

- 1.1.** Bestäm Laplacetransformerna till a) $2t^2 - e^{-t}$, b) $(t^2 + 1)^2$,
c) $(\sin t - \cos t)^2$, d) $\cosh^2 4t$, e) $e^{2t} \sin 3t$, f) $t^3 \sin 3t$.
- 1.2.** Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\frac{1}{s(s+1)}$, b) $\frac{3}{(s-1)^2}$, c) $\frac{1}{s(s+2)^2}$,
d) $\frac{5}{s^2(s-5)^2}$, e) $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ (två fall!), f) $\frac{1}{s^2 + 4s + 29}$.
- 1.3.** Bestäm inversa Laplacetransformen av a) $\frac{1 + e^{-s}}{s}$, b) $\frac{e^{-s}}{(s-1)(s-2)}$,
c) $\ln \frac{s+3}{s+2}$, d) $\ln \frac{s^2+1}{s(s+3)}$, e) $\frac{s+1}{s^{4/3}}$, f) $\frac{\sqrt{s}-1}{s}$.
[I c) och d) kan man använda regeln $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(tf)$. I e) och f) kan man använda formeln $\mathcal{L}(t^a) = \Gamma(a+1)s^{-a-1}$, $\operatorname{Re} a > -1$. Dessa formler finns i *Beta*, β :232:L6, resp. β :234:L46.]
- 1.4.** Bestäm Laplacetransformen till $f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{för } 0 < t < \varepsilon, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$
Vad händer med $\mathcal{L}(f_\varepsilon)$ då $\varepsilon \rightarrow 0$?
- 1.5.** Laplacetransformera $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & \text{för } t > 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$
- 1.6.** Låt H beteckna Heavisides språngfunktion. Bestäm Laplacetransformen till $f(t) = t e^{-2t} H(t-1)$.
- 1.7.** Bestäm Laplacetransformen av $f(t) = \int_0^t \frac{1 - e^{-u}}{u} du$.
- 1.8.** Beräkna $\int_0^\infty t e^{-3t} \sin t dt$. (Ledning: beräkna $\mathcal{L}(f)(3)$ för lämpligt f .)
- 1.9.** Beräkna integralen $\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t} dt$.
- 1.10.** Ett radioaktivt preparat minskar sin massa u enligt formeln $u'(t) = -0,0004u(t)$, där t mäts i år och där $u(0) = 1$ g. Bestäm halveringstiden och Laplacetransformen $\mathcal{L}(u)$.
- 1.11.** En oscillator styrs av differentialekvationen $h''(t) + 4h(t) = 0$. Hur stort blir största utslaget och när inträffar det om ingångsvärdena är $h(0) = 0$ m, $h'(0) = 1$ m/s? Vad blir $\mathcal{L}(h)$?