MATEMATISKA INSTITUTIONEN
UPPSALA UNIVERSITET
Olof Bergvall

Linjär Algebra II
Exempeltenta
2018-02-26, kl. XX:XX–XX:XX

Inga hjälpmedel är tillåtna. Uppgifterna ger maximalt 5 poäng vardera. Motivera dina lösningar noggrant. Uppgifterna är inte ordnade efter svårighetsgrad.

1. Låt U och V vara vektorrum och låt $L(U, V)$ vara mängden av linjära transformationer från U till V.

   (a) Visa att $L(U, V)$ är ett vektorrum under punktvis addition och multiplikation med skalär.

   (b) Om W är ett tredje vektorrum och $g : V \to W$ är en linjär tranformation ger $F_g(f) = g \circ f$ en funktion $F_g : L(U, V) \to L(U, W)$. Är F_g en linjär avbildning?

2. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y''' + 3y'' - 2y' - 2y = 0$$

   med initialvillkor $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ och $y''(0) = 2$. (Ett stavfel förekom i en tidigare version).

3. Betrakta

$$\langle p, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

   (a) Visa att detta definierar en inre produkt på $\mathcal{P}_3$.

   (b) Använd Gram-Schmidts metod för att ortonormera standardbasen i $\mathcal{P}_3$ med avseende på denna inre produkt.

4. Låt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   och låt $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av

$$f(v_1) = 2v_2 + v_3, \quad f(v_2) = 2v_3 + v_1, \quad f(v_3) = 2v_1 + v_2$$

   Bestäm f:s matris relativt standardbasen i $\mathbb{R}^3$. (Ett fel förekom i en tidigare version och v_3 är ändrad).

5. Matrisexponentialen av en kvadratisk matris A definieras som

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

   Beräkna e^A då

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (Tips: Börja med att diagonalisera A).

6. Den linjära avbildningen $F : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ ges av

$$F(p)(x) = x(p'(x) - p(0)) + p(1)$$

   (a) Bestäm baser för kärnan och bilden av F.

   (b) Avgör om F är injektiv, surjektiv, bijektiv eller ingetdera.

7. Enhetssfären S^2 i $\mathbb{E}^3$ beskrivs av ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vilket är det största värde funktionen

$$f(x, y, z) = x + 4y + 8z$$

   antar på S^2?

8. Låt Y vara ytan som ges av ekvationen

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz = 6$$

   Bestäm det längsta och kortaste avståndet från Y till origo samt ange koordinaterna, relativt standardbasen i $\mathbb{R}^3$, för de punkter där detta avstånd antas.

Lösningar.

1. (a) Vi kontrollerar de 8 axiomen för vektorrum. Kommutativitet och associativitet följer från motsvarande egenskaper i V. Exempelvis har vi kommutativitet eftersom
$$(f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u) = f_2(u) + f_1(u) = (f_2 + f_1)(u)$$
för alla $u \in U$ så $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$.

   Nollbojektet i $L(U, V)$ är funktionen $o : U \to V$ som ges av $o(u) = 0$ för alla $u \in U$. Det negativa objektet svarande mot en funktion $f : U \to V$ definieras av $g(u) = -f(u) = f(-u)$ för alla $u \in U$. Eftersom addition i $L(U, V)$ sker punktvis ser vi att $f + g = o$. Vidare är funktionen $-I : U \to U$ som tar en vektor u till $-u$ linjär och $g = f \circ (-I)$ så g är en sammansättning av linjära transformationer och därmed själv linjär.

   Återstående egenskaper (de två distributivitetsegenskaperna, kompabiliteten mellan multiplikation av reella tal och skalärmultiplikation samt att $1 \cdot f = f$) följer direkt från motsvarande egenskaper i V.

   (b) Vi har
$$(g \circ (f_1 + f_2))(u) = g(f_1(u) + f_2(u)) = g(f_1(u)) + g(f_2(u))$$
så $F_g(f_1 + f_2) = F_g(f_1) + F_g(f_2)$. Vi har också att
$$(g \circ (cf))(u) = g(cf(u)) = cg(f(u))$$
så $F_g(cf) = cF_g(f)$. Alltså är F_g linjär.

2. Vi introducerar funktionerna $u_1 = y$, $u_2 = y'$ och $u_3 = y''$. Detta ger oss systemet
$$\begin{array}{rcrrr} u_1' & = & & u_2 & \\ u_2' & = & & & u_3 \\ u_3' & = & 2u_1 & +2u_2 & -3u_3 \end{array}$$
Detta kan skrivas på matrisformen $u' = Au$ där
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$
Vi diagonaliserar A. Den karaktäristiska ekvationen är
$$0 = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda - 2$$
som har lösningarna $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ och $\lambda_3 = -2 + \sqrt{2}$. De motsvarande egenrummen spänns upp av vektorerna
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} \\ -2 \\ 4 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 + \sqrt{2} \\ 2 \\ -4 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Låt D vara den diagonala matrisen med diagonal λ_1, λ_2 och λ_3 och låt $S = (v_1|v_2|v_3)$. Systemet $z' = Dz$ har den allmänna lösningen

$$z = \begin{pmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{-(2+\sqrt{2})x} \\ C_3 e^{(-2+\sqrt{2})x} \end{pmatrix}$$

Vi får den allmänna lösningen till systemet i u genom $u = Sz$, d.v.s.

$$u = Sz = \begin{pmatrix} C_1 e^x + (2-\sqrt{2})C_2 e^{-(2+\sqrt{2})x} + (-2+\sqrt{2})C_3 e^{(-2+\sqrt{2})x} \\ C_1 e^x - 2C_2 e^{-(2+\sqrt{2})x} + 2C_3 e^{(-2+\sqrt{2})x} \\ C_1 e^x + (4+2\sqrt{2})C_2 e^{-(2+\sqrt{2})x} + (-4+2\sqrt{2})C_3 e^{(-2+\sqrt{2})x} \end{pmatrix}$$

Begynnelsevillkoren $y(0) = u_1(0) = 0$, $y'(0) = u_2(0) = 1$ och $y''(0) = u_2(0) = 2$ ger systemet

$$\begin{array}{llll} C_1 & +(2-\sqrt{2})C_2 & +(-2+\sqrt{2})C_3 & = 0 \\ C_1 & -2C_2 & +2C_3 & = 1 \\ C_1 & +(4+2\sqrt{2})C_2 & +(-4+2\sqrt{2})C_3 & = 2 \end{array}$$

som har lösningarna

$$\begin{array}{lcl} C_1 & = & \frac{1}{7}(3-\sqrt{2}) \\ C_2 & = & \frac{1}{56}(-2+17\sqrt{2}) \\ C_3 & = & \frac{1}{8}(2+3\sqrt{2}) \end{array}$$

Begynnelsevärdeproblemets lösning är alltså

$$y = \frac{1}{7}(3-\sqrt{2})e^x + \frac{1}{56}(-2+17\sqrt{2})e^{-(2+\sqrt{2})x} + \frac{1}{8}(2+3\sqrt{2})e^{(-2+\sqrt{2})x}$$

3. (a) Vi verifierar de fyra villkoren:

(Symmetri) Vi har

$$\langle p, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \langle q, p\rangle$$

(Additivitet) Vi har

$$\begin{aligned} \langle p+q, r\rangle &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}(p(x)+q(x))r(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}(p(x)r(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + q(x)r(x)e^{-\frac{x^2}{2}})dx = \\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} p(x)r(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x)r(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \\ &= \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle \end{aligned}$$

(Homogenitet) Vi har

$$\langle cp, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} cp(x)q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = c\langle p, q\rangle$$

(Pos. def.) Vi har

$$\langle p, p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)p(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

Integranden $p(x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$ är icke-negativ så integralen är icke-negativ och den är noll om och endast om integranden är identiskt noll, d.v.s. om och endast om $p(x) = 0$.

(b) Integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$
är noll om n är udda eftersom $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ då är en udda funktion och vi integrerar över ett symmetriskt intervall. Vi har
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$
medan
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 3\sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 15\sqrt{2\pi}$$
Vi kan nu utföra Gram-Schmidts metod på basen $1, x, x^2, x^3$. Vi har
$$b_1 = \frac{1}{\|1\|} = (2\pi)^{-1/4}$$
och eftersom $\langle 1, x\rangle = 0$ har vi
$$b_2 = \frac{x}{\|x\|} = (2\pi)^{-1/4} x$$
Vi har $\langle (2\pi)^{-1/4}, x^2\rangle = (2\pi)^{1/4}$ och $\langle \frac{x}{\sqrt{2\pi}}, x^2\rangle = 0$ så vi vill normalisera polynomet $x^2 - \langle b_1, x^2\rangle b_1 = x^2 - 1$. Vi har
$$\langle x^2-1, x^2-1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x^4-2x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 3\sqrt{2\pi}-2\sqrt{2\pi}+\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi} = \sqrt{8\pi}$$
Detta ger
$$b_3 = \frac{x^2-1}{(8\pi)^{1/4}}$$
Slutligen har vi att $\langle x^3, b_1\rangle = \langle x^3, b_3\rangle = 0$ men $\langle x^3, b_2\rangle = 3(2\pi)^{1/4}$. Vi vill alltså normalisera polynomet $x^3 - \langle x^3, b_2\rangle b_1 = x^3 - 3x$. Vi har
$$\langle x^3-3x, x^3-3x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x^6-6x^4+9x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 15\sqrt{2\pi}-18\sqrt{2\pi}+9\sqrt{2\pi} = 6\sqrt{2\pi} = \sqrt{72\pi}$$
Detta ger
$$b_4 = \frac{x^3-3x}{(72\pi)^{1/4}}$$

4. Vi observerar först att $B = (v_1, v_2, v_3)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$. Vi har
$$(f(v_1))_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (f(v_2))_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (f(v_3))_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
så
$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Basbytesmatrisen från basen B till standardbasen är

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En enkel beräkning ger att basbytesmatrisen från standardbasen till B är

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan nu beräkna

$$[f] = T[f]_B T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Vi följer ledtråden och börjar med att diagonalisera A. Vi beräknar därför egenvärdena. Vi har

$$0 = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

så egenvärdena är $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 3$. De motsvarande egenrummen spänns upp av vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Om vi låter

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har vi $S^{-1}AS = D$ och $A = SDS^{-1}$. Vi observerar nu att $A^k = SD^kS^{-1}$. Detta ger

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} = \\ &= S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) S^{-1} = \\ &= S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}}{k!}\right) S^{-1} = \\ &= S\begin{pmatrix} \sum_0^{\infty} \frac{1^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_0^{\infty} \frac{2^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_0^{\infty} \frac{3^k}{k!} \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= S\begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} S^{-1} \end{aligned}$$

Vi beräknar S^{-1} och får

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Detta ger

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & e^2 - e^3 \\ e - e^2 & e & e - e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

6. (a) Vi har

$$\begin{aligned} F(1) &= x(0-1) + 1 = 1 - x \\ F(x) &= x(1-0) + 1 = 1 + x \\ F(x^2) &= x(2x - 0) + 1 = 1 + 2x^2 \\ F(x^3) &= x(3x^2 - 0) + 1 = 1 + 3x^3 \end{aligned}$$

Vi ser (eller kontrollerar om vi inte ser) att dessa polynom är linjärt oberoende. Alltså utgör $1-x$, $1+x$, $1+2x^2$ och $1+3x^3$ en bas för bilden. Eftersom bilden har dimension 4 och $\mathcal{P}_3$ har dimension 4 ser vi att kärnan är nollrummet vars bas är tomma mängden.

(b) Vi såg i (a) att bilden har dimension 4 och då $\mathcal{P}_3$ också har dimension 4 drar vi slutsatsen att F är bijektiv och därmed även injektiv och surjektiv.

7. Observera att

$$(1,4,8)^T \cdot (x,y,z)^T = x + 4y + 8z = f(x,y,z)$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger nu

$$\begin{aligned} |f(x,y,z)| &= |(1,4,8)^T \cdot (x,y,z)^T| \leq \\ &\leq \|(1,4,8)^T\| \cdot \|(x,y,z)^T\| \end{aligned}$$

Om $(x,y,z)^T \in S^2$ gäller $\|(x,y,z)^T\| = 1$ och vi har då

$$|f(x,y,z)| \leq \|(1,4,8)^T\| = 9$$

Likhet uppnås om vektorn $(x,y,z)^T$ är en multipel av vektorn $(1,4,8)^T$ och $f(x,y,z) > 0$ är positiv om $(x,y,z)^T$ är en positiv multipel av $(x,y,z)^T$. Vi har alltså att f:s största värde på S^2 är 9.

8. Ekvationen

$$11x^2 + 11y^2 + 14z^2 - 2xy - 8xz - 8yz = 6$$

kan skrivas

$$q(x) = x^T A x = 6$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -4 \\ -1 & 11 & -4 \\ -4 & -4 & 14 \end{pmatrix}$$

Vi diagonaliserar A ortogonalt. Vi har

$$0 = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 36\lambda^2 + 396\lambda - 1296$$

Detta ger egenvärdena $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 12$ och $\lambda_3 = 18$. Egenrummen svarande mot dessa egenvärden spänns upp av

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vi normaliserar dessa vektorer och får

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Om vi låter $S = (b_1|b_2|b_3)$ och låter D vara den diagonala matrisen med diagonal λ_1, λ_2 och λ_3 längs diagonalen diagonaliseras A ortogonalt som $S^T AS = D$. Om vi låter $u = S^T x$ beskrivs Y av

$$q(x) = u^T Du = 6u_1^2 + 12u_2^2 + 18u_3^2 = 6$$

vilket är ekvationen för en ellipsoid och axlarna för denna ellipsoid sammanfaller med u_1-, u_2- och u_3-axelarna. Det längsta avståndet till origo fås då $u_2 = u_3 = 0$ och är 1. Koordinaterna, relativt standardbasen, för de punkter där detta avstånd antas är

$$\pm 1 \cdot b_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det kortaste avståndet till origo fås då $u_1 = u_2 = 0$ och är $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Koordinaterna, relativt standardbasen, för de punkter där detta avstånd antas är

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} b_3 = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$