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \dots \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \dots 1}{s^n} \mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

**Primer 6.4.** Odrediti Laplasovu transformaciju sledećih funkcija:

$$a) f(t) = \cos at, \quad b) f(t) = \sin at, \quad c) f(t) = e^{bt} \cos at, \quad d) f(t) = e^{bt} \sin at.$$

**Rešenje:** Uočimo prvo da se osobina Laplasove transformacije koju smo izveli u Primeru 6.2(a) može uopštiti, odnosno da se može pokazati da važi

$$\mathcal{L}\{e^{(a+bi)t} f(t)\} = F(s - (a + bi)),$$

pod pretpostavkom da je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  i da je  $a + bi$  kompleksan broj.

Jasno je da ovim obuhvatamo i izraz

$$\mathcal{L}\{e^{(a+bi)t}\} = \int_0^\infty e^{(a+bi)t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-(a+bi))t} dt = \frac{1}{s - (a + bi)}.$$

Dalje, koristeći Ojlerove formule

$$\cos at = \frac{e^{ati} + e^{-ati}}{2}, \quad \sin at = \frac{e^{ati} - e^{-ati}}{2i},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos at\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ati} + e^{-ati}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}\{e^{ati}\} + \mathcal{L}\{e^{-ati}\} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - ai} + \frac{1}{s + ai} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \end{aligned}$$

a analogno i

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Ovim smo odgovorili na pitanja (a) i (b).

Odgovore na pitanja (c) i (d) dobijamo koristeći (a) i (b), kao i osobinu iz Primera 6.2(a):

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \cos at\} = F(s - b) = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$$

za  $\mathcal{L}\{\cos at\} = F(s)$ , i analogno

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \sin at\} = \frac{a}{(s - b)^2 + a^2}.$$

Sve Laplasove transformacije koje smo odredili u prethodnim primerima uobičajeno čine deo *Tablice Laplasovih transformacija*:

Ostaje još da utvrdimo pod kojim uslovom postoji Laplasova transformacija neke funkcije. S obzirom da je transformacija definisana preko nesvojstvenog integrala, intuitivno je jasno da podintegralna funkcija na beskonačnom intervalu na kom je integralimo ne sme da bude “suviše velika”. Kako je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ , a važi da je  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ , jasno je da se ova primedba o ograničenom rastu, koji je, intuitivno, neophodan uslov za konvergenciju integrala, odnosi na funkciju  $f(t)$ .

Uverili smo se, direktnim izračunavanjem, da Laplasova transformacija postoji bar za nekoliko funkcija koje smo posmatrali u prethodnim primerima. Sa druge strane, može se pokazati da Laplasova transformacija funkcije  $f(t) = e^{t^2}$  ne postoji, jer nesvojstveni integral  $\int_0^\infty e^{t^2} e^{-st} dt$  divergira.

Da bismo preciznije formulisali uslov pod kojim za funkciju  $f(t)$  postoji Laplasova transformacija, uočimo klasu funkcija  $f(t)$  za koju važi da postoje konstante  $M$ ,  $K$  i  $T$  takve da je

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}, \quad \text{za } t \geq T.$$

Za ovakve funkcije kažemo da su *eksponencijalnog rasta reda  $K$* .

Može se pokazati da važi da za klasu funkcija eksponencijalnog rasta postoji Laplasova transformacija, pod uslovom da se “dovoljno lepo ponašaju” za  $t = 0$ . Drugim rečima, ako je  $f(t)$  funkcija koja je integrabilna na

intervalu  $[0, b]$  za svako  $b > 0$  i ako je  $f(t)$  eksponencijalnog rasta, tj.  $|f(t)| \leq Me^{Kt}$  za neke konstante  $K, M$ , i neko  $t > T$ , onda postoji  $\mathcal{L}\{f(t)\}$ .

Napominjemo da je važno imati na umu da za mnoge funkcije ne postoji Laplasova transformacija, kao i da je dobro znati pod kojim uslovima (tj. za kakve funkcije) ova transformacija postoji. Ipak, u nastavku ćemo nailaziti samo na funkcije koje imaju Laplasovu transformaciju (tačnije, uglavnom ćemo se služiti Tablicom Laplasovih transformacija) i nećemo eksplicitno proveravati navedeni uslov egzistencije.

### 6.3 Inverzna Laplasova transformacija

Može se pokazati da se Laplasove transformacije dveju različitih neprekidnih funkcija uvek razlikuju, što nam omogućava da definišemo *inverznu Laplasovu transformaciju*. Ukoliko je  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , onda je  $f(t)$  inverzna Laplasova transformacija funkcije  $F(s)$ , što zapisujemo  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

Poznato je da, ako Laplasova transformacija  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  postoji, onda važi da je  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ . Ovo zapažanje može nam poslužiti tako što, kada utvrdimo da je  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$  za neku funkciju  $F(s)$ , možemo zaključiti da ne postoji funkcija  $f(t)$  takva da je  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , odnosno da funkcija  $F(s)$  nema inverznu Laplasovu transformaciju. Ipak, nećemo često biti u situaciju da moramo da ispitujemo egzistenciju inverzne Laplasove transformacije. U najvećem broju slučajeva inverznu Laplasovu transformaciju neke funkcije određivaćemo oslanjajući se na Tablicu Laplasovih transformacija. U nekim slučajevima odgovor ćemo nalaziti direktno u Tablici, ali u većini slučajeva ćemo morati da na neki pogodan način transformišemo datu funkciju da bismo njenu inverznu Laplasovu transformaciju mogli zatim pročitati iz tablice.

Pri određivanju inverzne Laplasove transformacije poslužiće nam i njena osobina linearnosti:

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = af(t) + bg(t),$$

pri čemu su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , i  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ .

Ilustrovaćemo postupak određivanja inverzne Laplasove transformacije na nekoliko primera.

**Primer 6.5.** *Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcija*

$$a) F(s) = \frac{1}{s}, \quad b) F(s) = \frac{1}{s-3}, \quad c) F(s) = \frac{1}{s(s+3)}, \quad d) F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+13}.$$

**Rešenje:**

a) Koristeći Tablicu Laplasovih transformacija direktno čitamo da je

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1.$$

b) Koristeći Tablicu Laplasovih transformacija direktno čitamo da je, za  $a = 3$

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \frac{1}{s-3} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = e^{3t}.$$

c) U ovom slučaju ne možemo direktno pročitati iz Tablice inverznu Laplasovu transformaciju date funkcije, ali nakon transformacije

$$F(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3s} - \frac{1}{3(s+3)}$$

i korišćenjem linearnosti, dobijamo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s} - \frac{1}{3(s+3)}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}).$$

d) Transformišući datu racionalnu funkciju tako da bude zapisana u obliku zbira funkcija koje su navedene kao Laplasove transformacije u Tablici, dobijamo

$$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)-1}{(s+2)^2+9} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{(s+2)^2+3^2} = \frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2}.$$

Tada je

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2+4s+13}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\} = 2e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t.$$

## 6.4 Primena Laplasove transformacije na rešavanje diferencijalnih jednačina

Cilj nam je da koristimo Laplasovu transformaciju kada rešavamo diferencijalne jednačine. Kao što smo već opisali, taj postupak podrazumeva tri koraka:

- primenu Laplasove transformacije na datu diferencijalnu jednačinu u kojoj figuriše nepoznata funkcija  $y(t)$  i njeni izvodi  $y'(t)$ ,  $y''(t)$  itd; ovim dobijamo algebarsku jednačinu u kojoj figuriše nepoznata funkcija  $Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .
- rešavanje dobijene algebarske jednačine i određivanje nepoznate funkcije  $Y(s)$ ;
- primenu inverzne Laplasove transformacije na rešenje algebarske jednačine,  $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$ .

Ovim postupkom dobija se rešenje polazne diferencijalne jednačine,  $y(t)$ . Od navedenih koraka prvi je prilično jednostavan, drugi najčešće ne predstavlja problem, mada u opštem slučaju rešavanje algebarske jednačine može biti izazov, a treći korak se smatra najtežim.

Napomenimo još i da se navedenim postupkom rešava tzv. početni problem. Kao što smo definisali u okviru kursa iz Matematičke analize 1, početni problem čine diferencijalna jednačina i dati početni uslovi.

S obzirom da nameravamo da transformišemo diferencijalnu jednačinu u kojoj figuriše nepoznata funkcija  $y(t)$  i njeni izvodi, jasno je da je neophodno da utvrdimo čemu je jednaka Laplasova transformacija izvoda  $y'(t)$  (i izvoda višeg reda), izražena preko  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ .

Pretpostavimo, dakle, da je  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  i da je dat početni uslov  $y(0) = y_0$ . S obzirom da Laplasova transformacija funkcije  $y(t)$  postoji, ova funkcija je eksponencijalnog rasta, odnosno važi da postoje konstante  $K, M$  takve da je, za dovoljno veliko  $t$

$$|y(t)| \leq Me^{Kt} .$$

Tada je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'(t)\} &= \int_0^{\infty} y'(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} y(t)e^{-st} \Big|_0^T + s \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} y(T)e^{-sT} - y(0)e^0 + sY(s) \\ &= -y_0 + sY(s) . \end{aligned}$$

U prethodnom izračunavanju smo koristili parcijalnu integraciju

$$u = e^{-st}, \quad du = -se^{-st} dt, \quad dv = y'(t) dt, \quad v = y(t),$$

kao i činjenicu da je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} y(T)e^{-sT} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} Me^{KT} e^{-sT} = M \lim_{T \rightarrow \infty} e^{(K-s)T} = 0$$

za  $s > K$ .

Dakle, izveli smo Laplasovu transformaciju prvog izvoda date funkcije  $y(t)$ :

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0) .$$

Primenjujući ovu formulu možemo odrediti i Laplasovu transformaciju drugog izvoda, a daljim ponavljanjem postupka i Laplasovu transformaciju izvoda  $n$ -tog reda funkcije:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} &= \mathcal{L}\{(y'(t))'\} = s\mathcal{L}\{y'(t)\} - y'(0) \\ &= s(sY(s) - y(0)) - y'(0) \\ &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) , \end{aligned}$$

i

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) .$$

Sada možemo ilustrovati najvažniju primenu Laplasove transformacije.



**Primer 6.6.** *Primenom Laplasove transformacije rešiti početni problem*

$$y''(t) - y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

**Rešenje:** Ovo je obična diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Nju znamo da rešimo i bez primene Laplasove transformacije, ali ćemo sada ilustrovati rešavanje upravo ovom metodom.

Dakle, polazeći od toga da je

$$\mathcal{L}\{y''(t) - y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\},$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\},$$

i koristeći dalje da je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s), \\ \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s, \\ \mathcal{L}\{e^{-t}\} &= \frac{1}{s+1}, \end{aligned}$$

dobijamo odgovarajuću algebarsku jednačinu

$$s^2Y(s) - s - Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

čije je rešenje

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s+1)(s^2 - 1)} = \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s+1)^2} + \frac{3}{4(s-1)}.$$

Primenjujući zatim inverznu Laplasovu transformaciju na rešenje  $Y(s)$ , dobijamo funkciju  $y(t)$  koja je rešenje posmatranog početnog problema:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}te^{-t} + \frac{3}{4}e^t.$$

**Primer 6.7.** *Primenom Laplasove transformacije rešiti sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) - 3y(t) &= 0, \\ y'(t) - x(t) - y(t) &= e^t, \end{aligned}$$

uz početne uslove  $x(0) = y(0) = 0$ .

**Rešenje:** Sisteme diferencijalnih jednačina do sada nismo rešavali. Primenom Laplasove transformacije svešćemo dati sistem na sistem algebarskih jednačina:

$$\begin{aligned} (s+1)X(s) - 3Y(s) &= 0, \\ -X(s) + (s-1)Y(s) &= \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Jedan od načina da ovaj sistem rešimo je primenom Kramerovih formula:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{(s-1)(s^2-4)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2}, \\ Y(s) &= \frac{s+1}{(s-1)(s^2-4)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo rešenje polaznog sistema diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^t + \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}, \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -\frac{2}{3}e^t + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-2t}. \end{aligned}$$

## 6.5 Konvolucija i Laplasova transformacija proizvoda funkcija. Rešavanje integralnih jednačina

Na osnovu definicije Laplasove transformacije lako zaključujemo da Laplasova transformacija proizvoda funkcija nije jednaka proizvodu njihovih Laplasovih transformacija, odnosno da je u opštem slučaju

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} .$$

Ako su, dakle,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} du$$

i

$$G(s) = \mathcal{L}\{g\} = \int_0^{\infty} g(v)e^{-sv} dv$$

Laplasove transformacije dveju datih funkcija  $f$  i  $g$  (promenljivu pod integralom možemo nazvati kako želimo, a ne obavezno  $t$ !), onda je

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} f(u)e^{-su} du \cdot \int_0^{\infty} g(v)e^{-sv} dv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u)g(v)e^{-s(u+v)} du dv$$

jer je navedeni dvostruki integral separabilan, odnosno, njegova podintegralna funkcija dve promenljive može da se napiše u obliku proizvoda dve funkcije (po) jedne promenljive.

Uvedimo smenu u navedeni dvostruki integral, sa motivom da dobijemo da je  $u + v = t$ . Neka je

$$u = u, \quad v = t - u, \quad \text{pri čemu je} \quad du dv = |J| du dt = \frac{\partial(u, v)}{\partial(u, t)} du dt = 1 \cdot du dt .$$

Tada je

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u)g(v)e^{-s(u+v)} du dv = \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(u)g(t-u) du \right) e^{-st} dt$$

(uz malo pažnje u vezi sa promenom granica integracije nakon uvođenja smene).

Integral  $\int_0^t f(u)g(t-u) du$  definiše operaciju nad funkcijama  $f$  i  $g$  koja se naziva *konvolucija* i poznata je i primenljiva u mnogim oblastima matematike i inženjerstva. Konvoluciju funkcija  $f$  i  $g$  označavamo sa  $f * g$ . Dakle,

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du .$$

Sada možemo napisati da je

$$\int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(u)g(t-u) du \right) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (f(t) * g(t)) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} ,$$

i konačno zaključiti da je

$$F(s) \cdot G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} , \quad (13)$$

tj, da je Laplasova transformacija *konvolucije* dve funkcije jednaka *proizvodu* Laplasovih transformacija tih funkcija.

Poznavanje osobine (13) može nam poslužiti da odredimo proizvod Laplasovih transformacija, ali i da odredimo konvoluciju nekih funkcija (u jednostavnijim situacijama). Ovo ćemo ilustrovati primerom. Pre toga navodimo još neke od osobina konvolucije dve funkcije:

- $f * g = g * f$ .
- $f * (cg) = (cf) * g = c(f * g)$ , za  $c \in \mathbb{R}$ .
- $f * (g + h) = f * g + f * h$ .
- $f * (g * h) = (f * g) * h$ .

**Primer 6.8.** Izračunati  $t^2 * t$  koristeći definiciju, a zatim koristeći Laplasovu transformaciju.

**Rešenje:** Koristeći definiciju konvolucije, dobijamo da je

$$\begin{aligned} t^2 * t &= \int_0^t u^2(t-u) du = t \int_0^t u^2 du - \int_0^t u^3 du \\ &= t \frac{u^3}{3} \Big|_0^t - \frac{u^4}{4} \Big|_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}. \end{aligned}$$

Ako iskoristimo Laplasovu transformaciju, i činjenicu da je

$$\mathcal{L}\{t^2 * t\} = \mathcal{L}\{t^2\} \cdot \mathcal{L}\{t\} = \frac{2!}{s^3} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^5},$$

dobijamo da je

$$t^2 * t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^5}\right\} = \frac{2}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{1}{12} t^4,$$

što je rezultat koji smo očekivali.

Mnogo značajniju primenu Laplasove transformacije konvolucije ćemo ilustrovati u narednom primeru, gde ćemo pokazati da se ona može koristiti pri rešavanju nekih integralnih jednačina.

Pre toga, zapazimo da, koristeći konvoluciju, lako možemo zaključiti da za Laplasovu transformaciju integrala važi:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \mathcal{L}\{1 * f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}.$$

**Primer 6.9.** Rešiti integralnu jednačinu

$$y(t) = e^{-t} - 4 \int_0^t \cos 2(t-u)y(u) du.$$

**Rešenje:** Primenjujući Laplasov operator na obe strane date jednačine dobijamo da je

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t} - 4 \int_0^t \cos 2(t-u)y(u) du\right\},$$

a uočavajući da navedeni integral definiše konvoluciju, dalje možemo napisati da je

$$Y(s) = \mathcal{L}\{e^{-t}\} - 4\mathcal{L}\{\cos 2t * y(t)\}.$$

Dalje je

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} - 4\mathcal{L}\{\cos 2t\} \cdot \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s+1} - 4 \frac{s}{s^2+4} Y(s),$$

pa je

$$Y(s) = \frac{s^2+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{5}{s+1} - \frac{4}{s+2} + \frac{8}{(s+2)^2}.$$

Konačno, rešenje polazne integralne jednačine dobijamo primenjujući inverznu Laplasovu transformaciju:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = 5e^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t}.$$