Linjär Algebra II: Tenta 2016-03-24: Lösningar

1. Låt $U \subset \mathbb{R}^4$ vara delrummet spänt upp av vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Beräkna

   (a) en bas B till delrummet U,

   (b) $\dim U$,

   (c) $[\mathbf{v}_4]_B$.

   Lösning: Vi radtransformerar matrisen $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_5)$ till trappstegsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Pivotkolonnerna är förste, tredje och femte kolonnen. Således utgör $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ en bas till U och vi har $\dim U = 3$, i själva verket är alltså U ett koordinathyperplan:

$$U = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \times \mathbb{R}.$$

   Ytterligare

$$[\mathbf{v}_4]_B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   pga.

$$\mathbf{v}_4 = \frac{1}{4} \left(-3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \right).$$

2. Beräkna egenvärdena och de tillhörande egenrummen för matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Svar: Vi får

$$\det(xI_3 - A) = (x+2)(x-1)(x-3),$$

egenvärdena är alltså $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ med tillhörande egenrum

$$V_{-2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beräkna en matris P, sådant att $P^{-1}AP$ är en diagonalmatris samt potenserna $A^n, n \in \mathbb{N}$.

Lösning: Vi har

$$\det(xI_2 - A) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3),$$

dvs. A har egenvärdena $-1, 3$. Egenrummen blir

$$V_{-1} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_3 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Således har vi

$$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

med

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Till sist

$$A^n = P\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}.$$

4. Låt $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara speglingen vid planet $x + y + z = 0$. Hitta matrisen A till f.

Lösning: Speglingen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vid ett plan $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ har fomen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{2\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n}.$$

Här kan vi ta $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sedan ger $A = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3))$ resultatet

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av alla reella polynom av grad $\leq n$ med den inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

   (a) Beräkna den ortogonala projektionen $\mathrm{pr}_W(x^2)$ med delrummet

   $$W := \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2.$$

   (b) Beräkna den minsta distansen $\mathrm{dist}(x^2, W)$ av x^2 till något polynom $f \in W$.

6. Hitta alla $k \in \mathbb{R}$, för vilka den kvadratiska formen

   $$Q(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + kz^2 + 4xy - 2xz - 2yz$$

   är positiv definit.

   Lösning: Vi har

   $$Q(x, y, z) = (x, y, z) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   Eftersom $5 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, är Q positiv definit omm Q's matris har determinant > 0. Men

   $$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & k \end{vmatrix} = k - 2,$$

   Således är Q postiv definit omm $k > 2$.

7. Ekvationen
$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 1$$
beskriver en yta i $\mathbb{R}^3$. Bestäm ytans typ och de punkter i den där avståndet till origo är störst.

Lösning: Vi har

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = (x, y, z) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matrisen har sekularpolynom $(x-2)^2(x-4)$ och

$$V_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, V_4 = \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Om nu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \zeta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

så blir
$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2.$$

Således är ytan $2\xi^2 + 2\eta^2 + 4\zeta^2 = 1$ en rotationsellipsoid, och punkterna med $\zeta = 0$ har största avståndet till origo, med andra ord det handlar om cirkeln

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{2}.$$

8. Låt $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n)$ vara en radvektor och A den $n \times n$-matris, vars alla radvektorer är $\mathbf{c}$, dvs.

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

(a) Bestäm kolonnrummet $K(A)$.

Svar: Med $\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$K(A) = \begin{cases} \mathbb{R}\mathbf{e} & , \quad \text{om } \mathbf{c} \neq 0 \\ \{0\} & , \quad \text{om } \mathbf{c} = 0 \end{cases} .$$

(b) Vilka egenvärden har A?

Lösning: Om $n > 1$, utgör $0, \mu := c_1 + ... + c_n$ egenvärdena till A. Nämligen: $V_0 = N(A) \neq \{0\}$ pga. $\dim N(A) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1 > 0$. Om däremot $\lambda \neq 0$ är ett egenvärde med tillhörande egenvektor $\mathbf{v}$, gäller $\mathbf{v} \in K(A) = \mathbb{R}\mathbf{e}$, medan $A\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$.

(c) När är A diagonaliserbar?

Lösning: Om $\mu \neq 0$, är A diagonaliserbar: Låt $\mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ vara en bas till $N(A)$. Sedan är $\mathbf{e}, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ en bas till $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A. Anta nu $\mu = 0$: Om också $\mathbf{c} = 0$ resp. $A = 0$, så är A förstås diagonaliserbar, annars inte: En diagonaliserbar matris med 0 som enda egenvärdet är ju nollmatrisen.

(d) Ange sekularpolynomet $\chi_A(x) \in \mathcal{P}_n$.

Svar: $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \mu)$.

Glad Påsk!