MATEMATISKA INSTITUTIONEN
UPPSALA UNIVERSITET
Olof Bergvall

Linjär Algebra II
Tentamen
2018-03-12, kl. 08:00–13:00

Inga hjälpmedel är tillåtna. De 8 uppgifterna ger maximalt 5 poäng vardera. Motivera dina lösningar noggrant. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad. Observera att det finns en engelsk översättning av denna tentamen att tillgå vid behov.

1. Låt $\mathcal{P}_3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3 i en variabel och låt N vara vektorrummet av polynom p i $\mathcal{P}_3$ sådana att

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$$

   (a) Visa att N är ett delrum av $\mathcal{P}_3$.

   (b) Bestäm dimensionen av N.

2. Låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion i planet P som beskrivs av ekvationen $x - y + z = 0$. Bestäm f:s matris relativt standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

3. Låt C vara kurvan som ges av ekvationen

$$19x^2 - 6xy + 11y^2 = 10$$

   Bestäm det längsta och kortaste avståndet från C till origo samt ange koordinaterna, relativt standardbasen i $\mathbb{R}^2$, för de punkter där dessa avstånd antas.

4. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 5y_1 & - & 2y_2 \\ y_2' & = & 12y_1 & - & 5y_2 \end{array}$$

   med initialvillkor $y_1(0) = 3$ och $y_2(0) = 8$.

5. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestäm en bas för kolonnrummet av A.

   (b) Bestäm en bas för nollrummet av A.

   (c) Beräkna dimensionen av radrummet av A.

VÄND BLAD!

6. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ ges av $F(p) = q$ där

$$q(x) = (x-1)p(x+1)$$

   (a) Bestäm F:s matris relativt standardbasen $(1, x, x^2)$ för $\mathcal{P}_2$ och standardbasen $(1, x, x^2, x^3)$ för $\mathcal{P}_3$.

   (b) Bestäm en bas för bilden av F.

   (c) Är F injektiv, surjektiv, bijektiv eller ingetdera?

7. Betrakta det euklidiska rummet $\mathbb{E}^4$ (d.v.s. $\mathbb{R}^4$ med standardskalärprodukten).

   (a) Visa att vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   utgör en bas för delrummet $V \subset \mathbb{E}^4$ som ges av ekvationen

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

   (b) Hitta en ortonormalbas B för V.

   (c) Utvidga B till en ortonormalbas för $\mathbb{E}^4$.

8. Låt u och v vara vektorer i $\mathbb{R}^3$ och definiera

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2$$

   (a) Låt $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Beräkna $\langle a, b \rangle$.

   (b) Visa att $\langle -, - \rangle$ ger en inre produkt på $\mathbb{R}^3$.

   (c) Finn det största värde som antas av funktionen $f(x, y, z) = 2x + 4y + 4z$ på ytan som ges av

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 10$$

LYCKA TILL!

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UPPSALA UNIVERSITY
Olof Bergvall

Linear Algebra II
Final exam (English translation)
2018-03-12, 08:00–13:00

No aids allowed. The 8 problems each give a maximum of 5 points. Motivate your answers carefully. The problems are not ordered by difficulty. In the event of differences between the Swedish and the English version, the Swedish original has priority.

1. Let $\mathcal{P}_3$ be the vector space of polynomials of degree at most 3 in one variable and let N be the subset of polynomials p in $\mathcal{P}_3$ such that
$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = 0$$
   (a) Show that N is a subspace of $\mathcal{P}_3$.
   (b) Determine the dimension of N.

2. Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation given by orthogonal projection in the plane P given by the equation $x - y + z = 0$. Determine the matrix of f relative the standard basis in $\mathbb{R}^3$.

3. Let C be the curve given by the equation
$$19x^2 - 6xy + 11y^2 = 10$$
Determine the longest and the shortest distance from C to the origin as well as the coordinates, relative the standard basis in $\mathbb{R}^2$, for the points where these distances are attained.

4. Solve the initial value problem
$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & 5y_1 & - & 2y_2 \\ y_2' & = & 12y_1 & - & 5y_2 \end{array}$$
with initial conditions $y_1(0) = 3$ and $y_2(0) = 8$.

5. Let
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Determine a basis for the column space of A.
   (b) Determine a basis for the null space of A.
   (c) Compute the dimension of the row space of A.

6. The linear map $F : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ is given by $F(p) = q$ where

$$q(x) = (x-1)p(x+1)$$

   (a) Determine the matrix of F relative the standard basis $(1, x, x^2)$ in $\mathcal{P}_2$ and the standard basis $(1, x, x^2, x^3)$ in $\mathcal{P}_3$.

   (b) Determine a basis for the image of F.

   (c) Is F injective, surjective, bijective or neither?

7. Consider the euclidean space $\mathbb{E}^4$ (i.e. $\mathbb{R}^4$ equipped with the standard scalar product).

   (a) Show that the vectors

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   constitutes a basis for the subspace $V \subset \mathbb{E}^4$ given by the equation

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

   (b) Find an orthonormal basis B for V.

   (c) Extend B to an orthonormal basis for $\mathbb{E}^4$.

8. Let u and v be vectors in $\mathbb{R}^3$ and define

$$\langle u, v \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_3 + u_3v_2$$

   (a) Let $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Compute $\langle a, b \rangle$.

   (b) Show that $\langle -, - \rangle$ gives an inner product on $\mathbb{R}^3$.

   (c) Find the largest value attained by the function $f(x, y, z) = 2x + 4y + 4z$ on the surface given by

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz = 10$$

GOOD LUCK!

LÖSNINGAR

1. (a) Vi har
$$\int_{-1}^{1} 0dx = 0$$
Alltså är nollvektorn ett element i N. Om p och q är element i N gäller
$$\int_{-1}^{1} (p+q)(x)dx = \int_{-1}^{1} p(x)dx + \int_{-1}^{1} q(x)dx = 0+0=0$$
Alltså är även $p+q$ ett element i N. Slutligen har vi att om $c \in \mathbb{R}$ gäller
$$\int_{-1}^{1} (cp)(x)dx = c\int_{-1}^{1} p(x)dx = c \cdot 0 = 0$$
Alltså är även cp ett element i N. Vi har nu verifierat att N är ett delrum av $\mathcal{P}_3$.

(b) Låt $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ vara ett element i N. Vi har då
$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-1}^{1} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0(x)dx &= \left[\tfrac{a_3}{4}x^4 + \tfrac{a_2}{3}x^3 + \tfrac{a_1}{2}x^2 + a_0x\right]_{-1}^{1} = \\ &= \tfrac{2a_2}{3} + 2a_0 = 0 \end{aligned}$$
Vi ser alltså att $a_0 = -\frac{a_2}{3}$. En bas för N ges därmed av polynomen
$$p_1(x) = x^3, \quad p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad p_3(x) = x$$
och vi ser att $\dim(N) = 3$.

2. Genom att lösa ut x ur P:s ekvation som $x = y - z$ ser vi att vektorerna
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
ligger i P. Alltså gäller $f(v_1) = v_1$ och $f(v_2) = v_2$. Vektorn
$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
är ortogonal mot P och vi har därmed att $f(v_3) = 0$. Matrisen för f relativt basen $B = (v_1, v_2, v_3)$ är därmed
$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Basbytesmatrisen från basen B till standardbasen E är
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och basbytesmatrisen från E till B beräknas till

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisen för f kan nu beräknas som

$$[f] = T[f]_B T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Ekvationen för C kan skrivas $q(x) = 10$ där $q(x)$ är den kvadratiska formen $q(x) = 19x_1^2 - 6x_1x_2 + 11x_2^2$. Denna kvadratiska form kan skrivas på matrisform $q(x) = x^T Ax$ där

$$A = \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Vi vill nu diagonalisera A ortogonalt och beräknar därför dess egenvärden. Vi har

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 19 & 3 \\ 3 & \lambda - 11 \end{pmatrix} = (\lambda - 19)(\lambda - 11) - 9 = \lambda^2 - 30\lambda - 200$$

vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 10$ och $\lambda_2 = 20$.

Vi beräknar nu egenrummen. Vi har $E(10) = N(10I - A)$:

$$\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet $E(10)$ spänns alltså upp av vektorn $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi har $E(20) = N(20I - A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet $E(20)$ spänns alltså upp av vektorn $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vi ser nu att om vi låter

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

så diagonaliseras A ortogonalt som $S^T AS = D$. Om vi låter $y = S^T x$ har vi nu $q(x) = 10y_1^2 + 20y_2^2$. Ekvationen $10y_1^2 + 20y_2^2 = 10$ är ekvivalent med

$$y_1^2 + 2y_2^2 = 1$$

vilket är ekvationen för en ellips med halvaxlarna längs y_1- och y_2-axlarna. Det minsta avståndet antas då $y_1 = 0$ och vi har då $y_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det minsta avståndet till origo är alltså $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Det längsta avståndet till origo antas då $y_2 = 0$ och vi har då att $y_1 = \pm 1$. Det längsta avståndet till origo är alltså 1.

Punkterna närmast origo är alltså $(y_1, y_2)^T = (0,1)^T$ och de längst från origo är $(y_1, y_2)^T = (1,0)^T$, uttryckt i koordinater relativt A:s egenbas. Vi har alltså att punkterna närmast origo, uttryck i standardbasen, är

$$x = Sy = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och punkterna längst från origo är

$$x = Sy = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Differentialekvationen kan skrivas på matrisform som $y' = Ay$ där

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Vi diagonaliserar A. Vi betraktar därför den karaktäristiska ekvationen

$$0 = \det\begin{pmatrix} \lambda - 5 & 2 \\ -12 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 25 + 24 = \lambda^2 - 1$$

Vi ser att egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. Vi beräknar nu egenrummen vi har $E(1) = N(I - A)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet $E(1)$ spänns alltså upp av vektorn $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vi har $E(-1) = N(-I - A)$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenrummet $E(-1)$ spänns alltså upp av vektorn $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Matrisen A diagonaliseras därmed som $S^{-1}AS = D$ där

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ekvationen $z' = Dz$ har alltså lösningarna $z_1 = C_1 e^x$ och $z_2 = C_2 e^{-x}$ och den allmänna lösningen till ekvationen $y' = Ay$ ges nu som

$$y = Sz = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 e^{-x} \\ 2C_1 e^x + 3C_2 e^{-x} \end{pmatrix}$$

Begynnelsevillkoren $y_1(0) = 3$ och $y_2(0) = 8$ ger det linjära ekvationssystemet

$$\begin{array}{rcccl} y_1(0) & = & C_1 + C_2 & = & 3 \\ y_2(0) & = & 2C_1 + 3C_2 & = & 8 \end{array}$$

som har lösning $C_1 = 1$ och $C_2 = 2$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är alltså

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & e^x + 2e^{-x} \\ y_2 & = & 2e^x + 6e^{-x} \end{array}$$

5. Vi Gausseliminerar A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Pivotettorna i den reducerade matrisen är i kolonn 1, 2 och 3. Alltså utgör kolonn 1, 2 och 3 i A en bas för kolonnrummet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Alternativt kan man observera att kolonnrummet är hela $\mathbb{R}^3$ och att standardbasen därmed är en bas).

(b) Från den reducerade matrisen kan vi läsa av en bas för nollrummet som

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Radrummet har samma dimension som kolonnrummet. Eftersom kolonnrummet har en bas med tre element är $\dim(R(A)) = 3$.

6. (a) Vi beräknar bilderna av basvektorerna 1, x och x^2. Vi har

$$\begin{aligned} F(1) &= x - 1 \\ F(x) &= (x-1)(x+1) = x^2 - 1 \\ F(x^2) &= (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

Vi har därmed att matrisen för F relativt standardbaserna är

$$[F] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bilden av F sammanfaller med kolonnrummet av $[f]$. Kolonnerna i $[F]$ är linjärt oberoende så en bas för bilden av F ges av motsvarande polynom, d.v.s. $F(1)$, $F(x)$ och $F(x^2)$. Explicit utgör alltså följande polynom en bas

$$\begin{aligned} &x - 1 \\ &x^2 - 1 \\ &x^3 + x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

(c) Eftersom $\dim(\mathcal{P}_2) < \dim(\mathcal{P}_3)$ är F inte surjektiv och därmed heller ej bijektiv. Vi har sett att $[F]$ har full rang och alltså är F injektiv.

7. (a) Vi har

$$1-1+0-0=0, \quad 0-0+1-1=0, \quad 1-0+0-1=0$$

så v_1, v_2 och v_3 är element i V. Det är också tydligt att v_1, v_2 och v_3 är linjärt oberoende. Eftersom V inte är hela $\mathbb{R}^4$ är $\dim(V) \leq 3$. Eftersom v_1, v_2 och v_3 är tre linjärt oberoende vektorer i V ser vi att v_1, v_2 och v_3 spänner upp V. Alltså utgör v_1, v_2 och v_3 en bas.

(b) Vi ortonormerar basen $B = (v_1, v_2, v_3)$ med hjälp av Gram-Schmids metod. Vi har

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$b_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot b_1)b_1}{\|v_2 - (v_2 \cdot b_1)b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har också att

$$v_3 \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad v_3 \cdot b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

så vi får

$$b_3 = \frac{v_3 - (v_3 \cdot b_1)b_1 - (v_3 \cdot b_2)b_2}{\|v_3 - (v_3 \cdot b_1)b_1 - (v_3 \cdot b_2)b_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Från ekvationen $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ ser vi att vektorn

$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

är ortogonal mot V och därmed mot b_1, b_2 och b_3. Vi normerar v_4 och får

$$b_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Basen $C = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ är nu en ON-bas för $\mathbb{E}^4$.

8. (a) Vi har

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle &= 1 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot y + 3 \cdot 1 \cdot z + 1 \cdot y + 1 \cdot x + 1 \cdot z + 1 \cdot y = \\ &= 2x + 4y + 4z \end{aligned}$$

(b) Produkten $\langle u, v\rangle$ kan skrivas $\langle u, v\rangle = u^T Av$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alltså är produkten $\langle -, -\rangle$ en inre produkt om och endast om A är positivt definit. Vi verifierar detta genom att beräkna A:s huvudminorer:

$$\det(1) = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Då huvudminorerna är positiva är A positivt definit och $\langle -, -\rangle$ därmed en inre produkt.

(c) Observera att

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$$

Om $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ är en punkt på ytan gäller alltså att $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 10$, d.v.s. $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}$. Vi såg i (a) att

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 2x + 4y + 4z$$

så $f(x, y, z) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$. Vi har också

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{10}$$

Enligt Cauchy-Schwarz olikhet har vi nu

$$|f(x, y, z)| = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10.$$

Alltså är 10 en övre begränsning för $f(x, y, z)$. Men $(1, 1, 1)$ är en punkt på ytan och vi har $f(1, 1, 1) = 10$ så denna övre begräsning antas. Alltså är 10 det största värde funktionen $f(x, y, z)$ antar på den givna ytan.