Christer Kiselman

数 学 的 文 化 涵 义*

克·基塞尔曼

目次：

一、作为独立学科的数学

人们在中小学以至大学里学过不少数学。尽管如此，人们对教学仍不甚了了，乃至发生误解。有些学生和成年人（因为学生总是要长大的）往往害怕或厌恶数学。这个问题的根源何在呢？是否在于数学的本身的性质？

人们首先把数学成功地应用于对自然界的研究（天文学、物理学，以后是化学、气象学和生物学），而且这种应用至今仍然十分重要。大概是因为如此，数学被认为是自然科学的一个分支。但是，数学并不属于自然科学。当今它在经济学中的应用是很重要的，它是这类科学的不可缺少的组成部分。仅就其应用而言，数学绝不能划归自然科学。

不过，还有一个不把教学划归自然科学的原则上更为重要的理由。表面上看，数学的发展是由于技术和其他科学的需要，而实质上，它受到与在艺术中起作用的好奇心和求知欲相类似的心理状态的驱使。承认这一点对组织各种年龄（从小学到攻读博士学位）的教育有着重大影响。

为了说明教学的这种独立性，让我来举几个例子。

在广义相对论中，爱因斯坦 (Einstein, 1879－1955) 使用了黎曼几何和能量计算。但是，这些智力工具并非是为物理学而建立的，它早已在纯数学内部发展起来。这类工具的出现早于爱因斯坦使用它们的时候。黎曼 (Riemann, 1826－1866) 引进了现在称为黎曼微分几间的数学理论，在黎曼空间中，人们可以计算各种距离，可以有各种曲率的概念。人们习惯于把能量计算同里奇 (Ricci, 1853－1925) 的名字联系起来，利用它可以处理各种几何量及其在坐标变换下的变化。张量计算变得为人熟知则是由于爱因斯坦把它用于 1916 年发表的广义相对论中。爱因斯坦是从格罗斯曼 (Grossman, 1878－1936) 那里学到这种技术的。

另一个例子是在希尔伯脱空间中有关自轭变换的谱分裂的理论。这个理论的重要部分，即连续自轭算符的理论，是希尔伯脱 (Hilbert, 1862－1943) 以纯数学理论的形式建立的，它也不是从物理观测中得出的，但它们对于表述量子定律是必需的。

第三个例子是理论物理中的弦理论。在这个理论中，人们不止一次地用到抽象的和新发展的数学理论。

威格纳（Wigner）写道：数学的巨大用途有些近乎神秘，不存在任何合理的解释。正是

* 原文标题为 La Kultura Signifo de la Matematiko，是瑞典著名数学家、乌普萨拉（Uppsala）大学教授兼世界语者克·基塞尔曼（Christer Kiselman）用世界语（Esperanto）撰写的。中译文初刊于 Tutmondaj Sciencoj kaj Tecnikoj, N-o 3/4, oktobro 1989, paĝoj 44-50，由陈凤至译，张大卫校订。鉴于 1989 年刊出译文存在若干印误，原校者张大卫于 2001 年 7 月据作者置于 Internet 个人主页上的世界语文本作了全面修订。此文另有瑞典语文本（1997）和日语译文（1990）。

数学概念的这些令人吃惊的用途激发了统一我们的物理理论的要求 [Wigner 1960:2]。我们还可援引戴森 (Dyson) 的话：对于物理学家来说，数学不仅是用以计算各种现象的工具，而且还是使新理论得以建立的概念和原理的主要源泉 [Dyson 1968]。

不过，数学家并不总是成功的。按照戴森的说法，数学家曾多次错过推进科学的机会 [Dyson 1972]。例如，麦克斯韦（Maxwell，1831－1879）方程发表于 1873 年，它为数学家提供了极其有意义的工作领域, 但却没有受到足够重视。如果他们立即着手研究这个问题，他们也许会比爱因斯坦早几十年发现相对论。这个大胆的断言是基于如下的概念：麦克斯韦方程在某种变换群下形式不变。这个群一般说来是数学的重要课题。麦克斯韦方程在洛仑兹群下是不变的，而牛顿（Newton）力学的方程则是在另一种群即伽利略 (Galilei) 群下不变的。人们发现，洛仑兹群比伽利略群在数学上更简单，更优雅。假如人们早去研究这个群的数学性质，他们也许会发现狭义相对论。自然，应当注意，以上的论证用的都是假定式。我们不能证明，假如数学家做了另外的事，情况将会怎样。戴森的断言虽然令人沮丧，但是却象以上的正面例子那样，证明了如下的信念：数学是独立的，从数学内部可以发现有物理意义的理论。

鉴于数学的独立性，再参考这里援引的威格纳和戴森的话，我们会问：物理理论是否仅限于在某个时候数学的理论和方法能够加以处理的那些理论？如果是,为什么这样的数学方法总是在一定的时候产生？不同的数学是否会产生不同的物理学？这些问题对于数学家的职责有何影响，对于科学政策的制定有何影响?

二、数学的固定性和可变性

很多人相信，数学是固定的真理的集合，是永恒不变的定律的集合。产生这种信念的原因是不难理解的。人们学过二加二等于四，很难设想这个真理在某个时候会变为谬误。我们看到的地上的石头已有大约十亿年的历史，再过几百万年，它就会变为粉末。但是，再经过这么多年，二加二等于四仍然正确。难道你不相信这一点？数学似乎比我们的物理世界最稳定的成分还要稳定。在其他知识领域，有关世界的一般认识变得更快。按照魏格纳（Wegener, 1880 一 1930）的理论，大陆是在漂移着的。当我还在学校上学的时候，老师告诉我他的理论是幼稚的、谬误的。而现在，一个公认的事实是，例如，南美洲和非洲在某个时期曾连在一起。我学到的是人有 48 条染色体。而现在人们说人只有 46 条染色体，数目 48 是误数的结果，现在人们在照片上看到的只有 46 条。我自己的有关世界的知识就这样地变化着。至于数学，我学到的是函数 $X \to X^4$ 的导数为 $4X \to X^3$，直到现在，我也没有听到过其他说法。这些事实给予我们一个不可磨灭的印象：地质学是发展的，生物学是发展的，而数学是不发展的。真的是不可磨灭吗?

数学也象其他事物一样是由固定部分和可变部分组成的。人需要坚硬的骨骼还是柔软的肌肉呢？对于跑步来说，两者都需要。仅有骨骼不能运动。没有骨骼，肌肉就丧失了起作用的对象。对于一切知识领域，情况都是如此。数学的某些部分看起来似乎固定不变，但另一些部分却迅速地演变着。学校里教的部分是早已固定了的部分，变动着部分则鲜为人知。因此，对于普通人所谓数学不象肌肉而更象骨骼的说法就不足为奇了。

在数学方面，每年有几万篇报道新的研究成果的论文发表。人们发现了许多新的事实，对一些旧的事实也有了新的认识。就此而论，数学的确类似于其他演进着的科学。（另一方面，我要指出，数学不受实验或观测方面的困难所困扰，而这些困难往往推迟其他科学的进程。）

数学不仅是飞速发展的，它还包含许多不确定性和任意性。恰似数学的固定部分极其稳定，数学的可变部分在其不可驯顺的任意性方面又极其易变。这个事实会使那些因渴望安全

与永恒价值而热爱数学的人感到懊丧，任意性令他们感到幻灭甚至恐惧。

平行公理的历史是这种任意性的一个例子。按照欧几里德(Eŭklido, 公元前约 303—275 年）公理，通过一给定点正好存在一条直线平行于已知直线。我们能否从其他公理出发证明这个公理呢？这个问题使数学家困扰了两千多年。最后，上一世纪的三位数学家证明了这是不可能的，他们是博利埃（Bolyai, 1802－1860）罗巴切夫斯基（Lobaĉefskij, 1793—1856）和高斯（Gauss, 1777—1855）。证明方法是构造通过给定点可作数条平行线或一条也不能作的几何学。这些几何学同欧几里德几何一样有效、一样真实。通过这些几何学的存在，人们了解到欧几里德平行公理不能由其他公理证明。为什么这个问题的解决需要两千多年呢？人们几乎不能回答这个问题，可能的原因是接受作为人类思想的“不言自明的”出发点的公理的任意性太令人震惊，这也能说明高斯为什么没有公布他的发现，尽管他在当时已如此受人尊敬，公布这个发现绝不会使他的事业蒙受损害。

关于我们的思维能力，另一个有关任意性的例子更为惊人。这个例子涉及如下假设：实数体 (korpo de la realaj nombroj) R 的任何无限子集或者与自然数 N 或者与 R 本身具有相同的元素个数。为了用数学符号表示这一假设，我们以 kard A 标记集合 A 的基数或简称为 A 的元素的个数（有限或无限）。这样，连续统假设断言不存在下面的不等式：kard N ＜ kard A ＜ kard R。证明这点是希尔伯脱于 1900 年在巴黎作为“未来数学问题”(estontaj problemoj de la matematiko）提出的 23 个问题中的第一个问题。他认为这个断言很可能是对的[1902:2]。对于希尔伯脱及与其同时代的其他所有可信赖的数学家来说，或者存在集合 A ∈ R 使得 kard N ＜ kard A ＜ kard R, 或者不存在这样的集合；研究将会告诉我们哪个结果是正确的。但以后证明，这个断言不依赖于其他公理。戈德尔（Gödel, 1906－1978）证明可以把它加到集合论的其他公理中去而不引起（新的）矛盾。而科恩 (Cohen) [n. 1934] 则证明，把与上述断言相反的断言加得公理中去同样不会引起矛盾。这表明：只要其中存在 kard N ＜ kard A ＜ kard R 的集合 A，此集合论就成立，与集合论一样，连续统假设也成立。

总之，数学不能帮助我们确定在现实世界中过一给定点可以作几条直线与已知直线平行，也可能帮助我们确定某种无限集是否存在。数学的任意性就表现在这些方面，它使我们毫无办法。但同时（似乎是自相矛盾的）它又是自然科学的概念和原理的主要的甚至是唯一的源泉，是自然科学表述自身的独一无二的语言。

三、作为亚文化和文化元素的数学

正如我们所看到的，就数学与其他科学的关系而言，它的作用是如此地自相矛盾，以至有可能也有必要寻求其他观点，籍以理解数学的功能。一种观点是承认数学是人类文化的组成部分，并把它同一般的文化现象加以比较。怀特（White）[1956] 和怀尔德（Wilder）[1981] 曾论及这种观点。

首先，我们说明人类文化的组成有两类：**文化元素**（kultura elemento）和**亚文化**（subkulturo）。前者是人类文明中为所考虑的一群人中绝大多数所共有的文化的组成部分；后者则是这群人中的一部分人所专有的一种文化（这部分人很少或很分散）。

数学既有文化元素的作用又有亚文化的作用。作为文化元素，数学是由某人群所共有的数学知识，概念和能力所组成。保存和发展这种文化元素是普通教育的任务。举例来说，人们一般并不知道导数和积分的概念，但是，人们会有速度（以每小时公里计量）、加速度（速度的增加）、银行借贷的利息、一年中月工资的总和等概念，这些概念是各种函数的导数和积分的具体体现，很难精确的指出这种文化元素的界限，但可以证明它是由数学中早已成熟的部分组成的。

作为亚文化的数学只属于一群受过理论数学（scienca matematiko）教育的人。这群人的观点不尽一致，但是，作为亚文化的数学是一个饶有趣味的现象，同诸多其他文化现象相比，特别是同初等数学相比，它因国家不同而出现的差异更小。在古代，人们可以说中国数学、阿拉伯数学、希腊数学和南美数学，但现在几乎不能这样说。

四、数学的文化属性（kultureco[①]）的影响

为什么我们把数学看作是一种文化呢？一般说来，我们强调某一现象的文化属性是为了理解和预言它的演进（evoluo）。我不敢说我能作出很多预言，但依我看来，对于表面上自相矛盾的科学采取这种观点有助于理解和表述许多难以处理的问题。 数学作为文化元素和作为亚文化这两种观念在教育中存在着明显的冲突。教育机构既传讲文化元素又教授亚文化，只是随着年龄的不同，两种观念的混合程度也不同。我的确不能评论全世界的数学教育，但我不能不指出在许多国家数学教育是不成功的。它过于形式化，过于注重常规能力的传授。这就给学生一种印象：数学是全世界最枯燥无味的知识领域。

在心理学中，人们往往把智慧区分为两种：会聚智慧（konverĝa inteligento）和发散智慧（diverĝa inteligento）。第一种是从已知条件出发求得唯一的或几乎唯一的解的能力。第二种是从已知条件出发循各种途径求得适当解的能力；但在这些解中没有一个是最好的。中学数学的缺点是它仅仅激发会聚智慧，留给学生的题目都是针对常规方法而设计的。而发散智慧被认为是不必要的。显然，会聚智慧是发散智慧的特殊情形，人们多半是首先尝试这种智慧，以便发展出各种工作方法，然后将它们用于需要发散智慧的更复杂的情形。可以理解，在任何科学的探索领域，发散智慧是不可缺少的，否则就谈不上探索。

我们可以按三条准则将数学粗略地（也许过分粗略）分类，即按文化、按可变性和按智慧类型来分类。分类结果如下：

文化元素数学	*亚文化数学*
不变的数学，“骨骼”	*可变的有任意性的数学，“肌肉”*
需要会聚智慧	*需要发散智慧*

这些分类是否彼此一致？如果是，我们应当尽力改变文化元素。因为我认为，如果普通数学教育变得更灵活，更少规范化，如果解答它的习题需要更多的发散智慧，那么它就会变得更加有效。为什么呢？因为这样数学的应用变得更有效、更现实、更可信，这些都会对所有用到数学的知识领域产生积极的影响。但是，改革教育殊非易事，因为喜欢应用会聚智慧的人都已被吸引到数学上来，他们不喜欢使数学变得“柔软些”（malpli “osta”）。

五、数学的文化涵义

最后，我们谈谈作为亚文化和作为文化元素的数学的文化涵义。这涵义当然取决于各种特定的价值尺度。我只想指出数学的四个性质，以便同其他科学和文化现象作比较：

甲、*国际性*

乙、*优美性*

丙、*对我们认识世界的影响*

丁、*对我们的固有的思维能力和信念的影响*

[①] 世界语“kultureco”系由词根 “kultur”(文化)＋ 后缀“ec”（性质，属性）＋ 名词词尾“o”构成。

谈到国际性。必须指出没有一件事物是绝对国际性的，文化现象多少要随人群的不同而变化。当然，亚文化数学较之许多其他文化现象更具国际性，也比许多科学特别是社会科学更具国际性。这会影响到数学教育，使之更具国际性，这显然是好事。但是，我们应当往意理论数学不是完全国际性的，其中存在若干民族特征。应当把国际性同高级通讯工具的发展所带来的国际交流区分开。

同对待所有的文化现象一样，我们会问：文化的演进“规律”是什么？哪条规律最重要？什么东西决定那条规律最重要？能够决定什么最重要的乃是真实的能力（vera potenco）。

数学的优美性是其本质特征，诸多观点都认为它很重要。同艺术一样，优美性有其自身的价值。非但如此，当理论的发展有几种可能的形式可供选择时，优美性会帮助我们迅速地作出决择。

数学影响我们对世界的认识；在最数学化的学科中甚至没有其他语言。至今为止，数学最富有排序功能：保证我们的世界是有序的和可预言的，而不是杂乱无章的。事实上，对预言（日月蚀和天气）的偏爱是追求数学化的重要源泉。而且连杂乱本身也有自己的数学！数学的确影响我们对世界的看法。但达到何种程度呢?

数学还影响我们的精神。与计算机不同，人脑是要受其所从事的工作的影响而改变的，这至少是在年轻时如此，人脑就象一台在工作中会创造自身的计算机。年轻人的语言和理论工作会影响他们的大脑的发展。因此选择好的工作就显得愈益重要。如果我们能从困难的情况出发解决问题，我们就赢得了个性。这样，数学既能增强我们的自信心（如果我们成功了）也会破坏我们的自信心（如果我们失败了）。

所有这些都表明，重要的是创造一个尽可能好的数学环境，特别是在幼儿时期。

参 考 文 献

Dyson, Freeman J. 1968. Mathematics in the physical science，En *Mathematics in the Modern, World*, San-Fransicko: W. H. Freeman, paĝoj 249-257.

Dyson, Freeman J. 1972. Missed Opportunities. *Bulletin of theAmerican Mathemathal Society*. **78**, 635-652.

Hilbert, David. 1902. Sur le problèmes futurs des mathématique. *Compte rendu du duexième congrès internatinal des mathématiciens*, 58-114. Parizo: Gauthiers-Villars.

White, Leslie A. 1956. The locus of mathematlcal reality: An anthropological footnote. En *The World of Mathematics,* paĝoj 2348-2364. Red. James R. Newman. Novjorko: Simon and Schuster.

Wigner, Eugen P. 1960. The unrasonable effectiveness of mathematics in the physical sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **13**, 114.

Wilder, Raymond L. 1981. *Mathematics as a Cultural System*. Pergamon Press.