UPPSALA UNIVERSITET

9015022043

Försättsblad tentamen/ Examination cover

Teknisk- naturvetenskapliga fakulteten /
Faculty of Science and Technology

Kursnamn / Course name
Baskurs i matematik

Skriv så här / Write like this

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y
Z	Å	Ä	Ö								
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Kurskod / Course code	Provkod / Test code
1MA010	1000

Tentamensdatum / Examination date	Anonymkod / Anonymous code
Y/Y/Y/Y M/M D/D 2017-10-27	AS-0154-05

Försättsblad

Skrivningsdatum 2017-10-27

Inlämningstid: kl 12^{54}

UPPSALA UNIVERSITET

Matematiska institutionen

Denna lapp **skall** följa med skrivningen! Skriv bara på ena sidan av bladet! Skriv kodnummer på varje inlämnat blad! Använd ej rödpenna i lösningarna! Häfta ihop samtliga blad!

Kursens namn: Baskurs i matematik

Kodnummer: AS-0154

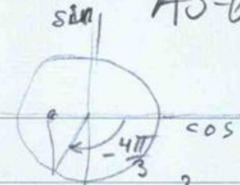
- ☐ Kandidatprogram/ma
- ☐ Kandidatprogram/fy
- ☐ Kandidatprogram/ke
- ☐ Kandidatprogram/geo
- ☒ Kandidatprogram/data
- ☐ Masterprogram/ma
- ☐ Masterprogram/TBV
- ☐ Masterprogram/data
- ☐ Lärarprogrammet
- ☐ Fristående kurs
- ☐ Byggnadsingenjörsprogrammet
- ☐ Elektronikingenjörsprogrammet
- ☐ Maskiningenjörsprogrammet
- ☐ Informationsteknologiprogrammet
- ☐ Kemiteknikprogrammet
- ☐ Miljö- och vattenteknikprogrammet
- ☐ Energisystemprogrammet
- ☐ Teknisk fysik m materialvetenskapsprogrammet
- ☐ Teknisk fysikprogrammet
- ☐ Elektroteknikprogrammet
- ☐ Molekylär bioteknikprogrammet
- ☐ System i teknik och samhälle
- ☐ Annat program, nämligen ____________

Sätt ett kryss för varje behandlat problem!

	↓	Poäng	Sign.	Anm.
1	X	1	RP	
2	X	1	Q.X.	
3	X	1	MW	
4	X	1	GH.	
5	X	1	JH	
6	X	1	JA	
7	X	1	GH.	
8	X	1	WJH	
9	X	1	JH	
10	X	2	MW	
11	X	2	AB	
12	X	0	RP	
13	X	3	JH	
14	X	3	GH.	
15	X	4	JA	
16	X	4	Q.X.	
17	X	5	WJH	
18	X	5	MW	
Σ		37 +5=42	5	

För institutionens anteckningar:

AS-0154



A1. $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 1

A2. $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 (27)^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 \left(3^{\frac{3}{2}}\right) = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3$
$= \frac{3}{2}.$ 1

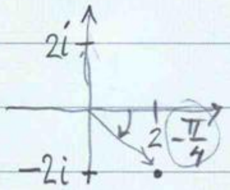
A3. $x + y = 2$ 1 ty $x+y=2$ går genom både $(0,2)$ och $(1,1)$ ty $0+2=2$ och $1+1=2$.

A4. Division med $1-x^2$ kräver att $1-x^2 \neq 0$, dvs att $|x| \neq 1$

$$\frac{1-x^4}{1-x^2} - x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2} - \frac{x^2(1-x^2)}{1-x^2} = \frac{1-x^4-x^2+x^4}{1-x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1$$

Bra. 1

A5.



Svar: $\arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.
$\frac{7\pi}{4}$ är ett svar. 1

A6. $|(1+i)(3-i)| = |3-i+3i-i^2| = |4+2i| = (4^2+2^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{20}$ 1

A7. $a \neq 0$: $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}}{(a^{\frac{1}{2}})^{-1}} = a^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ 1 $a \neq 0$

A8. $\sum_{k=2}^{4} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 9 + 20 = 29$

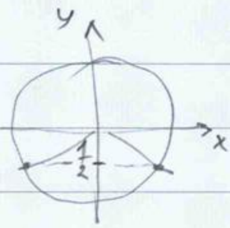
1

Lös ekvationen

AS-0154

B9 $\sin 3x = -\frac{1}{2}$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$:



$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \theta = -\cancel{\frac{\pi}{4}} + 2\cdot n, & n \in \mathbb{Z} \\ \text{eller } \theta = -\frac{3\pi}{4} + 2n, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Så $3x = -\frac{\pi}{4} + 2n$, $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}n$

eller $3x = -\frac{3\pi}{4} + 2n$, $x = -\frac{3\pi}{12} + \frac{2}{3}n$

Svar: $\left.\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}n \\ \text{eller } x = -\frac{3\pi}{12} + \frac{2}{3}n \end{array}\right\}$ där $n \in \mathbb{Z}$

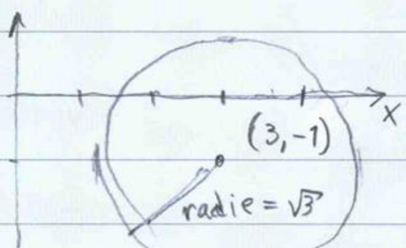
Annars ok

1

B10. Mittpunkt & radie till $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 7 = 0$

Skriv om ekvationen som $(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 7 = 0$

eller $(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (\sqrt{3})^2$



Svar: cirkelns mittpunkt är $(x,y) = (3,-1)$

— " — radie är $\sqrt{3}$

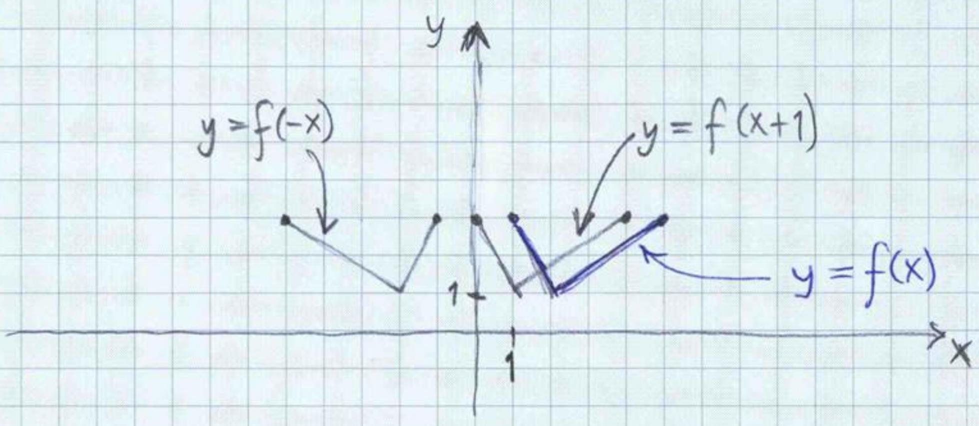
2

B11

UU 2017

AS-0154

B 11.



[given]

Bra!

2

B 12. $\frac{1}{\cos^2 x} \overset{?}{=} \tan^2 x + 1$, $\quad \frac{1}{(\cos x)^2} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + 1$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Multiplicera båda led med $(\cos x)^2$:

$$1 = \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} \cdot (\cos x)^2 + (\cos x)^2, \quad \underline{1 = \sin^2 x + \cos^2 x} \ \square$$

(Detta är "trignometriska ettan" som är sann enligt Pytagoras.)

0

B 13. $\lg x + \lg(x-3) = 1$

Här måste vi kräva att $x-3>0$, dvs $x>3$.
(Och $x>0$ men det är redan uppfyllt om $x>3$.) Ok

$$10^{\lg x + \lg(x-3)} = 10^1$$

Ok

$$10^{\lg x} \cdot 10^{\lg(x-3)} = 10$$

$$x \cdot (x-3) = 10, \quad x^2 - 3x = 10$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \frac{40}{4}, \quad x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} (\pm) \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ej minus pga kravet $x>3$ $(x>0)$ Ok

Svar: $\underline{x = 5}$ (löser ekvationen $\lg x + \lg(x-3) = 1$)

3

UU 2017

AS-0154

B14. koefficienten framför x^{30} i $(2-x^2)^{70}$?

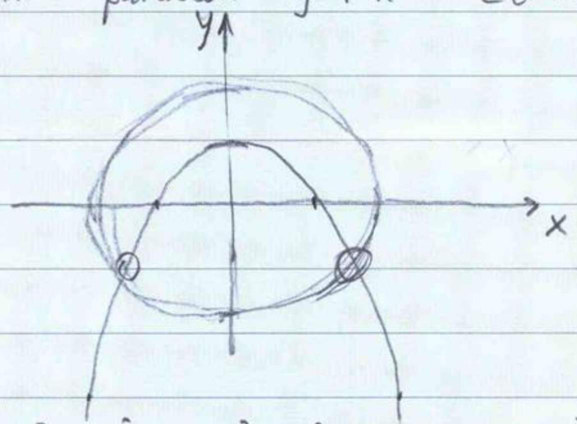
Binomialsatsen säger $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ $(n=70)$

Med $a=2$ och $b=-x^2$ ser vi att termen för $k=15$ blir: $\binom{70}{15} \cdot a^{70-15} \cdot (-x^2)^{15} = \binom{70}{15} \cdot 2^{55} \cdot -(x^2)^{15} = -\binom{70}{15} \cdot 2^{55} \cdot x^{30}$

Svar: koefficienten framför x^{30} är $\underline{-\binom{70}{15} \cdot 2^{55}}$ ok! 3

B15. Var skär parabeln $y=1-x^2$ cirkeln $x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$?

Rita!



Sätt in $y=1-x^2$ i $x^2+y^2=3$: $x^2+(1-x^2)^2=3$

$x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = 3$, $x^4 - x^2 = 2$, $(x^2-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = \frac{8}{4}$,

$(x^2-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$, $x^2 - \frac{1}{2} = \pm \frac{3}{2}$, $x^2 = \frac{1}{2} \overset{+}{(-)} \frac{3}{2}$ ty $x^2>0$

$x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$

Vi ser direkt att $x^2=2$ och $y=-1$ uppfyller båda ekvationerna $y=1-x^2$ och $x^2+y^2=3$

Svar: $(x,y) = (\pm\sqrt{2}, -1)$ (dvs två punkter)

4

B16. a) Bland 9 hyresgäster kan en förening bildas på $\binom{9}{4}$ olika sätt. $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 9\cdot2\cdot7 = 2\cdot63 = \underline{\underline{126.}}$

b) Krav: 2 män + 2 kvinns $\Rightarrow \binom{6}{2}\cdot\binom{3}{2} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{3\cdot2}{1\cdot2} = 15\cdot3 = \underline{\underline{45.}}$
(Ty valet av män respektive valet av kvinnor är oberoende av varandra)

Svar: a) 126 b) 45

4

B17. Ekvationen $x^4 = 2x^3 + 2x + 1$ kan skrivas $x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0$

a) $x = i$ ger $VL = i^4 - 2i^3 - 2i - 1 = (-1)^2 + 2i - 2i - 1 = 0$ $\square$

b) $x = i$ en lösning. P s s visas att $x = -i$ är en lösning.
$\Rightarrow (x+i)(x-i) = x^2+1$ är en faktor i vänstra ledet ovan.

Ekvationen kan skrivas $(x^2+1)(x^2-2x-1) = 0$
ty $(x^2+1)(x^2-2x-1) = x^4 - 2x^3 \underbrace{-x^2 + x^2}_{=0} - 2x - 1 = x^4 - 2x^3 - 2x - 1$

Återstående två lösningar fås ur $x^2 - 2x - 1 = 0$
$(x-1)^2 - 1 - 1 = 0$, $(x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$, $x-1 = \pm\sqrt{2}$
$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Svar: ekvationen $x^4 = 2x^3 + 2x + 1$ har lösningarna
$x = \pm i$
$x = 1 \pm \sqrt{2}$

5

B18. $T_n = 1+4+7+10+\dots+(3n-5)+(3n-2), \quad n \in \mathbb{Z}_+$

$T_1 = 1$

$T_2 = 1+4 = 5$

$T_2 = 1+4+7 = 12$ osv.

a) $T_n = (3n-2)+(3n-5)+(3n-8)+\dots+1$

$= (3n+1-\underset{k=1}{3\cdot 1}) + (3n+1-\underset{k=2}{3\cdot 2}) + (3n+1-\underset{k=3}{3\cdot 3}) + \dots + (3n+1-\underset{k=n}{3n})$

ok

Svar: $\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{n}(3n+1-3k)}$ [För b: $T_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(3(p+1)+1-3k)$]

b) Visa med induktion att $T_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ ok

Med $n=1$ blir $T_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\,(3\cdot 1-1) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ stämmer!

Med $n=p+1$ blir $\boxed{T_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)\cdot(3(p+1)-1)}$

Sistnämnda formel ska vi visa givet Induktions-Antagandet (I.A.)

$T_p = \frac{1}{2}p(3p-1)$, (I.A.)

Ty då säger induktionsaxiomet att beviset är klart.
Jag föredrar att räkna "baklänges", dvs jag ska visa att

$T_{p+1} = \sum_{k=1}^{p+1}(3(p+1)+1-3k)$ givet (I.A.)

$T_{p+1} = \frac{1}{2}(p+1)\cdot(3(p+1)-1) = \frac{1}{2}p\,(3(p+1)-1) + \frac{1}{2}(3(p+1)-1)$

$= \underbrace{\frac{1}{2}p(3p-1)}_{=\sum_{k=1}^{p}(3p+1-3k) \text{ enligt (I.A.)}} + \frac{1}{2}p\cdot 3 + \frac{1}{2}(3(p+1)-1) = \sum_{k=1}^{p}(3p+1-3k) + \underbrace{\frac{3}{2}p+\frac{3}{2}p+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}_{=3p+1}$

$= \sum_{k=1}^{p}(3p+1-3k) + (3p+1-3\overbrace{(p+1)}^{k=p+1}) - 1 + 3 + 3p+1$

ok

$= \sum_{k=1}^{p+1}(3p+1-3k) + 3(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1}(3p+1-3k) + \sum_{k=1}^{p+1}(3\cdot 1)$

5

$= \sum_{k=1}^{p+1}(3p+1-3k+3\cdot 1) = \sum_{k=1}^{p+1}(3(p+1)+1-3k) \underset{\text{def (se B18.a!)}}{=} T_{p+1}$. $\square$