UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
Walter Mazorchuk
Örjan Stenflo

LINJÄR ALGEBRA II
Samtliga program
VT2017

Tentamen 2017–06–08

Skrivtid: 08.00 – 13.00. Tillåtna hjälpmedel: Skrivdon.

Alla lösningar skall vara försedda med motiveringar.
Varken bonuspoäng eller dugga kan tillgodoräknas till denna tenta.
Varje korrekt löst uppgift ger högst 5 poäng.
För betygen 3, 4, 5 krävs minst 18, 25, respektive 32 poäng.

1. Låt V vara det linjära delrum till $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ som spänns upp av matriserna

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas i V som består av några av dessa matriser.

(b) Bestäm koordinaterna för alla dessa matriser i den bas som du har valt ovan.

(c) Avgör om matrisen $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ tillhör V och om så är fallet, bestäm N:s koordinater i den bas som du har valt ovan.

2. Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som geometriskt betyder projektionen på planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ längs vektorn $v = (1, 2, -2)^t$. Bestäm F:s matris i standardbasen.

3. Låt N vara det delrum till $\mathbb{E}^4$ som spänns upp av vektorerna

$$v_1 = (0, 1, 1, 1)^t; \quad v_2 = (-1, 1, 1, 1)^t; \quad v_3 = (2, 2, 2, 2)^t.$$

(a) Bestäm en ON-bas i $N^{\perp}$.

(b) Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $x = (2, 1, 3, -1)^t$ på N.

(c) Bestäm avståndet från x till N samt avståndet från x till $N^{\perp}$.

Var god vänd

4. Låt G vara den linjära avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^4$ vars matris i standardbasen ges av

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Visa, utan att räkna ut det karakteristiska polynomet (sekularpolynomet), att både 0 och -3 är egenvärden till G . Bestäm också motsvarande geometriska multipliciteter samt tillhörande linjärt oberoende egenvektorer.

5.

(a) Formulera definitionen för en diagonaliserbar linjär avbildning.

(b) Den linjära avbildningen $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har i standardbasen matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avgör om G är diagonaliserbar.

(c) Ge ett exempel på en linjär avbildning som inte är diagonaliserbar och bevisa detta.

6. För $a \in \mathbb{R}$, definiera en kvadratisk form i $\mathbb{R}^3$ enligt

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2ax_2x_3.$$

Bestäm, för varje värde på a, den kvadratiska formen q:s signatur.

7. Lös följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = 2x(t) + y(t) + z(t), \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + 2y(t) + z(t), \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + y(t) + 2z(t); \end{cases} \qquad x(0) = 3,\ y(0) = 2,\ z(0) = 1.$$

8. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har i standardbasen matrisen $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Låt B vara en godtycklig inverterbar $n \times n$-matris och $C = B^{-1}AB$. Visa att det existerar en bas $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ sådan att F:s matris i basen $\mathbf{v}$ är C.

LYCKA TILL!

Lösning till problem 1. Vi har följande standardbas i $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi skriver koordinater för alla våra matriser i denna bas som kolonner och får matrisen

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Med hjälp av Gaußelimination reduceras denna matris till följande trappstegsform (där nollrader ej är utskrivna):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Detta medför att matriserna M_1 och M_3 utgör en bas $\mathbf{m}$ i V, att N inte tillhör V, och att koordinaterna för alla matriser M_i i denna bas är:

$$[M_1]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [M_2]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, [M_3]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$[M_4]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, [M_5]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, [M_6]_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 2. Vektorerna $v_1 = (1, -1, 0)^t$ och $v_2 = (0, 1, -1)^t$ utgör en bas i vårt plan och vektorn v ligger inte i planet. Därför utgör vektorerna v_1, v_2 och v en bas $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$. Eftersom $F(v_1) = v_1$, $F(v_2) = v_2$ och $F(v) = 0$, är F:s matris i denna bas följande:

$$[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har transformationsmatrisen

$$T_{\mathbf{std}}^{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Man räknar enkelt att inversen till denna matris är

$$(T_{\mathbf{std}}^{\mathbf{v}})^{-1} = T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{std}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Basbytesformeln ger nu svaret:

$$[F]^{\mathbf{std}}_{\mathbf{std}} = T^{\mathbf{v}}_{\mathbf{std}}[F]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}T^{\mathbf{std}}_{\mathbf{v}} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning till problem 3. $N^{\perp}$ består av alla vektorer som är ortogonala mot v_1, v_2, v_3, d.v.s. av alla vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ som är lösningar till följande l.e.s.:

$$\begin{cases} (v_1, \mathbf{x}) &= x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ (v_2, \mathbf{x}) &= -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ (v_3, \mathbf{x}) &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Genom att lösa detta system med hjälp av Gaußelimination får vi följande bas i lösningsrummet: $a_1 = (0, 1, -1, 0)^t$, $a_2 = (0, 1, 0, -1)^t$. Vi ortonormerar dessa vektorer med hjälp av Gram-Schmidts metod: $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^t$,

$$\tilde{w}_2 = a_2 - \frac{(a_2, a_1)}{(a_1, a_1)} a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, -2)^t$. Vektorerna w_1 och w_2 utgör en ON bas i $N^{\perp}$.

Den ortogonala projektionen av x på N beräknas på följande sätt:

$$\mathrm{pr}_N(x) = x - \mathrm{pr}_{N^{\perp}}(x) = x - (x, w_1)w_1 - (x, w_2)w_2 = (2, 1, 1, 1)^t.$$

Avståndet från x till N är:

$$|x - \mathrm{pr}_N(x)| = |(0, 0, 2, -2)^t| = \sqrt{0 + 0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Avståndet från x till $N^{\perp}$ är:

$$|\mathrm{pr}_N(x)| = |(2, 1, 1, 1)| = \sqrt{4 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{7}.$$

Lösning till problem 4. För att bestämma alla egenvektorer till egenvärdeskandidaten 0 ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - 0E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Med hjälp av Gaußelimination reduceras matrisen till följande trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Detta system har tre linjärt oberoende lösningar. Speciellt, eftersom vi har nollskilda lösningar, följer det att 0 är ett egenvärde som har geometriskt multiplicitet 3. Som en bas i rummet av alla egenvektorer med egenvärdet 0 kan man ta t.ex. $v_1 = (1, -1, 0, 0)^t$, $v_2 = (2, 0, -1, 0)^t$ och $v_3 = (2, 0, 0, -1)^t$.

För att bestämma alla egenvektorer till egenvärdekandidaten -3 ska vi lösa det homogena linjära ekvationssystemet med matrisen

$$B - (-3)E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Med hjälp av Gaußelimination reduceras matrisen till följande trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Detta system har en linjärt oberoende lösning. Speciellt, eftersom vi har nollskilda lösningar, följer det att -3 är ett egenvärde som har geometriskt multiplicitet 1. Som en bas i rummet av alla egenvektorer med egenvärdet -3 kan man ta t.ex. $v_4 = (-1, -2, 1, 2)^t$.

Lösning till problem 5. Låt V vara ett linjärt rum och $F : V \to V$ en linjär avbildning. Avbildningen F kallas för diagonaliserbar om det finns en bas i V sådan att F:s matris i denna bas är diagonal.

G:s sekularpolynom är $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Detta polynom har två nollställen $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$. Eftersom sekularpolynomet faktoriseras som produkten av två polynom av grad 1 och alla nollställen har algebraisk multiplicitet 1, har de också geometrisk multiplicitet 1, som medför att G är diagonaliserbar.

Betrakta den linjära avbildningen $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vars matris i standardbasen är $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. H:s sekularpolynom är λ^2. Detta polynom har bara ett nollställe $\lambda_1 = 0$. Detta nollställe har algebraisk multiplicitet 2. Eftersom matrisen A har rang 1, existerar det bara en linjärt oberoende egenvektor till A med egenvärdet $\lambda_1 = 0$. Detta innebär att λ_1:s geometriska multiplicitet är $1 < 2$, som medför att H inte är diagonaliserbar.

Lösning till problem 6. Med hjälp av kvadratkompletering får vi:

$$q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 2(1 - a)x_2x_3.$$

Låt $y_1 = x_1 - x_2 + x_3$. Definiera y_2 och y_3 så att $x_2 = y_2 + y_3$ och $x_3 = y_2 - y_3$ (dvs $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ och $y_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)$). Vi får

$$q(x) = y_1^2 + 2(1 - a)(y_2 + y_3)(y_2 - y_3) = y_1^2 + 2(1 - a)y_2^2 - 2(1 - a)y_3^2.$$

Om $a = 1$, blir signaturen $(1, 0, 2)$. För alla andra a blir signaturen $(2, 1, 0)$.

Lösning till problem 7. Vi skriver systemet på följande form:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

och försöker att diagonalisera systemets matris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Genom att räkna ut A:s sekularpolynom får vi egenvärden $\lambda_1 = 1$ av multiplicitet 2 och $\lambda_2 = 4$ av multiplicitet 1. Matrisen A är diagonaliserbar eftersom den är symmetrisk, som medför att diagonalformen blir

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Egenvektorer för $\lambda_1 = 1$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Två linjärt oberoende lösningar är t.ex. $v_1 = (1, 0, -1)^t$ och $v_2 = (0, 1, -1)^t$.

Egenvektorer för $\lambda_1 = 4$ är lösningar till det homogena systemet med matrisen

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En linjärt oberoende lösning är t.ex. $v_3 = (1, 1, 1)^t$.

Vi får därmed transformationsmatrisen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

och identiteter $D = T^{-1}AT$, $A = TDT^{-1}$, där

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu byter $x(t)$, $y(t)$ och $z(t)$ mot respektive $u(t)$, $v(t)$ och $w(t)$ sådana att

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

får vi systemet

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} &= & u(t), \\ \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= & v(t), \\ \frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} &= & 4w(t); \end{cases} \qquad u(0) = 1, v(0) = 0, w(0) = 2.$$

Ekvationen $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)$ har allmän lösning $u(t) = C\exp(t)$. Från $1 = u(0) = C\exp(0)$ får vi $C = 1$ och därmed $u(t) = \exp(t)$.

Ekvationen $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)$ har allmän lösning $v(t) = C\exp(t)$. Från $0 = v(0) = C\exp(0)$ får vi $C = 0$ och därmed $v(t) = 0$.

Ekvationen $\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = 4w(t)$ har allmän lösning $w(t) = C\exp(4t)$. Från $2 = w(0) = C\exp(0)$ får vi $C = 2$ och därmed $w(t) = 2\exp(4t)$.

Nu använder vi att

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u(t) \\ u(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

och får svaret $x(t) = \exp(t) + 2\exp(4t)$, $y(t) = 2\exp(4t)$ och $z(t) = -\exp(t) + 2\exp(4t)$.

Lösning till problem 8. Låt $\mathbf{v}$ vara den bas i $\mathbb{R}^n$ för vilken transformationsmatrisen $T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{std}}$ är B^{-1}. Vi har då $T_{\mathbf{std}}^{\mathbf{v}} = B$. Enligt basbytesformeln, ges F:s matris i basen $\mathbf{v}$ av

$$[F]_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = T_{\mathbf{v}}^{\mathbf{std}}[F]_{\mathbf{std}}^{\mathbf{std}}T_{\mathbf{std}}^{\mathbf{v}} = B^{-1}AB = C.$$