UPPSALA
UNIVERSITET

2974058

Försättsblad tentamen/ Examination cover

Teknisk- naturvetenskapliga fakulteten /
Faculty of Science and Technology

Kursnamn / Course name

Linjär algebra och geometri I

Kurskod / Course code

1MA025

Provkod / Test code

1000

Tentamensdatum / Examination date

Y/Y/Y/Y - M/M - D/D

2018-10-23

Anonymkod / Anonymous code

AR-0095-NLC

2974058

Utskriven 2018-11-15 kl. 10:45:32

Försättsblad

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Skrivningsdatum 2018-10-23

Inlämningstid: kl 12,50

Denna lapp **skall** följa med skrivningen! Skriv bara på ena sidan av bladet! Skriv kodnummer på varje inlämnat blad! Använd ej rödpenna i lösningarna! Häfta ihop samtliga blad!

Kursens namn: Linjär algebra och geometri I

Kodnummer: AR-0095-NLC

- [ ] Kandidatprogram/ma
- [ ] Kandidatprogram/fy
- [ ] Kandidatprogram/ke
- [ ] Kandidatprogram/geo
- [ ] Kandidatprogram/data
- [ ] Masterprogram/ma
- [ ] Masterprogram/TBV
- [ ] Masterprogram/data
- [ ] Lärarprogrammet
- [ ] Fristående kurs
- [ ] Byggnadsingenjörsprogrammet
- [ ] Elektronikingenjörsprogrammet
- [ ] Maskiningenjörsprogrammet
- [x] Informationsteknologiprogrammet
- [ ] Kemiteknikprogrammet
- [ ] Miljö- och vattenteknikprogrammet
- [ ] Energisystemprogrammet
- [ ] Teknisk fysik m materialvetenskapsprogrammet
- [ ] Teknisk fysikprogrammet
- [ ] Elektroteknikprogrammet
- [ ] Molekylär bioteknikprogrammet
- [ ] System i teknik och samhälle
- [ ] Annat program, nämligen ____________

Sätt ett kryss för varje behandlat problem!

	↓	Poäng	Sign.	Anm.
1	X	5	Eil	
2	X	5-	RP	
3	X	5	SP	
4	X	5	C.S.	
5	X	5-	C.S.	
6	X	5	WA	
7	X	5	SP	
8	X	5	C.S.	
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Σ		40		

För institutionens anteckningar:

1. Lös

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Systemet med x_i, totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b) Rangen är 4.

R

a) ← "0 = 1" ⇒ saknar Lösning!

Systemet med y_i, totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 x rad 3 + rad 1

½ · rad 3

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

b) Rangen är 3.

R

Lösning: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

□

AR-0095-NLC

2. $$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

$AXB=I$ vänstermultiplicera med A^{-1}, höger — " — B^{-1}

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}X\underbrace{BB^{-1}}_{I} \xrightarrow{\text{höger}} = A^{-1}IB^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}B^{-1}}. \quad (1)$$

$$\left(\operatorname{adj}(A)\right)^T=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}+1 & -1 & -1\\ +2 & -2 & -1\\ -6 & +5 & 3\end{pmatrix}^T$$

$$\det(A)=[\text{Sarrus}]=1\cdot3\cdot0+0\cdot(-1)\cdot1+2\cdot2\cdot1-1\cdot3\cdot2-1\cdot(-1)\cdot1-0\cdot2\cdot0=-1$$

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}=-\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ -1 & -2 & 5\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\left(\operatorname{adj}(B)\right)^T=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-4 & +3 & +2\\ +3 & -2 & -1\\ -1 & +1 & 0\end{pmatrix}^T$$

$$\det(B)=[\text{Sarrus}]=1\cdot2\cdot(-1)+1\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot2-1\cdot2\cdot1-2\cdot1\cdot1-(-1)\cdot2\cdot1=1$$

$$B^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(B)}{\det(B)}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad (3)$$

5

$$X \underset{=}{\overset{(1)}{=}} A^{-1}B^{-1} \underset{=}{\overset{(2),(3)}{=}} \begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ 1 & 2 & -5\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4-6+12 & -3+4-6 & 1-2+0\\ -4+6-10 & 3-4+5 & -1+2+0\\ -4+3+6 & 3-2-3 & -1+1+0\end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Svar}}$: $$X=\begin{pmatrix}10 & -5 & -1\\ -8 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

AR-0095-NLC

3. Beräkna volymen av parallellepipeden med kanter $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och avgör om $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är linjärt oberoende.

$$\text{Volymen} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} \quad \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{Volymen}}} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = |(4-4)| = |0| = \underline{\underline{0.}}$$

$\vec{u} \times \vec{v}$ är (per konstruktion) ortogonal mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Att $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ betyder att $\vec{w}$ är ortogonal mot en vektor som är ortogonal mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$. $\vec{w}$ ligger således i samma plan som spänns upp av $\vec{u}$ och $\vec{v}$. ($\vec{u}$ och $\vec{v}$ är linjärt oberoende.)

Bra!

Svar: Volymen $= 0$. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är linjärt <u>beroende</u>.

$\square$

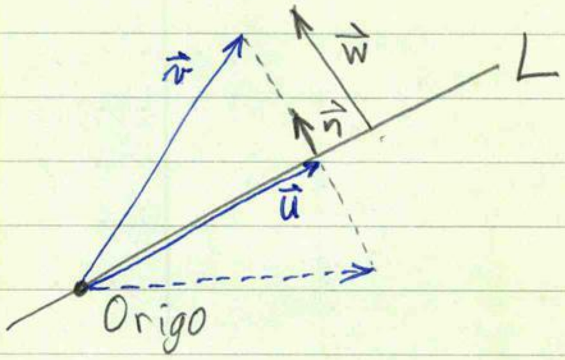
5

AR-0095-NLC

4. Låt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i $L: \underbrace{2x-3y=0}$ genom origo.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

a)



$$f(\vec{v}) = \vec{v} - 2 \cdot \vec{w}$$
$$= \vec{v} - 2 \cdot \underbrace{\text{proj}_{\vec{n}} \vec{v}}_{\vec{w}}$$

$$\vec{w} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \frac{2v_1 - 3v_2}{2^2 + (-3)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4v_1 - 6v_2 \\ -6v_1 + 9v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}) = \vec{v} - 2\vec{w} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13v_1 \\ 13v_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 8v_1 - 12v_2 \\ -12v_1 + 18v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5v_1 + 12v_2 \\ 12v_2 - 5v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow [f] = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4. b) Spegelbilden av $P = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ i L. Det innebär $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+12 \\ 12-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

4. c) Avståndet mellan P och L $\overset{\text{när } \vec{v} = \overrightarrow{OP}}{=} \|\vec{w}\| = \left\| \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} \right\|$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4-6 \\ -6+9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}. \qquad \square$$

5

AR-0095-NLC

5. Planet E ges av $-x+2y+z=6$
Planet F är ortogonalt mot $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ och går genom $P=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Skärningslinjen mellan planen fås genom att uppfylla båda planens ekvationer.

$\vec{n}=(3,-2,1)$

Planet F har ekvation $3(x-x_0)-2(y-y_0)+(z-z_0)=0$
där $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,3)$ dvs punkten P.

$$
\begin{aligned}
F:\ & 3(x-1)-2(y-1)+(z-3)=0\\
& 3x-3-2y+2+z-3=0\\
& 3x-2y+z-3+2-3=0\\
& 3x-2y+z-4=0\\
& 3x-2y+z=4
\end{aligned}
$$

Linjen som skär E och F ges av ekvations-systemet:

$$
\begin{cases}-x+2y+z=6\\ 3x-2y+z=4\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}-1&2&1\\3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}
$$

Totalmatris: $\left(\begin{array}{ccc|c}-1&2&1&6\\3&-2&1&4\end{array}\right)\begin{array}{c}(-1)\ (3)\\(1)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&-6\\0&4&4&22\end{array}\right)\begin{array}{c}\\(\tfrac{1}{4})\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-1&6\\0&1&1&\tfrac{11}{2}\end{array}\right)$

Sätt $z=t$ (3). Rad2 $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $y+t=\frac{11}{2}$, $y=\frac{11}{2}-t$ (2)
Rad1 $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ $x-2y-t=6$, $x=6+2y+t\overset{(2)}{=}6+11-2t+t=17-t$ (1)

(1),(2),(3) ger linjen som skär planen: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\\frac{11}{2}\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$.

□

5

AR-0095-NLC

6. A inverterbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

För någon 5×5-matris A sådan att $A = \begin{pmatrix} B & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \end{pmatrix}$
där B är någon 3×3-matris så gäller

$$\det(A) = \begin{vmatrix} B & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} B & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} B & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & b \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)\det(B) \quad (1)$$

I vårt fall är $a = x-1$ (a) och $b = x-5$ (b). $\Rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$\overset{(a),(b)}{=} (x-1+x-5)(x-1-x+5) = (2x-6)\cdot 4 = 8(x-3) \quad (2)$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\overset{[\text{Sarrus}]}{=} (x+2)(x^2+1+1-x-1-x) = (x+2)(x^2-2x+1) = (x+2)(x-1)^2 \quad (3)$$

$$\therefore \det(A) \overset{(1)}{=} (a^2-b^2) \overset{(2)}{=} 8(x-3)\det(B) \overset{(3)}{=} 8(x-3)\cdot(x+2)(x-1)^2$$

Svar: A är inverterbar när $\underline{x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}}$. $\square$

5

AR-0095-NLC

7. f på $\mathbb{R}^3$ är rotation med vinkel π kring axeln $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, dvs kring x-axeln. Geometriskt inses att vid en sådan rotation av en punkt (x,y,z) så kommer x att behålla sitt värde (eftersom vi roterar kring x-axeln), medan y och z blir till beloppet lika stora men med omvänt tecken. Punkten (x,y,z) kommer således att transformeras till $(x,-y,-z)$.

f:s matris blir (trivialt) $[f] = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

Kontroll: $[f]\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\\-z\end{pmatrix}$.

På motsvarande sätt är g rotation runt y-axeln, och h rotation runt z-axeln. Med ett helt analogt resonemang (symmetri, byte av namn på axlarna) inses att

$$[g] = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ och } [h] = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$[i] = [h\circ g\circ f] = [h]\cdot[g]\cdot[f] = [h]\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Matris-multiplikation

$$= [h]\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Svar:

$i = h\circ g\circ f$ blir enhetsmatrisen. Den geometriska tolkningen är att när vi roterar en punkt runt – i tur och ordning – var och en av de tre axlarna, så kommer vi tillbaka till den punkt där vi startade. □

5

AR-0095-NLC

8. M symmetrisk $\iff M^T = M$

M antisymmetrisk $\iff M^T = -M$

a) Påstående: för varje kvadratisk matris A gäller att $\frac{1}{2}(A+A^T)$ är symmetrisk. Faktorn $\frac{1}{2}$ gör varken till eller ifrån, så det räcker att visa att $(A+A^T)$ är symmetrisk.

A en 2x2-matris; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (1)

Då är $A+A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12}+a_{21} \\ a_{21}+a_{12} & 2a_{22} \end{pmatrix}$

som uppenbart är symmetrisk.

Beviset för en 3x3-matris är analogt. (Men det blir mer att skriva.) Detsamma gäller för kvadratiska matriser av ordning 4 och högre. $\square$

b) Låt A vara kvadratisk:

$$A = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^T = \frac{1}{2}(A+A^T) + \frac{1}{2}(A-A^T)$$

I a)-uppgiften visade jag att $\frac{1}{2}(A+A^T)$ är symmetrisk.

Definiera C som $C = \frac{1}{2}(A-A^T)$. Om jag kan visa att C är antisymmetrisk, dvs att $C^T = -C$, då är jag klar.

Låt A vara som i (1). Då är 5

$$C^T = \left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T = \frac{1}{2}(A-A^T)^T = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right)^T$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} \\ a_{21}-a_{12} & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_{21}-a_{12} \\ a_{12}-a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

och

$$-C = -\frac{1}{2}(A-A^T) = \frac{1}{2}(A^T-A) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a_{21}-a_{12} \\ a_{12}-a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

En jämförelse element för element mellan (2) och (3) visar att $C^T = -C$

För kvadratiska matriser av ordning 3 och högre är beviset analogt. $\square$