



UPPSALA
UNIVERSITET



9015022043

Försättsblad tentamen/ Examination cover

Teknisk- naturvetenskapliga fakulteten /
Faculty of Science and Technology

Kursnamn / Course name

Baskurs i matematik

Skriv så här / Write like this

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y
Z	Å	Ä	Ö								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Kurskod / Course code

1 M A 0 1 0

Provkod / Test code

5 0 0 0

Tentamensdatum / Examination date

Y/Y/Y/Y M/M D/D
2 0 1 7 - 0 9 - 2 5

Anonymkod / Anonymous code

A H - 0 1 5 4 - 0 5



UPPSALA
UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Försättsblad

Skrivningsdatum

20 - -

Inlämningstid:

kl 15:00

Denna lapp skall följa med skrivningen! Skriv bara på ena sidan av bladet!
Skriv kodnummer på varje inlämnat blad! Använd ej rödpenna i lösningarna!
Häfta ihop samtliga blad!

Kursens namn: Bas matte

Kodnummer: AH 0154

- | | | |
|--|--|---|
| <input type="checkbox"/> Kandidatprogram/ma | <input type="checkbox"/> Lärarprogrammet | <input type="checkbox"/> Energisystemprogrammet |
| <input type="checkbox"/> Kandidatprogram/fy | <input type="checkbox"/> Fristående kurs | <input type="checkbox"/> Teknisk fysik m materialvetenskapsprogrammet |
| <input type="checkbox"/> Kandidatprogram/ke | <input type="checkbox"/> Byggnadsingenjörsprogrammet | <input type="checkbox"/> Teknisk fysikprogrammet |
| <input type="checkbox"/> Kandidatprogram/geo | <input type="checkbox"/> Elektronikingenjörprogrammet | <input type="checkbox"/> Elektroteknikprogrammet |
| <input checked="" type="checkbox"/> Kandidatprogram/data | <input type="checkbox"/> Maskiningenjörprogrammet | <input type="checkbox"/> Molekylär bioteknikprogrammet |
| <input type="checkbox"/> Masterprogram/ma | <input type="checkbox"/> Informationsteknologiprogrammet | <input type="checkbox"/> System i teknik och samhälle |
| <input type="checkbox"/> Masterprogram/TBV | <input type="checkbox"/> Kemiteknikprogrammet | <input type="checkbox"/> Annat program, nämligen _____ |
| <input type="checkbox"/> Masterprogram/data | <input type="checkbox"/> Miljö- och vattenteknikprogrammet | |

Sätt ett kryss för varje behandlat problem!

	↓	Poäng	Sign.	Anm.
1	X	3	MW	
2	X	3	Q.X.	
3	X	2	Leif	
4	X	2	AB	
5	X	2	JA	
6	X	3	RP	
7	X	0	2AB	
8	X	1	GH.	
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
Σ		16		

För institutionens anteckningar:

$$1. \quad \frac{(2-i)(3+i)}{1-i} = \frac{(2-i)(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(2 \cdot 3 + 2i - 3i - i^2)(1+i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{(7-i)(1+i)}{1-(-1)} = \frac{7 \cdot 1 + 7i - i - i^2}{2} = \frac{8+6i}{2} = \underline{\underline{4+3i}}$$

(3)

2.

$$\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} \cdot \frac{x+1}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1) + (x+1)} = \frac{-2}{2x} = \underline{\underline{-\frac{1}{x}}}$$

3

3. Om ordningen spelar roll, så kan kulorna i glassbägaren väljas på $8 \cdot 7 \cdot 6$ olika sätt

MEN varje uppsättning av tre kulor kan kombineras på $3 \cdot 2 \cdot 1$ olika sätt

Alltså finns $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ olika sätt $= 8 \cdot 7 = 56$.

Svar: glassbägaren kan kombineras på 56 olika sätt.

②

$$4. \quad x^3 = x, \quad x^3 - x = 0, \quad x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{eller} \quad x^2 - 1 = 0 \quad (\text{dvs } x^2 = 1, \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1)$$

Svar: $x = 0, x = 1, x = -1$ utgör alla 3 lösningar.

2

5. a) $x - \frac{1}{2} > 0, x > \frac{1}{2}$: $x - \frac{1}{2} = 3x - \frac{1}{2}$, $0 = 2x$, $x = 0$
 ↑ strider mot $x > \frac{1}{2}$ ej lösning

b) $x - \frac{1}{2} < 0, x < \frac{1}{2}$: $\frac{1}{2} - x = 3x - \frac{1}{2}$, $1 = 4x$, $x = \frac{1}{4}$
 räknesfel

Slutsats, prova! med $x = \frac{1}{2}$ blir VL = 0, HL = 1, dvs ej lösning

Svar: det finns inga reella tal x som uppfyller ekvationen

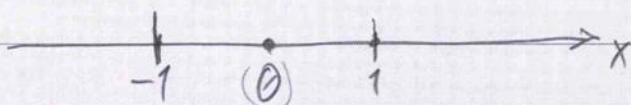
$$|x - \frac{1}{2}| = 3x - \frac{1}{2}$$

2

$$6. \quad \frac{1}{x+1} > \frac{x}{x-1},$$

a) Division med noll ej tillåten $\Rightarrow \left. \begin{matrix} x = -1 \\ x = +1 \end{matrix} \right\}$ ej tillåtna

b) Dela upp x -axeln i tre intervall!



Lägre intervallet, $x < -1$: $(x+1) < 0$ och $(x-1) < 0$
 Multiplicera båda sidor med $(x+1)(x-1)$ som är > 0 (ty) \leftarrow
 $\Rightarrow x-1 > x(x+1), \quad x-1 > x^2+x, \quad x^2 < -1$
 Inga reella tal uppfyller $x^2 < -1$ så ingen lösning för $x < -1$.

Mittensta intervallet, $-1 < x < 1$: $(x+1) > 0$ och $(x-1) < 0$ \leftarrow
 Multiplicera (igen!) båda sidor med $(x+1)(x-1)$ som nu är < 0 (ty) \leftarrow
 $x-1 < x(x+1), \quad x-1 < x^2+x, \quad x^2 > -1, \quad |x^2+1| > 0$
 vilket är sant för alla x i intervallet.

Översta intervallet, $x > 1$: $(x+1) > 0$ och $(x-1) > 0$
 Multiplicera (ängo) båda sidor med $(x+1)(x-1)$ som är > 0
 $x-1 > x(x+1), \quad x-1 > x^2+x, \quad x^2 < -1$
 Det finns inga reella tal som uppfyller $x^2 < -1$

Svar: $\{x : -1 < x < +1 \}$ uppfyller likheten $\frac{1}{x+1} > \frac{x}{x-1}$.
 Inga andra x

(3)

7. Beräkna $\sum_{k=0}^{2n} (2^k - k)$ när $n \in \mathbb{N}$

$n=0$: $\sum_{k=0}^0 (2^k - k) = 2^0 - 0 = 2^0 = 1$

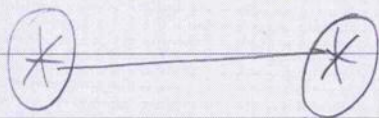
$n=1$: $\sum_{k=0}^2 (2^k - k) = (2^0 - 0) + (2^1 - 1) + (2^2 - 2) = 1 + 1 + 2 (= 4)$

$n=2$: $\sum_{k=0}^4 (2^k - k) = (2^0 - 0) + (2^1 - 1) + (2^2 - 2) + (2^3 - 3) + (2^4 - 4)$

$n > 2$: $\sum_{k=0}^{2n} (2^k - k) = \sum_{k=0}^{2n} 2^k - \sum_{k=0}^{2n} k$

Fel jäms Gauss visade (när han var sju år) att $\sum_{k=0}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$

Ersätt m med $2n$: $\sum_{k=0}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$



Vi har att $\sum_{k=0}^m p^k = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^m$

eller $(1-p) \sum_{k=0}^m p^k = \underbrace{(1-p)}_{=0} + \underbrace{(p-p^2)}_{=0} + \underbrace{(p^2-p^3)}_{=0} + \dots + (p^m - p^{m+1}) = 1 - p^{m+1}$

d v s $\sum_{k=0}^m p^k = \frac{1-p^{m+1}}{1-p} = \frac{p^{m+1}-1}{p-1} \stackrel{(\text{p}=2 \text{ i vårt fall})}{=} \frac{2^{m+1}-1}{2-1} \stackrel{m=2n}{=} \frac{2^{2n+1}-1}{1}$

Svar: $\sum_{k=0}^{2n} (2^k - k) = 2^{2n+1} + 2n^2 + n - 1$

~~Sammanfattning i en geometrisk~~ (2)

$$\begin{aligned} 8. \quad \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 &= (\sqrt{a})^2 + 2(\sqrt{a}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \\ &= a + 2 + \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Svar: Eftersom a är ett heltal följer direkt att $a + 2 + \frac{1}{a}$ är rationellt.

Värdet? motsumma som
summa av heltal och rationellt
eller skriv som ett bråkströk.
①