

MATERIJAL ZA VEŽBE

Predmet: MATEMATIČKA ANALIZA 1

Nastavnik: prof. dr Nataša Sladoje-Matić

Asistent: dr Tibor Lukić

Godina: 2012

1. Nedelja

1. Odrediti domen funkcije f , ako je

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)}$,

b) $f(x) = \sin(\ln(x^2 - 4x + 3))$,

c) $f(x) = \ln \frac{x + 3}{x - 1}$,

d) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^5}$,

e) $f(x) = x + \arcsin \frac{x + 3}{x^2 + 2x - 3}$,

f) $f(x) = \sqrt{(x - 3)^3} \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \ln(x^2 + x - 2)$.

2. Ispitati znak funkcije f , ako je

a) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x(x - 2)}$,

b) $f(x) = \frac{5x + 8}{3\sqrt[3]{x^2(x + 1)}}$,

c) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right)$,

d) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^3}$,

e) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x - 2)^3}$.

3. Ispitati parnost funkcije f , ako je

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$,

b) $f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}$,

c) $f(x) = \sin(x^2 - 4x + 5)$,

d) $f(x) = 2x + \arcsin \left(\frac{3x}{1 + x^2} \right)$.

4. Izračunati sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x - 12}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{4x^2 - 14x - 30}$,

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}.$$

5. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x}{x - 3},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{6x+2} - \sqrt{2x^2+3x-1}}{x^2 - 1}.$$

6. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \cdot \sin x},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 1}{x + 1},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

2. Nedelja

1. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x - 1},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{-x^4 + 2x^3 + 2x - 5},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 7}{3x^2 - x + 7},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}},$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}.$$

2. Izračunati sledeće granične vrednosti:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{5}{x}}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{x - 1} \right)^{\frac{2x+1}{5x^2}}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 - 2} \right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - 3}{x + 3} \right)^{\frac{2x+1}{x^2-4}}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

3. Izračunati sledeće granične vrednosti:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$,
- b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3}$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3}$,
- d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} 5^{\frac{1}{x-1}}$,
- e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} 5^{\frac{1}{x-1}}$,
- f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 2|x|}{5x}$,
- g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x + 2|x|}{5x}$,
- h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2|x|}{5x}$,
- i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$.

4. Odrediti asimptote funkcije f , ako je:

- a) $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$,
- b) $f(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x + 2)^2}$,
- c) $f(x) = \sqrt[3]{x(x - 2)^2}$,

$$d) f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \right).$$

3. Nedelja

1. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e},$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x},$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - \sin^2 x)^{\frac{1}{2x^2}}.$$

2. Ispitati da li postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, ako je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \leq 0 \\ (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}, & x > 0. \end{cases}$$

3. Ispitati neprekidnost funkcije f ,

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \quad \text{u tački } x = 2,$$

$$b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases} \quad \text{u tački } x = 2,$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 3 \\ (x - 2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x > 3 \end{cases} \quad \text{u tački } x = 3.$$

4. Data je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x^4}{1 - \cos x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 3x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

Odrediti A tako da funkcija bude neprekidna u $x = 0$.

5. Odrediti parametar A tako da funkcija f bude neprekidna u svim tačkama definisanosti

$$a) f(x) = \begin{cases} (x + 2)e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ \frac{-1}{1 + \ln x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}, & x \neq -8 \wedge x \leq 1 \\ A, & x = -8. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0. \end{cases}$$

4. Nedelja

1. Pokazati da funkcija $f(x) = x^2 \ln(x) - 2$ ima bar jednu nulu na intervalu $[1, 3]$.

2. Ispitati monotonost i ograničenost sledećih nizova:

$$\text{a) } \left\{ \frac{n}{n+2} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{b) } \{2(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{c) } \{n^2 - 10n - 20\}_{n=1}^{\infty}.$$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 6n}{5n - 1},$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 5n - 3} - n,$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n - 5^n}.$$

4. Ispitati konvergenciju sledećih nizova:

$$\text{a) } \{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{b) } \{n(1 - (-1)^n)\}_{n=1}^{\infty}.$$

5. Odrediti sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{3n},$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n - 7}{n^2 - 3n + 7} \right)^{2n-1},$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + 3}{5n^3} \right)^{n^3},$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 - 2}{5n^3 + 2n^2 - 7} \right)^{3n^2+2}.$$

6. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 7,$

b) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\frac{\sin x}{\cos x},$

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 2e^x,$

d) $f(x) = e^x \sin x,$

e) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}},$

f) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$

7. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

a) $f(x) = e^{x^2},$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x} + \sin 2x.$

5. Nedelja

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(2x-1)^2},$

b) $f(x) = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2,$

c) $f(x) = \sin(3x) \cdot e^{\sin x}.$

2. Naći drugi izvod sledećih funkcija:

a) $f(x) = \ln(2x + \sqrt{1+x^2}),$

b) $f(x) = (3x^2 - 2)e^{2x}.$

3. Naći prvi i drugi izvod implicitno zadate funkcije $y = y(x)$, ako je

a) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2);$

b) $\ln y + \frac{y}{x} = 2.$

4. Naći drugi izvod, y''_x , parametarski zadate funkcije

a) $y = \cos t, x = \sin t;$

b) $y = t + \frac{1}{t}, x = \ln t.$

5. Izračunati y'_x u tački $x = e^2$, ako je funkcija zadata u parametarskom obliku $y = e^{2t}, x = e^{-t}.$

6. Naći prvi izvod sledećih funkcija:

a) $y = x^x,$

b) $y = (\cos x)^{\sin x}.$

7. Naći x'_y funkcije $y = x + \ln x$ koristeći izvod inverzne funkcije.

8. Primenom Lopitalovg pravila, izračunati sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \right),$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x},$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x.$

9. Koristeći Tejlrov polinom funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ trećeg stepena, aproksimirati vrednost $\sqrt{4.1}$ i oceniti apsolutnu grešku.

6. Nedelja

1. Koliko članova Maklorenovog polinoma funkcije $f(x) = e^x$ treba sabrati da bi se vrednost $\sqrt[3]{e^2}$ izračunala sa greškom manjom od $\frac{1}{2}10^{-2}$?

2. Oderditi ekstremne verdnosti sledećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2},$

b) $f(x) = \sqrt{2x - x^2},$

c) $f(x) = x\sqrt[3]{x-1},$

d) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2},$

e) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x.$

3. Rezervoar zapremine 20 se izrađuje od lima i ima oblik kvadra sa površinom osnove 10. Odrediti njegove dimenzije, tako da količina potrebnog lima za izradu bude minimalna.
4. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.

7. Nedelja

1. Rešiti sledeće integrale

a) $\int (x^2 + \sqrt{x} - 2e^x) dx,$

b) $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx,$

c) $\int \operatorname{tg}^2 x dx,$

d) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right) dx.$

2. Metodom smene promenljive, rešiti sledeće integrale

a) $\int \operatorname{tg} x,$

b) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx,$

c) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$

d) $\int \frac{x}{(1 + x)^2} dx.$

3. Metodom parcijalne integracije, rešiti sledeće integrale

a) $\int \ln x dx,$

b) $\int x e^x dx,$

c) $\int x \operatorname{arctg} x dx,$

d) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 + x}} dx.$

4. Rešiti sledeće integrale racionalnih funkcija

a) $\int \frac{1}{x^4 - 4} dx,$

- b) $\int \frac{x^5 + x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx,$
 c) $\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx,$
 d) $\int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx,$
 e) $\int \frac{x - 3}{x^2 + 2x + 2} dx,$
 f) $\int \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$

5. Rešiti sledeće integrale trigonometrijskih funkcija

- a) $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} dx,$
 b) $\int (1 + \sin^2 x) \operatorname{ctg} x dx,$
 c) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx,$
 d) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$

8. Nedelja

1. Rešiti sledeće integrale iracionalnih funkcija

- a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}},$
 b) $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{x + 1 - \sqrt{x+1}} dx,$
 c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{1+x}},$
 d) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx,$
 e) $\int x \sqrt[3]{4+3x} dx.$

2. Rešiti sledeće integrale iracionalnih funkcija

- a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx,$

b) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

3. Odrediti površinu oblasti koja je ograničena graficima krivih $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.
4. Naći površinu ograničenu pravama $x = 0$, $x = 2$ i krivama $y = 2^x$ i $y = 2x - x^2$.
5. Naći površinu ograničenu parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $y = -x$.
6. Odrediti površinu oblasti koja je ograničena krivom $y = \arctg x$ i pravama $y = \frac{\pi}{4}$ i $x = 2$.
7. Izračunati dužinu luka krive $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ od tačke $x = 1$ do tačke $x = e$.

9. Nedelja

1. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ i pravom $y = 2x$.
2. Dokazati da je obim kruga, poluprečnika r , jednak $2r\pi$.
3. Izračunati dužinu luka astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ za $t \in [0, 2\pi]$ ($a > 0$).
4. Izračunati površinu ograničenu jednim lukom cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ i x -osom.
5. Izračunati dužinu luka krive $y^2 - 2 \ln y - 4x = 0$ za $x \in [\frac{1}{4}, \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2}]$.
6. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem parabole $y = x^2 + 1$ nad intervalom $[-1, 1]$ oko x -ose.
7. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine ograničene sa $y = x^2 + 2$ i $y = \frac{x}{2} + 1$ nad intervalom $[0, 1]$ oko x -ose.
8. Izračunati $f(2, -3)$ i $f(1, \frac{y}{x})$, ako je $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

10. Nedelja

1. Naći parcijalne izvode prvog i drugog reda za sledeće funkcije
 - a) $z(x, y) = xy - 2x^2y + x^2e^y$,
 - b) $u(x, y, z) = x^3y^2 - 3xy + \ln(xyz)$.
2. Izračunati parcijalne izvode prvog reda funkcije $z(x, y) = x^2y - 2x^2y - x^3e^{yx}$ u tački $A(1, 0)$.

3. Odrediti jednačinu tangente ravni površi $z(x, y) = xy - 2x^2y - \sin(xy)$ u tački $M(1, 0, z)$.
4. Odrediti jednačinu tangente ravni površi $z(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ u tački $M(1, 1, z)$.
5. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
6. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
7. Naći ekstremne vrednosti funkcije $z(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$.
8. Naći ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.
9. Naći ekstremne vrednosti funkcije $u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, gde je $x > 0, y > 0$ i $z > 0$.

11. Nedelja

1. Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina

a) $\frac{x}{y} = \frac{y'}{1+x}$.

b) $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' \sin x = y \ln y$ i ono partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
3. Naći opšte rešenje sledećih homogenih diferencijalnih jednačina

a) $(x - y)dx - x^2dy = 0$.

b) $1 + e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) y' = 0$

4. Naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$, a zatim naći ono partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(1) = 1$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1 + y^2} \sin y - xy\right) dy$.
6. Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina tipa totalnog diferencijala

a) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$,

b) $\left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) ydy = 0$.

12. Nedelja

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$, ako se zna da ima integracioni množitelj koji je funkcija samo jedne promenljive.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $ydx + (1 + x + xy)dy = 0$, znajući da ima integracioni množitelj koji je funkcija samo jedne promenljive.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x + 2y)dx + ydy = 0$, znajući da ima integracioni množitelj koji je funkcija od $x + y$.
4. Metodom snižavanja reda, naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina:
 - a) $y'' = xe^x$,
 - b) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$,
 - c) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$,
 - d) $y'' = \frac{y'^2}{y}$.

13. Nedelja

1. Naći opšte rešenje sledećih diferencijalnih jednačina:
 - a) $y'' - y = 0$,
 - b) $2y'' + y' - y = 0$,
 - c) $y'' - 2y' + y = 0$,
 - d) $y'' - 2y' + 17y = 0$,
 - e) $y''' + y' = 0$,
 - f) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.
2. Metodom varijacije konstanti, naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - \frac{y'}{x} = x$.
3. Naći opšte rešenje sledećih nehomogenih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima:
 - a) $y'' - 5y' + 6y = x$,
 - b) $y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)e^{2x}$,
 - c) $y'' - 2y' + 5y = e^x(4 \cos 2x - 3x \sin 2x)$.