Övning 5

Termer, formler och strukturer i första ordningens logik

Dessa uppgifter låter dig öva på mål 7, 8, 9 och 10.

Kom ihåg vår konvention att beskriva (ändliga första ordningens) signaturer på följande sätt:

$$\sigma =< c_1, \ldots, c_m; f_1, \ldots, f_n; R_1, \ldots, R_k >$$

där $c_1, \ldots, c_m$ är konstantsymboler, $f_1, \ldots, f_n$ är funktionssymboler och $R_1, \ldots, R_k$ är relationssymboler och deras ställigheter anges av en tupel $< 0, \ldots, 0; s_1, \ldots, s_n; s'_1, \ldots, s'_k >$ där s_i är ställigheten hos funktionssymbolen f_i (där $1 \leq i \leq n$) och s'_i är ställigheten hos relationssymbolen R_i (där $1 \leq i \leq k$). Eftersom vi har konventionen att konstantsymboler har ställighet 0 så börjar tupeln med lika många nollor som det finns konstantsymboler i signaturen.

1. Låt $\sigma =< \bar{0}, \bar{1}, c; f, +; <, P >$ vara en signatur med ställigheterna $< 0, 0, 0; 1, 2, 2; 2, 3 >$ och låt x, y, z, u, v, w beteckna variabler. Vilka av följande uttryck är termer och vilka är formler i $LR(\sigma)$? (Det kan hända att ett uttryck varken är term eller en formel i $LR(\sigma)$.) Kom ihåg att vi har konventionen att inte skriva ut de yttersta paranteserna, samt att vi ofta förkortar '$(\neg\varphi)$' och '$(t = s)$' med '$\neg\varphi$' respektive '$t = s$'.
   (a) $+(f(+(x, c), \bar{1}), +(\bar{0}, y))$
   (b) $+(f(+(u, c)), \bar{1})$
   (c) $< (f(+(x, y)), c) \wedge P(y, z, \bar{1})$
   (d) $x = y \vee x = \bar{0}$
   (e) x
   (f) c
   (g) $P(y, z) \rightarrow y = z$
   (h) $< (y, z) \rightarrow P(\bar{1}, y, c)$.
   (i) $\forall y(< (y, z) \rightarrow P(\bar{1}, y, c))$
   (j) $\exists x(\forall y(< (y, z) \rightarrow P(\bar{1}, y, c)))$
   (k) $\forall x(x = y \vee x = \bar{0})$
   (l) $P(c, \bar{1}, \bar{1})$
   (m) $\exists y(< (x, y) \rightarrow \forall x(x = f(f(\bar{1}))))$

2. Betrakta termerna och formlerna från föregående uppgift.
   (a) För var och en av termerna, ange vilka dess fria variabler är samt termens ställighet (*arity*).
   (b) För var och en av formlerna, ange vilka dess fria variabler är samt formelns ställighet.
   (c) Finns det någon formel i vilken någon variabel har både en fri och en icke-fri (dvs. bunden) förekomst?
   (d) Vilka av formlerna är slutna (*closed*). Med andra ord, vilka av formlerna är satser (*sentences*)?

(e) Vilka av termerna är slutna? (En sluten term kallas dock aldrig för sats.)

3. Låt φ, ψ och χ beteckna formlerna från 1(c), 1(j) och 1(m) respektive. Låt t och s beteckna termerna $+(f(x), c)$ och v respektive.

   - Skriv ut (i detalj) formlerna $\varphi[t/x, s/y]$, $\psi[s/y, t/z]$ och $\chi[t/x, s/u]$.
   - Är termen $f(y)$ *substituterbar* (*substitutable*) för x i χ?

4. Låt $\sigma =$ <Jag; FarTill, MorTill; ÄldreÄn> av ställighet $< 0;\ 1, 1;\ 2 >$. Översätt följande meningar till formler i språket $LR(\sigma)$.

   - Jag är inte far till mig själv.
   - Ingen är morfar till sig själv.
   - Det finns personer vars far är äldre än sin mor.
   - Jag är det enda barnet som min mor har.
   - Alla som är äldre än min farmor är äldre än mig.

5. Låt σ vara som i föregående uppgift. Avgör om följande uttryck är öppna eller slutna formler, eller om det inte är en formel i $LR(\sigma)$. Ange även vilka variabelförekomster som är fria och bundna (dvs. inte fria).

   (a) FarTill(FarTill(x))

   (b) $\exists x$(ÄldreÄn(jag,x) $\wedge$ y = FarTill(x))

   (c) MorTill(MorTill(x)) = MorTill(MorTill(y))$\rightarrow$ $\exists z$(z = FarTill(x) $\wedge$ z = FarTill(y))

   (d) x = MorTill(MorTill(Jag)) $\rightarrow$ x = MorMor(Jag)

   Låt φ beteckna följande formel: MorTill(x) = y $\rightarrow$ ÄldreÄn(x,y). Vi kan även beteckna samma formel med $\varphi(x, y)$ om vi vill visa att x och y förekommer som fria variabler i formeln. Om t och s är termer så betyder $\varphi(t, s)$ samma sak som $\varphi[t/x, s/y]$. Skriv ut fullständigt följande formler och svara på vilka som är öppna eller slutna, samt vilka variabler som är fria eller bundna.

   (e) $\exists x(\forall y(x = y \wedge \varphi(x, y))$

   (f) φ(FarTill(x_0),FarTill(x_1))

   (g) $\exists y(\varphi(x_0, y) \leftrightarrow \varphi(x,$MorTill$(y)))$

6. Låt σ vara en (första ordningens) signatur. Förklara vad som menas med en σ-*struktur*. (Mera precist, vilka komponenter består en σ-struktur av?)

   Vi använder följande konvention (vilket skiljer sig lite från kursbokens). Om

   $$\sigma = < c_1, \ldots, c_m; f_1, \ldots, f_n; R_1, \ldots, R_k >$$

   är en signatur så kan vi beskriva en σ-struktur, här kallad $\mathcal{M}$, på följande sätt:

   $$\mathcal{M} = \ < M; c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_m^{\mathcal{M}}; f_1^{\mathcal{M}}, \ldots, f_n^{\mathcal{M}}; R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_k^{\mathcal{M}} >$$

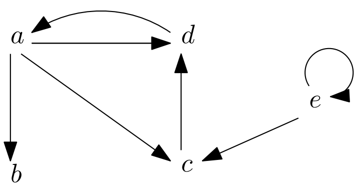
   där M är en mängd (strukturens *domän/universum*) och $c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_m^{\mathcal{M}}, f_1^{\mathcal{M}}, \ldots, f_n^{\mathcal{M}}, R_1^{\mathcal{M}}, \ldots, R_k^{\mathcal{M}}$ är tolkningarna av motsvarande symboler i M.

7. I denna uppgift jobbar vi med signaturen $\sigma =<;; P>$ med ställigheterna $<;; 2>$.

   (a) Rita en figur (en riktad graf) som illustrerar σ-strukturen $\mathcal{M} = < M; P^{\mathcal{M}} >$ där

   $$M = \{1, 2, 3, 4\} \ \text{ och } \ P^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 2), (1, 1), (4, 3), (3, 4)\}.$$

   Om a och b tillhör strukturens domän så rita en pil från a till b om och endast om $(a, b) \in P^{\mathcal{M}}$.



(b) Beskriv formellt σ-strukturen som beskrivs (informellt) av följande figur:

(c) Låt $\varphi(x, y)$ beteckna formeln $P(x, y) \wedge P(y, x)$ och låt $\mathcal{N}$ vara σ-strukturen som beskrivs av figuren i del (b). Kom ihåg att om $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ är en kvantor-fri σ-formel vars fria variabler är med i listan $x_1, \ldots, x_n$ och $a_1, \ldots, a_n$ är element från $\mathcal{N}$:s domän, så betyder $\mathcal{N} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ samma sak som "$(a_1, \ldots, a_n)$ satisfierar $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathcal{N}$" i Definition 5.7.6 i kursboken (som för övrigt använder notationen '$\models_{\mathcal{N}}$' med samma betydelse som '$\mathcal{N} \models$').
Vilka av följande stämmer?

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N} \models P(a, b) \\
&\mathcal{N} \models P(a, b) \wedge P(b, a) \\
&\mathcal{N} \models P(a, d) \wedge P(d, a) \\
&\mathcal{N} \models \neg P(e, e) \vee P(d, c) \\
&\mathcal{N} \models (P(c, a) \wedge P(a, b)) \to P(b, a) \\
&\mathcal{N} \models P(e, d) \leftrightarrow \neg P(b, a)
\end{aligned}$$

8. Låt $\sigma = < \bar{0}; s, +; Q >$ med ställighet $< 0; 1, 2; 2 >$ och låt $\mathcal{N} = < \mathbb{N};\ \bar{0}^{\mathcal{N}};\ s^{\mathcal{N}},\ +^{\mathcal{N}};\ Q^{\mathcal{N}} >$ där $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ och

$$\begin{aligned}
&\bar{0}^{\mathcal{N}} = 0, \\
&s^{\mathcal{N}}(n) = n + 1 \text{ för alla } n \in \mathbb{N}, \\
&Q^{\mathcal{N}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 :\ n \text{ är mindre än } m\}.
\end{aligned}$$

Vilka av följande stämmer?

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N} \models s(\bar{0}) = \bar{0} \\
&\mathcal{N} \models s(\bar{0}) = 1 \\
&\mathcal{N} \models s(0) = 1 \\
&\mathcal{N} \models +(s(0), s(s(s(0)))) = s(s(s(s(0)))) \\
&\mathcal{N} \models Q(s(s(s(\bar{0}))), s(s(\bar{0}))) \\
&\mathcal{N} \models Q(s(s(3)), +(3, 2)) \to s(s(s(2))) = s(3)
\end{aligned}$$

9. Låt σ och $\mathcal{N}$ vara som i föregående uppgift. Låt $t(x, y)$ beteckna termen $+(+(x, x), s(s(s(y))))$. Med de tolkningar vi har i $\mathcal{N}$ så kommer t att motsvara en funktion från $\mathbb{N}^2$ till $\mathbb{N}$. Beskriv denna funktion så klart och tydligt som möjligt.