

## Remerciements

Cette thèse de Doctorat a été réalisée grâce à un effort conjoint de l'Université des Sciences, des Techniques et des Technologies de Bamako (USTTB) et l'International Science Programme (ISP) de l'Université d'Uppsala. À cet effet, j'exprime ma sincère reconnaissance au Docteur Peter SUNDIN, directeur de l'ISP et directeur du Programme de Chimie, Docteur Leif ABRAHAMSSON, directeur du Programme de Mathématiques, et Professeur Hamidou TOURÉ, coordinateur du réseau Partial Differential Equations, Modelling and Control. Elle s'inscrit dans le cadre de thèse en cotutelle entre l'université d'Uppsala et l'USTTB. Les travaux ont été réalisés à la Division information visuelle et interaction (Vi2) du Département de Technologie de l'Information à Uppsala et au Laboratoire de Mathématiques Appliquées (LAMA) de la Faculté des Sciences et Techniques (FST) de l'USTTB.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur Christer Oscar KISELMAN pour avoir accepté de diriger cette thèse. Il m'a accueilli et m'installé à l'Université d'Uppsala et ses conseils m'ont été d'un intérêt précieux. Toujours disponible de m'écouter et de répondre à mes questions, je lui en suis très reconnaissant. Il m'a orienté et guidé tout au long de mes travaux de recherche.

Je remercie également le Professeur Ouaténi DIALLO et Docteur Diby DIARRA d'avoir accepté de co-diriger cette thèse, de m'avoir encouragé et soutenu tout au long de mes travaux de recherche. Leur assistance m'a été précieuse.

Je tiens à manifester mes sincères remerciements à tous les membres du Département d'Enseignements et de Recherches en Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences et Techniques de l'USTTB.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des membres du Département de Mathématiques et de la Division information visuelle et interaction (Vi2) du Département de Technologie de l'Information de l'Université d'Uppsala, pour leurs accueils chaleureux lors des mes différents séjours. Plus particulièrement, je remercie le Professeur Michael THUNÉ, directeur du Département de Technologie

---

de l'Information, et Professeur Ingela NYSTRÖM, Chef de Division information visuelle et interaction (Vi2).

Je tiens à remercier chaleureusement l'ensemble des membres du jury qui ont fait l'honneur de bien vouloir examiner cette thèse, pour avoir accepté d'être rapporteurs, pour avoir consacré du temps à la lecture de ce manuscrit, pour leurs conseils et pour leurs remarques qui m'ont permis de corriger et d'améliorer le manuscrit.

Mes sincères remerciements à ma femme Kindiaba KEÏTA pour son soutien et surtout la compréhension dont elle a fait preuve lors de mes séjours à Uppsala en prenant soin de nos deux fils Moussa Adama KONÉ et Mohamed L. A. KONÉ. Une pensée également pour mes parents, mes frères, mes soeurs et ami(e)s qui m'ont toujours encouragé et soutenu, particulièrement Sinaly TRAORÉ, Maître assistant CAMES et Mr. Pierre Claver Bakoroba TRAORÉ.

Enfin, merci à tous ceux qui de près ou de loin ont participé à la réalisation de ce travail et à ceux qui m'ont aidé avec autant de discrétion et de modestie.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
Motivation . . . . .	1
Aperçu de la thèse . . . . .	2
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Discrétisation . . . . .	5
1.1.1 Discrétisation au plus proche . . . . .	6
1.1.2 Discrétisation interne . . . . .	7
1.1.3 Discrétisation externe . . . . .	7
1.1.4 Caractérisations rectilignes . . . . .	8
1.2 Espaces métriques . . . . .	9
1.2.1 Rappels sur les fonctions de distance . . . . .	9
1.2.2 Rôle de l'élément structurant . . . . .	11
1.2.3 Le choix de l'élément structurant . . . . .	11
1.2.4 Pixel et voxel . . . . .	12

TABLE DES MATIÈRES

---

1.3	Ensembles pré-ordonnés, ensembles ordonnés et applications croissantes . . . . .	12
1.3.1	Treillis . . . . .	13
1.3.2	Treillis complets . . . . .	13
1.4	Dilatations et érosions . . . . .	14
1.4.1	Approche morphologique . . . . .	14
1.4.2	Approche ensembliste . . . . .	15
1.5	Le recouvrement d'un ensemble . . . . .	18
1.6	Recouvrement au sens de Jean-Marc Chassery et Isabelle Sivignon . . . . .	19
1.7	Définitions et notations . . . . .	22
1.7.1	Propriété de la corde (Rosenfeld en 1974) . . . . .	23
1.7.2	Hyperplan euclidien et droite euclidienne . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Recouvrement d'une droite euclidienne</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Discrétisation . . . . .	28
2.2.1	Discrétisation à l'aide de la fonction plancher . . . . .	29
2.2.2	Discrétisation à l'aide de l'entier le plus proche . . . . .	34
2.3	Discontinuité de la dilatation . . . . .	41
2.3.1	Discontinuité de la dilatation en utilisant la fonction plancher	41
2.3.2	Discontinuité de la dilatation en utilisant le nombre entier le plus proche . . . . .	42
2.4	Exemples d'application . . . . .	42
2.4.1	Recouvrement de la droite euclidienne . . . . .	43
2.4.2	Etude comparative des deux méthodes . . . . .	45
2.4.3	Interprétation des résultats . . . . .	48

<b>3</b>	<b>Extension de la notion de Recouvrement</b>	<b>51</b>
3.1	Recouvrement d'un hyperplan euclidien . . . . .	51
3.1.1	Discrétisation à l'aide de la fonction plancher . . . . .	52
3.1.2	Discretisation à l'aide du nombre entier le plus proche . . . . .	56
3.2	Discontinuité de la dilatation dans le polyèdre . . . . .	61
3.2.1	Discontinuité de la dilatation en utilisant la fonction plancher	62
3.2.2	Discontinuité de la dilatation en utilisant le nombre entier le plus proche . . . . .	62
3.3	Application en dimensions supérieures. . . . .	63
3.3.1	Exemple d'application en 3-D. . . . .	63
3.3.2	Etudes comparatives en dimensions supérieures . . . . .	66
3.3.3	Interprétation des résultats obtenus . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Convexité définie par convolutions</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction . . . . .	71
4.2	Les opérateurs de différences . . . . .	72
4.3	Convexité définie par convolutions . . . . .	72
4.3.1	Moments des fonctions . . . . .	78
4.3.2	Fonctions $\mu$ avec deux points dans le support de $\mu^-$ . . . . .	79
4.3.3	Opérateurs de différence définis comme produit de convolution	80
4.3.4	Graphes et épigraphes . . . . .	83
4.3.5	Fonctions convexes . . . . .	84
4.3.6	Convexité discrète . . . . .	84
4.4	Quelques relations entre les opérateurs . . . . .	85
4.5	Inverses supérieure et inférieure . . . . .	86
4.6	$W$ -convexité . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Les hyperplans digitaux</b>	<b>93</b>
5.1	Tranches dans l'espace euclidien . . . . .	93

---

*TABLE DES MATIÈRES*

---

5.1.1	Tranches dans une position générale . . . . .	93
5.1.2	Tranches dans une position spéciale . . . . .	95
5.2	Graphes contenus dans les tranches : nécessité des inégalités de convolution . . . . .	96
5.3	Graphes contenus dans les tranches : suffisance des inégalités de convolution . . . . .	99
5.3.1	Les hyperplans dans le sens de Reveillès . . . . .	99
5.4	Mesure de déviation de la convexité . . . . .	99
5.5	Conclusion générale . . . . .	102
5.6	Perspectives . . . . .	103

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Motivation

Il y a plus d'un millénaire les gens faisaient des représentations discrètes des objets de façon manuelle, notamment les mosaïques et tapis. Avec le développement de l'informatique et le traitement d'images, apparaît la nécessité de définir un nouveau genre de la géométrie pour ce type de représentation sur ordinateur : il s'agit de la géométrie digitale. Elle est née dans les années 1960 avec les travaux de A. Rosenfeld [34, 35], elle a eu son expansion grâce aux travaux de J.-P. Reveillès [31]. Cette discipline fournit des objets élémentaires, et des outils mathématiques et géométriques adaptés [5, 12, 23, 24, 33] pour de nombreuses applications. Elle a par exemple montré toute son importance dans l'analyse et le traitement d'images médicales, géospaciales, astrophysiques,... Elle s'est d'abord concentrée sur le modèle de la grille régulière des points dans le plan ou dans l'espace avec coordonnées entières. Cela est dû au fait que les systèmes d'acquisition de données d'image en deux ou trois dimensions (2-D ou 3-D) fournissent généralement des données organisées sur une grille régulière, appelées données discrètes. Le model de la grille

## Introduction générale

---

régulière est le model le plus rependu.

Pendant le colloque DGCI Espagne 2013, Jean-Marc Chassery et Isabelle Sivignon ont présenté dans [9] une méthode de recouvrement d'une droite euclidienne à l'aide de la fonction plancher. Cette méthode permet de recouvrir entièrement la droite euclidienne comparativement aux précédentes méthodes notamment celles proposées par J.-P. Reveillès et Isabelle Debled-Rennesson dans [30, 31] et Annick Montanvert, Jean-Marc Chassery et David Coeurjolly dans [28].

Dans cette thèse, nous proposons quelques méthodes de recouvrement des droites euclidiennes et hyperplans euclidiens. Le but est de trouver un recouvrement optimal de la droite euclidienne par les dilatations de sa discrétisation. Cette dilatation se fera à l'aide d'un élément structurant dont ses dimensions sont déterminées à partir des caractéristiques de la discrétisation choisie et de la droite euclidienne considérée. Cependant, les dimensions admissibles de l'élément structurant considéré sont des résultats paramétriques et sont déterminés sous forme de polygones (respectivement de polyèdres) selon le cas étudié dans le plan (respectivement dans l'espace).

En fait, nous nous sommes inspiré de la propriété de la corde d'Azriel Rosenfeld [32] et prouvons qu'il est possible de recouvrir une droite euclidienne en utilisant les dilatations par des rectangles ou carrés centrés sur chaque point de sa discrétisation. Ensuite, nous généralisons ces travaux en dimensions supérieures et établissons un cadre où nous pouvons avoir une meilleure manière de recouvrir un hyperplan euclidien par les dilatations de sa discrétisation.

Du point de vu d'optimisation, ce travail est motivé par la recherche des *méthodes optimales* afin de proposer une meilleure configuration discrète des formes continues qui est et reste l'un des défis majeurs de la géométrie digitale.



---

## Aperçu de la thèse

Cette thèse est constituée de cinq chapitres en plus de l'introduction. Le chapitre 1 présente les prérequis. Il est constitué des définitions et des notions de base, des notations et quelques travaux similaires sur les recouvrements de droite euclidienne. Les chapitres 2 et 3 offrent respectivement aux lecteurs un aperçu global sur la façon dont les méthodes de recouvrements d'une droite euclidienne dans le plan (respectivement d'un hyperplan euclidien dans l'espace) ont été abordées. Le chapitre 4 donne un aperçu global sur la convexité définie par les convolutions. Il offre aussi un bon cadre de travail par une étude détaillée de la relation entre l'opérateur de Jensen et l'opérateur de différence de second ordre en dimensions supérieures en les définissant comme opérateurs de convolutions.

Puis, le chapitre 5 donne une caractérisation digitale des hyperplans euclidiens et quelques notions d'applications de la convexité par rapport au contexte de recouvrements. Finalement ce travail est clôturé par une conclusion générale et des perspectives.



---

---

# CHAPITRE 1

---

## ÉTAT DE L'ART

### 1.1 Discrétisation

La discrétisation est l'opération qui consiste à remplacer des relations qui se portent sur des fonctions continues, dérivables, etc., par un nombre fini de relations algébriques qui se portent sur les valeurs prises par ces fonctions en un nombre fini de points de leur ensemble de définition.

Cependant, il existe plusieurs méthodes de discrétisation offrant en géométrie digitale des réponses plus ou moins adaptées aux diverses situations rencontrées. Au sein de ce vaste panel, nous allons sélectionner quelques méthodes de discrétisations afin de proposer des méthodes de recouvrement de droite et d'hyperplan. Dans cette section, nous introduisons ces méthodes tout en présentant d'abord les trois discrétisations dites classiques [10].

### 1.1.1 Discrétisation au plus proche

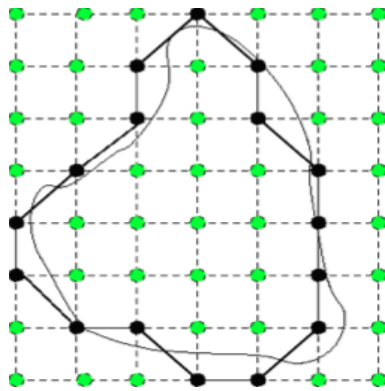


FIGURE 1.1 – Grid Intersect Quantization (GIQ)[10]

La discrétisation au plus proche est la délimitation discrète du contour d'une forme continue par le nombre entier le plus proche de ce contour (voir la figure 1.1). Le choix de ce nombre peut être à l'intérieur, sur le bord ou à l'extérieur de la forme continue. Ce point discret est situé à une distance strictement inférieure à 1 par rapport au bord de cette forme.

### 1.1.2 Discrétisation interne

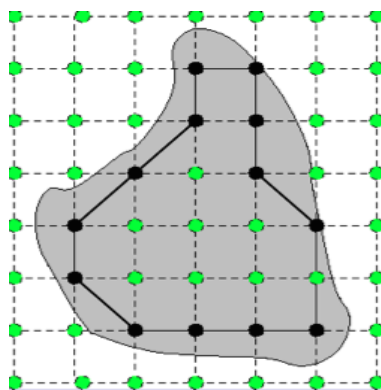


FIGURE 1.2 – Object Boundary Quantization (OBQ)[10]

La discrétisation interne est la délimitation discrète du contour d'une forme continue en considérant le nombre entier le plus proche du bord intérieurement ou sur le contour de la forme continue et situé à une distance strictement inférieure à 1 par rapport au bord de la forme considérée (voir figure 1.2).

### 1.1.3 Discrétisation externe

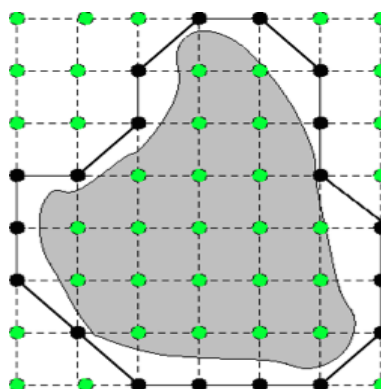


FIGURE 1.3 – Background Boundary Quantization (BBQ)[10]

La discrétisation externe est la délimitation discrète du contour d'une forme continue par le nombre entier le plus proche du bord extérieurement ou sur le contour de la forme continue (voir figure 1.3). Cet entier est toujours situé à une distance strictement inférieure à 1 par rapport au bord de la forme étudiée.

### 1.1.4 Caractérisations rectilignes

Dans le but de caractériser la rectitude de la droite euclidienne sur les sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}^2$ , Azriel Ronsfeld a introduit la notion de la  $P$ -discrétisation.

On peut définir la  $P$ -discrétisation d'un sous-ensemble  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  comme étant un ensemble défini par :

$$\mathbf{dig}_P(M) = (M + P) \cap \mathbb{Z}^n.$$

Ici  $P$  est un pixel ou un voxel situé à l'origine, il peut être aussi n'importe quel sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On peut prendre  $P = \{0\}$ , mais dans ce cas beaucoup d'ensembles pourront avoir leurs discrétisations vides ; le rôle de  $P$  est d'engraisser  $M$  avant de le croiser avec la grille de  $\mathbb{Z}^n$ .

On note que  $\mathbf{dig}_P$  est une dilatation de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $P$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{dig}_P(\cup M_j) = \cup \mathbf{dig}_P(M_j)$$

pour toute famille  $(M_j)$  de sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des parties de  $\mathbb{R}^n$ . De même on a

$$\mathbf{dig}_{\cup P_k}(\cup M_j) = \bigcup_k \bigcup_j \mathbf{dig}_{P_k}(M_j).$$

La  $P$ -discrétisation commute avec des translations de vecteur entier :

$$\mathbf{dig}_P(c + M) = c + \mathbf{dig}_P(M), \quad c \in \mathbb{Z}^n, M \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$

Elle est aussi symétrique :

$$\mathbf{dig}_P(M) = \mathbf{dig}_M(P).$$

## 1.2 Espaces métriques

### 1.2.1 Rappels sur les fonctions de distance

Soit  $X$  un ensemble non vide, une fonction  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une *distance* sur  $X$ , si pour tout  $x, y, z \in X$  on a :

- (i)  $d(x, y) \geq 0$ , non négativité ;
- (ii)  $d(x, x) = 0$  ;  $d(x, y) > 0$  si  $x \neq y$  ;
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$ , symétrique ;
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , inégalité triangulaire.

Le couple  $(X, d)$  est habituellement appelé un *espace métrique*.

D'abord, nous rappelons quelques fonctions de distance bien connues que nous utiliserons. Soient  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

La *distance euclidienne* est définie par

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette *distance* est un cas particulier de la distance  $l^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$  définie par

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = 1$ , *distance*  $l^1$  est encore appelée distance bloc et on a

$$d_1(x, y) = \|x - y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , alors  $d_p$  converge vers la *distance de Chebyshev* ou la *distance*  $l^\infty$ , définie par

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|.$$

Cette distance est aussi connue sous le nom de *distance de l'échiquier*, lorsque  $x, y \in \mathbb{Z}^n$ .

Etant donné un espace métrique  $(X, d)$ , la boule fermée de centre  $c$  et de rayon  $r > 0$  est définie par

$$B_{\leq}(c, r) = \{x \in X; d(c, x) \leq r\}$$

et la boule ouverte de centre  $c$  et de rayon  $r > 0$  est définie par

$$B_{<}(c, r) = \{x \in X; d(c, x) < r\}$$

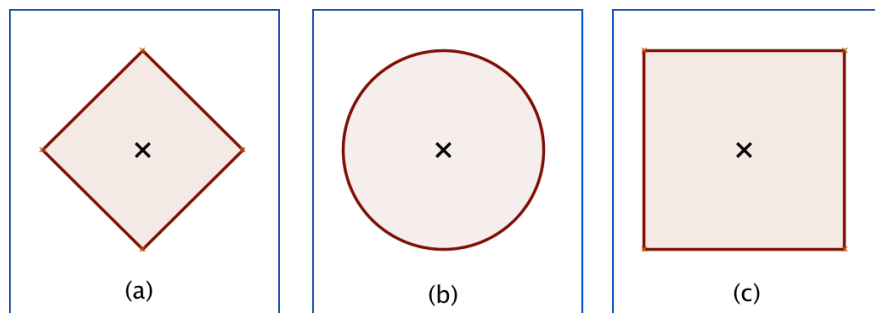


FIGURE 1.4 – Les boules fermées ayant le même rayon pour les différentes fonctions de distance : (a) distance bloc  $l^1$ ; (b) distance euclidienne  $l^2$ ; (c) distance de Chebyshev (ou de l'échiquier)  $l^\infty$ .

## Caractéristiques de l'élément structurant

Un élément structurant  $U$  possède les caractéristiques suivantes :

- Il correspond à une forme (géométrie connue)
- Cette forme a une taille finie
- Il est repéré par son origine  $0$ . Ce point origine appartient généralement à l'élément structurant mais cela n'est pas une obligation.



## 1.2.2 Rôle de l'élément structurant

Soit  $I_e$  une image d'entrée (image originale),  $U$  un élément structurant et  $I_s$  l'image transformée de  $I_e$  par  $U$ .

L'idée de base est de comparer l'image à analyser ou à traiter  $I_e$  avec un objet géométrique de forme connue appelé *élément structurant*  $U$ , qui sert de sonde. A chaque position de l'élément structurant  $U$  dans  $I_e$ , on regarde s'il touche ou s'il est inclus dans l'image initiale  $I_e$ . En fonction de la réponse positive obtenue, on construit une image de sortie  $I_s$ .

## 1.2.3 Le choix de l'élément structurant

Lorsque la morphologie mathématique a été développée [26], [37], la forme et la taille de l'élément structurant restaient fixées dans l'ensemble de l'image, c'est-à-dire, le même élément structurant est utilisé pour chaque point de l'image.

Plusieurs transcriptions discrètes de leurs formes continues dépendent fortement de la taille et de la forme de l'élément structurant utilisé, qui sont choisies en fonction des connaissances a priori sur les structures de la forme continue analysée. Ainsi, la sélection d'un élément structurant approprié est cruciale et dépend de l'expérience de l'utilisateur en général. En outre, certains détails importants peuvent être enlevés ou déplacés en raison de l'utilisation d'éléments structurants inappropriés.

Pour surmonter ces problèmes, nous introduirons certaines méthodes dont le concept est de faire varier l'élément structurant selon les caractérisations locales des formes continues étudiées. Cette idée a été utilisée par Beucher [36], Chassery et Sivignon [9] et Curié [11].

## 1.2.4 Pixel et voxel

### Pixel

Le pixel est l'unité minimale adressable par le contrôleur vidéo. C'est aussi l'unité utilisée pour spécifier les définitions d'affichage (largeur  $\times$  hauteur)

### Voxel

Équivalent d'un pixel en 3-D. Volume pixels sont utilisés comme blocs de construction pour former un objet 3-D plus grande. Comme des briques empilées, voxels ne contiennent pas d'informations spécifiques sur leurs coordonnées de l'axe. Au contraire, ils ont des informations sur leur localisation relative par rapport à voxels à proximité et sont considérés comme des points uniques dans l'espace 3-D.

## 1.3 Ensembles pré-ordonnés, ensembles ordonnés et applications croissantes

Une *relation d'équivalence*  $\sim$  sur l'ensemble  $E$  est une relation binaire qui est *réflexive* : si  $x \in E$ ,  $x \sim x$ ; *symétrique* : pour tous  $x, y \in E$ , si  $x \sim y$ , alors  $y \sim x$  et *transitive* : pour tous  $x, y, z \in E$ , si  $x \sim y$  et  $y \sim z$ , alors  $x \sim z$ . Pour chaque relation d'équivalence dans  $E$  nous pouvons former l'espace quotient  $E/\sim$ , qui consiste en les classes d'équivalence sous  $\sim$ .

Un *préordre*  $\preceq$  dans un ensemble  $E$  est une relation binaire qui est réflexive et transitive. On peut former pour chaque préordre  $\preceq$  une relation symétrique  $x \sim_{\preceq} y$  définie par  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$ . C'est une relation d'équivalence.

Un préordre  $\preceq$  est dit un *ordre* s'il est aussi antisymétrique :  $x \preceq y$  et  $y \preceq x$  implique que  $x = y$ . Chaque préordre  $\preceq$  de  $E$  définit un ordre sur l'espace quotient  $E/\sim_{\preceq}$ .

Un exemple commun d'un ensemble ordonné est l'ensemble  $\mathcal{P}(X)$  de tous les sous-ensembles d'un ensemble  $X$ , appelé *l'ensemble des parties de  $X$* , où l'ordre est défini par l'inclusion ensembliste : pour tout ensemble  $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ,  $A \preceq B$  si et seulement si  $A \subset B$ .

**Définition 1.3.1.** *Soient  $L$  et  $M$  deux ensembles pré-ordonnés, nous dirons qu'une application  $\varphi: L \rightarrow M$  est croissante si*

$$\text{pour tout } x, y \in L, x \preceq_L y \implies \varphi(x) \preceq_M \varphi(y).$$

*On dira aussi que l'application  $\varphi$  est cocroissante si*

$$\text{pour tout } x, y \in L, \varphi(x) \preceq_M \varphi(y) \implies x \preceq_L y.$$

### 1.3.1 Treillis

Un *treillis* est un ensemble ordonné tel que tout sous-ensemble avec deux éléments  $\{x, y\}$  admet un suprémum (borne supérieure) noté  $x \vee y$  et un infimum (borne inférieure) noté  $x \wedge y$ . Cela signifie que  $x, y \leq x \vee y$  et que si  $x, y \leq z$ , alors  $x \vee y \leq z$ ; de façon analogue que  $x \wedge y \leq x, y$  et que, si  $v \leq x, y$ , alors  $v \leq x \wedge y$ .

Un sous-ensemble  $S$  d'un treillis  $T$  est nommé *sous-treillis* si, pour tous  $x, y \in S$ , aussi  $x \vee y$  et  $x \wedge y$  appartiennent à  $S$ .

**Exemple 1.3.2.**  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  est un treillis avec pour tous  $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , on a  $A_1 \vee A_2 = A_1 \cup A_2$  et  $A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2$ . La famille de tous les ensembles fermés forme un sous-treillis, car  $F_1 \cup F_2$  et  $F_1 \cap F_2$  sont fermés si  $F_1$  et  $F_2$  le sont.  $\square$

### 1.3.2 Treillis complets

Un *treillis complet* est un ensemble ordonné tel que tout sous-ensemble (fini ou infini, vide ou non-vide)  $\{x_j; j \in J\}$  admet un suprémum, noté  $\bigvee_{j \in J} x_j$ , et un infimum, noté  $\bigwedge_{j \in J} x_j$ . Cela signifie que  $x_k \leq \bigvee_{j \in J} x_j$  pour tout  $k \in J$  et que, si

$x_j \leq z$ ,  $j \in J$ , alors  $\bigvee_{j \in J} x_j \leq z$ ; de façon analogue que  $\bigwedge_{j \in J} x_j \leq x_k$  pour tout  $k \in J$  et que, si  $v \leq x_j$ ,  $j \in J$ , alors  $v \leq \bigwedge_{j \in J} x_j$ .

Un sous-ensemble  $S$  d'un treillis complet  $T$  est nommé *sous-treillis complet* si, pour toute famille  $\{x_j; j \in J\}$  d'éléments de  $S$ , aussi  $\bigvee_{j \in J} x_j$  et  $\bigwedge_{j \in J} x_j$ , formés dans  $T$ , sont des éléments de  $S$ .

**Exemple 1.3.3.** La famille  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  de tous les ensembles fermés de  $\mathbb{R}^n$  est un treillis complet avec pour tout  $(F_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\bigvee_{j \in J} F_j = \overline{\bigcup_{j \in J} F_j}$  et  $\bigwedge_{j \in J} F_j = \bigcap_{j \in J} F_j$ . Or  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas un sous-treillis complet de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , car pour  $n \geq 1$ ,  $\bigvee_{j \in J} F_j$  formé dans  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas égal à  $\bigvee_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} F_j$  formé dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

## 1.4 Dilatations et érosions

Dans cette section, nous allons donner quelques définitions géométriques et morphologiques sur deux opérateurs à savoir la dilatation et l'érosion par rapport au contexte où ils seront utilisés.

### 1.4.1 Approche morphologique

**Définition 1.4.1.** Si  $L$  et  $M$  sont deux treillis complets, nous dirons qu'une application  $\delta: L \rightarrow M$  est une *dilatation* s'il commute avec la formation des suprema :

$$\delta \left( \bigvee_{j \in J} x_j \right) = \bigvee_{j \in J} \delta(x_j)$$

pour toutes familles  $(x_j)_{j \in J}$  d'éléments de  $L$ , où  $J$  est un ensemble d'indices arbitraire. Il en résulte que toute dilatation est croissante (prenons  $J = \{1, 2\}$ ) et que  $\delta(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_M$ , où  $\mathbf{0}_L$  désigne le plus petit élément de  $L$  (prenons  $J = \emptyset$ ).  $\square$

**Définition 1.4.2.** On dira que  $\varepsilon: L \rightarrow M$  est une *érosion* s'il commute avec la formation des infima :

$$\varepsilon \left( \bigwedge_{j \in J} x_j \right) = \bigwedge_{j \in J} \varepsilon(x_j).$$

Toute érosion est croissante, et  $\varepsilon(\mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_M$ , où  $\mathbf{1}_L$  désigne le plus grand élément de  $L$ . □

### Relation morphologique entre dilatation et érosion

Soit  $f: L \rightarrow M$  une application entre les treillis complets  $L$  et  $M$ . On définit l'*inverse supérieure* par

$$f^{[-1]}(y) = \bigwedge_{x \in L} (x; f(x) \geq y), \quad (1.4.1)$$

et *inverse inférieure* de  $f$  par

$$f_{[-1]}(y) = \bigvee_{x \in L} (x; f(x) \leq y). \quad (1.4.2)$$

$f^{[-1]}$  et  $f_{[-1]}$  sont croissantes. On a toujours  $f_{[-1]} \circ f \geq \text{id}_L$ . (Kiselman 2010 : Proposition 6.3).

Maintenant soit  $\delta: L \rightarrow M$  une dilatation et  $\varepsilon: L \rightarrow M$  une érosion. Alors  $\varepsilon \circ \delta: L \rightarrow M$  est certainement croissante, mais en général on ne sait pas si elle n'est pas plus grande que l'identité ou n'est pas idempotente.

Par contre nous savons que  $\delta_{[-1]}$  est une érosion (Kiselman 2010 : Théorème 6.13), et que  $\delta_{[-1]} \circ \delta$  est idempotente (Kiselman 2010 : Corollaire 6.14). Donc  $\delta_{[-1]} \circ \delta$  est croissante, idempotente, et plus grande que l'identité, par conséquent un cleistomorphisme (opérateur de fermeture).

## 1.4.2 Approche ensembliste

Nous avons des exemples de dilatations et érosions bien connus.

---

**Définition 1.4.3.** Soit  $G$  un groupe abélien et soit  $U$  un sous-ensemble de  $G$ . La *dilatation* d'un ensemble  $A$  par  $U$  est l'ensemble obtenu en remplaçant chaque élément  $x$  de  $A$  par  $x + U$  et définie par :

$$\delta_U(A) = \bigcup \{x + U, x \in A\} \quad A \in \mathcal{P}(G). \quad (1.4.3)$$

□

Donc une dilatation est définie par un ensemble donné par l'addition de Minkowski.

Cela signifie que la dilatation élargit l'ensemble  $A$  de telle sorte que chaque élément de  $A$  subisse une transformation croissante par l'élément structurant  $U$ .

Il est clair que  $\delta_U$  est une dilatation au sens de la définition (1.4.1).

**Définition 1.4.4.** L'*érosion* de  $A$  par un sous-ensemble  $V$  de  $G$  est l'ensemble des points  $x$  de  $A$  tel que  $x + V$  est inclus dans  $A$  et définie par cet ensemble ci-dessous :

$$\varepsilon_V(A) = \{x \in G; x + V \subset A\}, \quad A \in \mathcal{P}(G). \quad (1.4.4)$$

□

L'érosion rétrécit l'ensemble  $A$  donc elle produit l'action inverse de la dilatation. Il est clair que  $\varepsilon_V$  est une érosion au sens de la définition (1.4.4).

Les ensembles  $U$  et  $V$  sont appelés les *éléments structurants*.

### Relation ensembliste entre dilatation et érosion

On considère deux ensembles  $X$  et  $Y$  et une application  $\varphi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ . Alors on définit  $\varphi_{\complement\complement} = \complement \circ \varphi \circ \complement$  c'est-à-dire  $\varphi_{\complement\complement}(A) = \complement\varphi(\complement A) = Y \setminus \varphi(X \setminus A)$ ,  $A \in \mathcal{P}(X)$  où  $\complement(A)$  est le complémentaire de  $A$  dans  $\mathcal{P}(X)$ .

Si  $\delta$  est une dilatation définie par (1.4.3), alors il est facile de voir que  $\delta_{\complement\complement}$  est une érosion. On peut se demander si l'érosion  $(\delta_U)_{\complement\complement}$  est de la forme  $\varepsilon_V$ , définie

par (1.4.4), pour un ensemble  $V$  et, si c'est le cas, alors quelle est la relation entre  $U$  et  $V$ .

Soit  $y \in (\delta_U)\mathbb{C}(A) = \mathbb{C}\delta_U(\mathbb{C}A)$ ,  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , alors on aura  $y \neq b + u$  pour tout  $b \notin A$ ; et pour tout  $u \in U$ . Et  $y - u \neq b$  implique que  $y - u \in A$ . Par conséquent,  $y \in \varepsilon_V(A) = \{x; x + V \subset A\}$  si et seulement si  $V = -U$ , d'où la relation

$$(\delta_U)\mathbb{C} = \varepsilon_{(-U)}. \quad (1.4.5)$$

**Exemple 1.4.5.** *Si on prend  $L = \mathcal{P}(X)$ , alors chaque dilatation de  $L \rightarrow M$  satisfait*

$$\delta(A) = \delta(\cup_{x \in A} \{x\}) = \bigvee_{x \in A} \delta(\{x\}), \quad A \in \mathcal{P}(X),$$

ce qui implique que  $\delta$  est déterminé par son action sur des singletons.

De la même façon, pour l'érosion on a

$$\varepsilon(A) = \varepsilon\left(\bigcap_{y \notin A} \mathbb{C}\{y\}\right) = \bigwedge_{y \notin A} \varepsilon(\mathbb{C}\{y\}), \quad A \in \mathcal{P}(X),$$

l'érosion est déterminée par son action sur les complémentaires des singletons.

Si on prend  $L = M = \mathcal{P}(G)$ , où  $G$  est un groupe abélien, et si on suppose que  $\delta$  commute avec les translations, c'est-à-dire que  $\delta(A + x) = \delta(A) + x$  pour tout  $x \in G$ , alors  $\delta$  est déterminée par son action sur le seul ensemble  $\{0\}$  :

$$\delta(A) = \bigcup_{x \in A} (\delta(\{0\}) + x) = A + U,$$

où  $U$  est défini par  $U = \delta(\{0\})$ .

De la même manière, pour l'érosion qui commute avec des translations

$$\varepsilon(A) = \bigcap_{y \notin A} (\varepsilon(\mathbb{C}\{0\}) + y) = \{x \in G; x + V \subset A\},$$

où  $V = -\varepsilon(\mathbb{C}\{0\})$ .

Donc les dilations et érosions avec ces propriétés sont toujours données par les éléments structurants. Aussi on a :

$$(\delta_U)_{[-1]}(B) = \bigvee_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} (A; A + U \subset B) = \varepsilon_U(B).$$

cf. (1.4.5) □

Pour rendre ces éléments structurants aussi raffinés et performants dans les différentes transformations où ils opèrent, nous allons nous référer à la sous-section 1.2.3 de la page 11 concernant la taille de l'éléments structurants.

Par ailleurs, nous avons introduit une fonction permettant d'unifier les notions des opérateurs suivants.

Etant donné un ensemble  $A$ ,

$$\delta_U(A) = \{x + U; x \in A\} \quad \text{dilatation}$$

$$\varepsilon_V(A) = \{x : x + V \subset A\} \quad \text{érosion}$$

$$\alpha(A) = \delta_U(\varepsilon_U(A)) = \{x + U; x + U \subset A\} \quad \text{ouverture}$$

$$\kappa(A) = \varepsilon_V(\delta_V(A)) = \{x : x + V \subset A + V\} \quad \text{fermeture}$$

A cet effet, nous avons donné une formulation plus générale de ces opérateurs que nous avons noté par  $\varphi$ , définie par

$$\varphi(A) = \{x + \alpha U; x + \beta U \subset A + (1 - \alpha - \beta)U\}.$$

De la définition de  $\varphi$ , on voit clairement que si :

$\alpha = 1$  et  $\beta = 0$  on a la dilatation  $\delta$ .

$\alpha = 0$  et  $\beta = 1$  alors on a l'érosion  $\varepsilon$

$\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , on a l'ouverture  $\alpha$ .

$\alpha = 0$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , on a la fermeture  $\kappa$ .

D'où la généralisation des notions de dilatation, d'érosion, d'ouverture et de fermeture par  $\varphi$ . Il est à noter que tous ces opérateurs sont croissants.

## 1.5 Le recouvrement d'un ensemble

En mathématiques, un recouvrement d'un ensemble  $L$  est une collection d'ensembles dont l'union contient  $L$  comme un sous-ensemble. Formellement, si  $C$  est



une famille d'ensembles  $(M_j)_{j \in J}$ , alors  $C$  est un recouvrement de  $L$  si

$$L \subset \bigcup_{j \in J} M_j.$$

Les recouvrements sont couramment utilisés dans le contexte de la topologie. Dans ce domaine, un recouvrement  $C$  d'un espace topologique  $L$  est une collection d'ensembles  $(M_j)_{j \in J}$  de  $L$  dont l'union est l'espace  $L$  tout entier. Et de plus si  $P$  est une partie d'un espace topologique  $L$ , alors un recouvrement de  $P$  est une collection  $(M_j)_{j \in J}$  de sous-ensembles de  $L$  dont l'union contient  $P$ , c'est-à-dire

$$P \subset \bigcup_{j \in J} M_j.$$

Le type d'ensemble  $L$  que nous considérerons dans la suite sera soit une droite euclidienne ou soit un hyperplan euclidien. En géométrie digitale le recouvrement d'une droite euclidienne a été beaucoup étudié et on trouve dans la littérature plusieurs méthodes proposées pour recouvrir une droite euclidienne. A notre connaissance, parmi toutes ses méthodes, nous nous sommes inspiré de celle proposée par Jean-Marc Chassery et Isabelle Sivignon qui permet de recouvrir entièrement une droite euclidienne. Dans la sous-section suivante, nous donnerons une brève description de cette méthode que nous étendrons plus tard.

## 1.6 Recouvrement au sens de Jean-Marc Chassery et Isabelle Sivignon

Dans cette section, nous rappelons brièvement le résultat de Chassery et Sivignon [9] sur le recouvrement de la droite euclidienne.

Soit  $L$  une droite euclidienne définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha_1 x - \alpha_2 y + \mu = 0\}, \alpha_1, \alpha_2 \text{ et } \mu \in \mathbb{N}.$$

Cette droite est le graphe d'une fonction  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les entiers  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont relativement premiers entre eux avec  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \neq 0$ . On définit une discrétisation  $M$  de  $L$  par

$$M = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \left\lfloor \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} \right\rfloor \right\}$$

où  $f(x) = \lfloor F(x) \rfloor$  définie par la double inégalité  $F(x) - 1 < \lfloor F(x) \rfloor \leq F(x)$  est appelée fonction plancher de  $F(x)$ .

A partir de la définition de  $f(x)$ , on a les inégalités :

$$F(x) - 1 < F(x) - \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2} \leq f(x) \leq F(x).$$

La figure 1.5 est la représentation graphique des ensembles  $L$  et  $M$  dans le même repère.

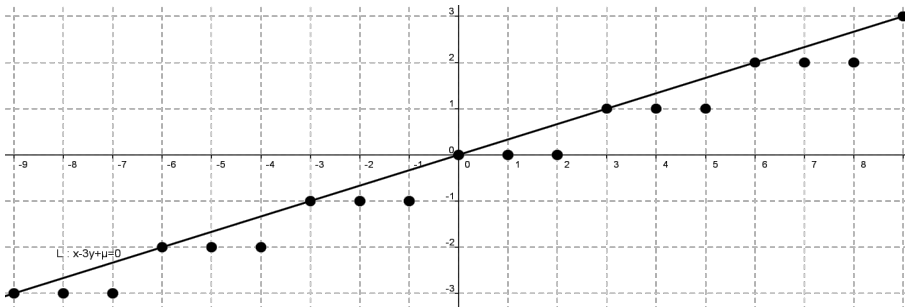


FIGURE 1.5 – La droite euclidienne définie par  $L : x - 3y + \mu = 0$  et l'ensemble  $M$  des points discrets associés.

Chassery et Sivignon ont déterminé une boule fermée, notée  $B_{\infty}^{\leq}(0, r)$ , centrée à l'origine et de rayon  $r$  pour la métrique  $l^{\infty}$ . Cette boule est telle que  $L \subset M + B_{\infty}^{\leq}(0, r)$ .

Ils ont trouvé que le rayon optimal pour recouvrir la droite euclidienne est  $r = \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2 \in \mathbb{N}$  et sont relativement premiers en plus

$\alpha_1 \leq \alpha_2 \neq 0$ . L'exemple ci-dessous illustre comment déterminer le rayon par la méthode de Chassery et Sivignon.

**Exemple 1.6.1.** Si on prend  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_2 = 3$ , donc  $F(x) = \frac{x+\mu}{3}$ .

$$\begin{aligned} \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right) &= \max\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(\mu - \lfloor \mu \rfloor)\right) \\ &= \max\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

car  $\mu$  est un entier.

Voici une illustration graphique du cas étudié par Chassery et Sivignons.

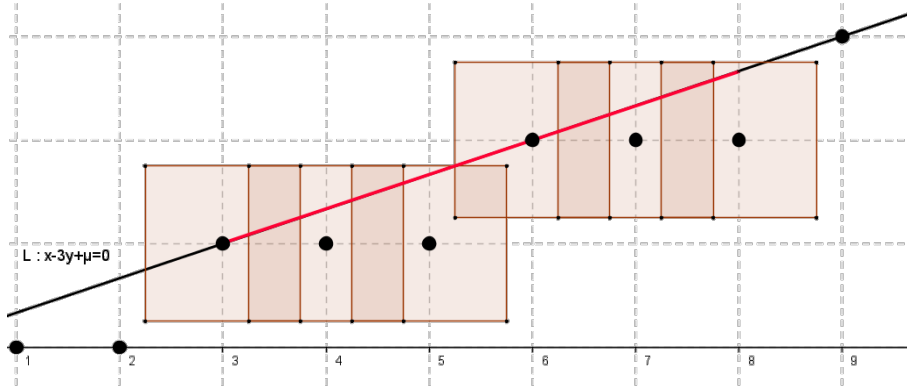


FIGURE 1.6 – Recouvrement d'une portion de  $L : x - 3y + \mu = 0$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $M + B_{\infty}^{\times}(0, \frac{3}{4})$ .

Cette méthode étant basée sur le choix d'une boule, il constitue donc un cas particulier de nos résultats. En fait nous nous sommes inspiré de ce cas particulier pour proposer des cas plus généraux à travers deux méthodes de recouvrement d'une droite euclidienne par la dilatation de deux de ses discrétisations en utilisant un élément structurant de forme rectangulaire et carrée. Le chapitre 2 fait l'objet de la description de nos méthodes, il s'agit de :

- méthode de recouvrement d'une droite euclidienne par la dilatation de sa discrétisation à l'aide de la fonction plancher,

- méthode de recouvrement d'une droite euclidienne par la dilation de sa discrétisation à l'aide du nombre entier le plus proche.

Dans le chapitre 3, nous étendons ces méthodes aux hyperplans euclidiens de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

## 1.7 Définitions et notations

Dans toute la suite, un ensemble de nombre surmonté d'un point désignera ses éléments non nuls,  $\overset{\cdot}{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ . On note  $\mathbb{R}_! = [-\infty, +\infty]$  le prolongement de l'ensemble des nombres réels en l'adjoignant  $-\infty, +\infty$ . De même on note  $\mathbb{Z}_! = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Les notations  $x \dot{+} y$  et  $x \ddot{+} y$  désigneront deux prolongements de l'addition des nombres réels à  $\mathbb{R}_!$ . Ces deux lois sont telles que : pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_!$

- $x \dot{+} y = +\infty$  si l'un des termes est égal à  $+\infty$  (même si l'autre est  $-\infty$ )
- $x \ddot{+} y = -\infty$  si l'un des termes est égal à  $-\infty$  (même si l'autre est  $+\infty$ ).

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_!$ , les notations  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  désigneront respectivement le minimum et le maximum de  $x$  et  $y$ .

Étant donné un nombre réel  $a$ , les expressions  $a \vee 0$  sa partie positive et  $(-a) \vee 0$  sa partie négative seront notées respectivement  $a^+$  et  $a^-$ .

Nous utiliserons les normes définies en page 9 pour des fonctions comme par exemple  $\|f\|_1 = \sum_x \|f(x)\|_1$ . Lorsque toute norme peut servir, on écrira seulement  $\|x\|$ . Le produit scalaire est noté par  $\zeta \cdot x = \zeta_1 x_1 + \dots + \zeta_n x_n$ ,  $(\zeta, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Étant donné un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $L$  est *convexe* si

$$\{a, b\} \subset L \Rightarrow [a, b] \subset L,$$

$$\text{où } [a, b] = \{(1 - \theta)a + \theta b; \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 1\}$$

est le *segment* d'extrêmités  $a$  et  $b$ . De plus un segment  $[a, b]$  où  $\{a, b\} \subset L$  est appelé une *corde* de  $L$ . L'ensemble *corde* de  $L$ , noté  $\mathbf{corde}(L)$  est l'ensemble défini par

$$\mathbf{corde}(L) = \bigcup_{a, b \in L} [a, b] \subset \mathbb{R}^n.$$

Euclide a donné la caractérisation suivante de la convexité :

$$L \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \text{ est convexe si } \mathbf{corde}(L) \subset L.$$

Il est connu que l'intersection d'ensembles convexes est convexe. L'intersection de tous les ensembles convexes contenant  $L$  est appelée l'*enveloppe convexe* de  $L$ . On la note  $\mathbf{cvxh}(L)$ , elle est le plus petit ensemble convexe contenant  $L$ .

### 1.7.1 Propriété de la corde (Rosenfeld en 1974)

Dans le but de caractériser la rectitude de la droite euclidienne sur les sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}^2$ , Azriel Rosenfeld a introduit en 1974 la propriété de la corde [32]. Il stipule qu'un ensemble  $L \subset \mathbb{R}^2$  a la *propriété de la corde* si

$$\mathbf{corde}(L) \subset L + U, \tag{1.7.1}$$

où  $U = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_\infty < 1\}$  est la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^2$  pour la norme  $l^\infty$ .

On note que

$$(c + U) \cap \mathbb{Z}^2 = \{c\} \quad c \in \mathbb{Z}^2,$$

ce qui implique que pour tout sous-ensemble  $M \subset \mathbb{Z}^2$  ayant la propriété de la corde, on a

$$\mathbf{corde}(M) \cap \mathbb{Z}^2 = M. \tag{1.7.2}$$

En particulier,  $\{p, q\} \subset M$  implique  $[p, q] \cap \mathbb{Z}^2 \subset M$ . Si  $M$  a la propriété de la corde et si  $p_1 = q_1$  (respectivement  $p_2 = q_2$ ), alors on dira que  $M$  est verticalement (respectivement horizontalement) convexe.

## 1.7.2 Hyperplan euclidien et droite euclidienne

Un hyperplan  $L$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension  $n$  et donné par l'équation

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j = \mu$$

où  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$  est non nul. Sans perdre de généralité, on suppose qu'il existe  $x_k$  pour  $k \in \{1, \dots, n+1\}$  tel que  $|\alpha_j| \leq |\alpha_k|$ , pour  $j = 1, \dots, n+1$  et  $\alpha_k \geq 0$  tel que l'axe  $x_k$  soit appelé axe vertical pour l'hyperplan.

Remarquons que si  $n = 1$  alors  $L$  est une droite euclidienne.

Dans cette thèse, nous considérons d'abord une famille de fonctions affines. Un élément  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de cette famille est définie par

$$F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

où  $\alpha = (\alpha', \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$  et  $\mu \in \mathbb{Z}$ . On note par

$$\mathbf{graphe}(F) = \{(x, F(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

De plus on désignera par  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  une discrétisation de  $F$  et

$$\mathbf{graphe}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$$

avec  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  ou  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} + 1/2 \rfloor$ .

On note  $U(r)$  l'ensemble défini par

$$U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x_j| \leq r_j, j = 1, \dots, n+1\} = \prod_{j=1}^{n+1} [-r_j, r_j] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Lorsque  $0 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , on note par :

- $P(F, f) = \{r \in \mathbb{R}^{n+1}; \mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)\}$  le polygone ou poly-

èdre des rayons admissibles pour le recouvrement. On peut décrire  $P(F, f)$  comme étant un ensemble de rayons  $r \in \mathbb{R}^{n+1}$  pour l'élément structurant  $U(r)$  tel que

$$\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F).$$

- $P(\alpha) = P(F, \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor)$  est le polygone ou polyèdre obtenu lorsque  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor$
- $Q(\alpha) = P\left(F, \left\lfloor F|_{\mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}} \right\rfloor\right)$  est le polygone ou polyèdre obtenu lorsque  $f = \left\lfloor F|_{\mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}} \right\rfloor$
- Pour  $r_1 = \dots = r_{n+1} = T_n(F, f) \in \mathbb{R}$ , cette valeur commune des rayons est définie par

$$T_n(F, f) = \inf \{t \in \mathbb{R}; (t, \dots, t) \in P(F, f)\}.$$

De la définition de  $T_n(F, f)$ , on voit que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}} T_n(F, f) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n+1}} T_n(F, f) < 1,$$

où  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  ou  $f = \left\lfloor F|_{\mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \right\rfloor$ . Dans la suite nous ne considérerons que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}^{n+1}} T_n(F, f) < 1$$

puisque l'autre cas est bien connu.





---

---

# CHAPITRE 2

---

## RECOUVREMENT D'UNE DROITE EUCLIDIENNE

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons deux méthodes de recouvrement d'une droite euclidienne  $L$  de pente et d'ordonnée à l'origine rationnelles. Ces deux méthodes de recouvrement sont issues de l'utilisation de la discrétisation de  $L$  par la fonction plancher et le nombre entier le plus proche. Pour chacune de ces méthodes de recouvrement, la difficulté réside dans le choix de l'élément structurant qui sert à dilater la discrétisation choisie. Cette difficulté se traduit par :

si  $M$  est la discrétisation de  $L$  et  $U$  l'élément structurant comment peut-on obtenir

$$L \subset \delta_U(M) = M + U?$$

Pour surmonter cette difficulté, nous avons introduit la notion de recouvrement minimal au sens de la définition [2.1.1](#). La réponse que nous avons apporté à la

question posée est essentiellement basée sur la détermination des caractéristiques de l'élément structurant en fonction  $r$ .

**Définition 2.1.1.** Soit  $L$  une droite euclidienne,  $M$  une discrétisation de  $L$  et  $U$  un élément structurant. On dit que  $L \subset M + U$  est un recouvrement minimal de  $L$  s'il n'existe pas d'élément structurant  $V$  strictement inclus dans  $U$  tel que  $L \subset M + V$  soit un recouvrement de  $L$ . Autrement dit, le recouvrement  $L \subset M + U$  est minimal si pour tout  $V \subset U$ ,

$$L \subset M + V \implies U = V.$$

□

**Rémarque 2.1.2.** *En général, il existe un recouvrement minimal mais pas de plus petit recouvrement que ce que nous avons utilisé.*

Maintenant nous allons décrire les deux méthodes de discrétisation que nous avons utilisées.

## 2.2 Discrétisation

Dans tout le reste de ce chapitre nous considérons des fonctions affines  $F$  de la forme

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \text{ où } x \in \mathbb{R}, \alpha_1, \mu \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_2 \in \dot{\mathbb{Z}}.$$

Le graphe d'une telle fonction est une droite  $L$  de pente  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  et d'ordonnée à l'origine  $\frac{\mu}{\alpha_2}$  rationnelles.

$$L = \left\{ (x, F(x)) \in \mathbb{R}^2; F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} \right\} \subset \mathbb{R}^2, \alpha_1, \mu \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_2 \in \dot{\mathbb{Z}}.$$

Une fonction  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  qui est telle que :

- $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  est dite la discrétisation de  $F$  en utilisant la fonction plancher.

- $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} + \frac{1}{2} \rfloor$  est dite la discrétisation de  $F$  en utilisant le nombre entier le plus proche.

Le graphe

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}}(x) \rfloor\} \subset \mathbb{Z}^2$$

est appelé la discrétisation de  $L$  en utilisant la fonction plancher.

Le graphe

$$M = \{(x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}}(x) + \frac{1}{2} \rfloor\} \subset \mathbb{Z}^2$$

est appelé la discrétisation de  $L$  en utilisant le nombre entier le plus proche.

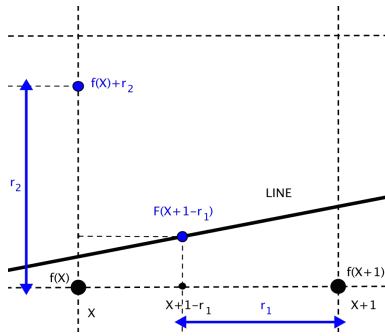
Etant donné un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  ou son bord noté  $\partial L$ , nous aimerions construire l'ensemble  $M \subset \mathbb{Z}^n$  des points discrets à partir de  $L$  ou de son bord  $\partial L$  en utilisant soit la discrétisation en utilisant la fonction plancher ou soit la discrétisation en utilisant le nombre entier le plus proche.

### 2.2.1 Discrétisation à l'aide de la fonction plancher

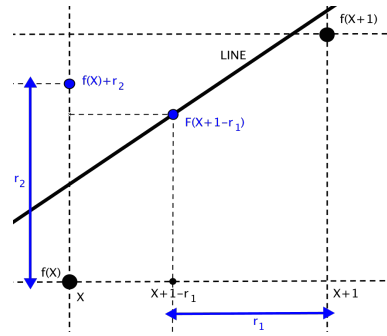
Soit  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction affine et  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  sa discrétisation. On désignera  $L = \mathbf{graphe}(F)$  la droite euclidienne et  $M = \mathbf{graphe}(f)$  la discrétisation de  $L$ .

#### Aperçu de la situation graphique

Suivant les graphes ci-dessous, nous avons deux carrés différents qui illustrent deux positions particulières entre la droite euclidienne et sa discrétisation en utilisant la fonction plancher par rapport au problème considéré.



Pas de saut c'est-à-dire  $f(x+1) = f(x)$ .



Avec saut c'est-à-dire  $f(x+1) = f(x) + 1$ .

FIGURE 2.1 – La relation entre deux points consécutifs  $x$  et  $x+1$ , donnée par  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x+1-r_1) + \frac{\mu}{\alpha_2} \leq f(x) + r_2$ , pour tout  $(x, f(x)) \in M$  avec  $r_1$  le rayons sur l'axe  $x$  et  $r_2$  le rayons sur l'axe  $y$  tels que  $(r_1, r_2) \in [\frac{1}{2}; +\infty]^2$ .

De  $F|_{\mathbb{Z}} - 1 < f \leq F|_{\mathbb{Z}}$ , il en resulte que pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , on a  $F(x) - f(x) < 1$ .  
 Mais on peut en dire plus :

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $F$  une fonction affine,  $F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\alpha_1, \mu \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha_2 \in \dot{\mathbb{Z}}$ , et  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ . Considérons  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  on a*

$$F(x) - f(x) \leq 1 - \frac{1}{\alpha_2}$$

et il existe au moins un  $x \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\sup_{y \in \mathbb{Z}} (F(y) - f(y)) = F(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{\alpha_2}.$$

D'autre part, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $F(x) - f(x) \geq 0$  avec l'égalité pour quelques  $x \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  on a  $f(x) \leq F(x) < f(x) + 1$ .

Donc  $F(x) < f(x) + 1$  implique que  $\alpha_1 x + \mu < \alpha_2 f(x) + \alpha_2$  et

$$\alpha_1 x + \mu < \alpha_2 f(x) + \alpha_2 \text{ implique que } \alpha_1 x + \mu \leq \alpha_2 f(x) + \alpha_2 - 1.$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , on a

$$F(x) - f(x) \leq 1 - \frac{1}{\alpha_2}.$$

Si  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , alors il existe  $x \in \mathbb{Z}$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que  $\alpha_1 x + \mu = \alpha_2 y + \alpha_2 - 1$ . Donc  $F(x) = y + 1 - \frac{1}{\alpha_2}$ . Il en résulte que  $y = f(x)$ , et que

$$F(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{\alpha_2} = \sup_{z \in \mathbb{Z}} (F(z) - f(z)).$$

□

**Théorème 2.2.2.** *Soit*

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

une fonction affine avec  $\alpha_1, \alpha_2, \mu \in \mathbb{Z}$ , et  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ . Soit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  sa discrétisation en utilisant la fonction plancher.

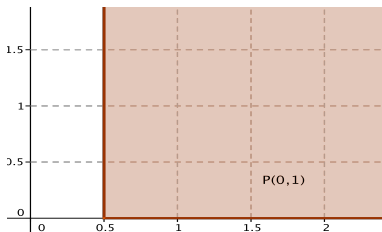
Si  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 1$ , alors **graphe**( $f$ ) +  $U(r)$  contient **graphe**( $F$ ) si et seulement si  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq 0$ .

Si  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , alors **graphe**( $f$ ) +  $U(r)$  contient **graphe**( $F$ ) si et seulement si  $r$  appartient au polygone

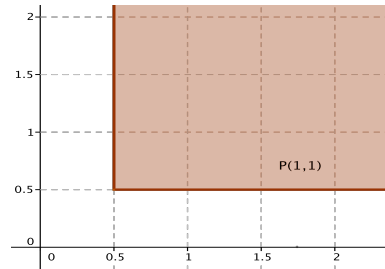
$$P(\alpha) = \left\{ r \in \mathbb{R}^2; r_1 \geq \frac{1}{2}, r_2 \geq \frac{1}{2}, \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \right\}.$$

En prenant  $r_2 = r_1$ , on obtient un cas particulier, le résultat de Chassery et Sivignon,

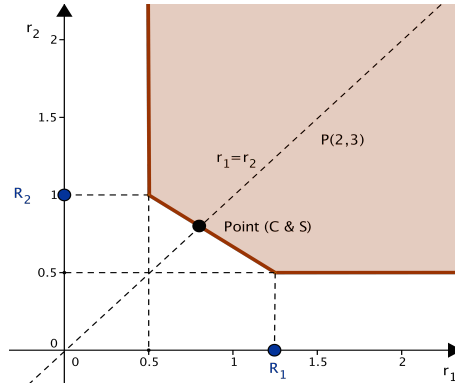
$$T_1(F, \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor) = \max\left(1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{1}{2}\right).$$



Polygone avec  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 1$



Polygone avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  est un cas particulier du cas suivant.



Polygone avec  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$  et les sommets du polygone sont  $(R_1, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, R_2)$  avec  $R_1 = \frac{5}{4}$  et  $R_2 = 1$

FIGURE 2.2 – La représentation graphique des différents polygones  $P(\alpha)$  selon les valeurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Le point (C&S) signifie le résultat de Chassery et Sivignon.

*Démonstration.* Si  $\alpha = (0, 1)$ , il est nécessaire et suffisant que  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq 0$ .

Si  $\alpha = (1, 1)$ , il est nécessaire et suffisant que  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq \frac{1}{2}$ .

Si  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , alors on démontre d'abord que  $r \in P(\alpha)$  implique que **graphe**( $f$ ) +  $U(r)$  contient **graphe**( $F$ ).

Si  $r \in P(\alpha)$  alors  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 - 1$ , et  $r \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ .

Donc  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 - 1$  implique que  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 (1 - \frac{1}{\alpha_2})$ .

Et  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 (1 - \frac{1}{\alpha_2})$  si et seulement si

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x)).$$

Dans le lemme 2.2.1, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x)) = 1 - \frac{1}{\alpha_2}.$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 (F(x) - f(x)) = \alpha_1 + \alpha_1 x + \mu - \alpha_2 f(x).$$

Et  $\alpha_2 f(x) + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 x + \alpha_1 - \alpha_1 r_1 + \mu$  implique que

$$F(x + 1 - r_1) \leq f(x) + r_2, \quad r \in [\frac{1}{2}, +\infty[.$$

Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{Z}; F(x+1-r_1) \leq f(x) + r_2$ ,  $r \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]^2$  cela implique que

$$\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F).$$

En suite, on démontre que si  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$ , alors  $r \in P(\alpha)$ .

$\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  implique qu'il existe deux points entiers  $x$  et  $x+1$  tels que  $F(x+1-r_1) \leq f(x) + r_2$ ,  $r = (r_1, r_2) \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]^2$ , donc on a  $\alpha_1(x+1-r_1) + \mu \leq \alpha_2 f(x) + \alpha_2 r_2$  cela implique que

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x)) = C_\alpha \in \mathbb{N},$$

car le lemme, [2.2.1](#) nous donne

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x)) = 1 - \frac{1}{\alpha_2}.$$

Cependant  $C_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x))$  implique que

$$C_\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right) = \alpha_1 + \alpha_2 - 1 \in \mathbb{N}.$$

Les différents côtés du polygone sont ainsi définis par

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \quad \frac{1}{2} \leq r_1, \quad \frac{1}{2} \leq r_2.$$

Donc, pour tout  $r \in P(\alpha)$  si et seulement si  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  et le polygone est donné par les expressions dans l'énoncé du théorème [2.2.2](#).

De ce qui suit, on déduit  $r_2$  comme une fonction affine de  $r_1$  ayant comme pente  $\frac{-\alpha_1}{\alpha_2}$  dans l'intervalle où  $\frac{1}{2} \leq r_1$  et  $\frac{1}{2} \leq r_2$  par

$$r_2 = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-r_1) + \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}, & r_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 1 - \frac{1}{\alpha_2}, & 1 \leq r_1 \end{cases}$$

avec  $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{\alpha_2}$  la déviation maximale entre  $F$  et la fonction plancher  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$ .  $\square$

---

## 2.2.2 Discrétisation à l'aide de l'entier le plus proche

On discrétise une fonction affine  $F$  en prenant l'entier le plus proche comme sa valeur en tout point entier. Si  $F(x) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ , il existe deux entiers les plus proches, donc nous devons faire un choix. Ici nous choisirons  $f(x) = \lfloor F(x) + \frac{1}{2} \rfloor$ , telle que  $f(x) = F(x) + \frac{1}{2}$  si  $F(x) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$  et  $F - \frac{1}{2} < f \leq F + \frac{1}{2}$ . Donc pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $|f(x) - F(x)| \leq \frac{1}{2}$ . Plus précisément nous avons

**Lemme 2.2.3.** *Soit  $F$  une fonction affine définie par*

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \mu \in \mathbb{Z}$ , et  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ . On considère  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} + \frac{1}{2} \rfloor : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  (entier le plus proche). Alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}$  on a

$$f(x) - F(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

De plus, il existe  $x \in \mathbb{Z}$  tel qu'on a :

$$f(x) - F(x) = \sup_{z \in \mathbb{Z}} (f(z) - F(z)) = \frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2} = \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}$$

$$\text{et} \quad f(x) - F(x) \geq \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair,} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

il existe un  $x \in \mathbb{Z}$  tel que

$$f(x) - F(x) = \inf_{y \in \mathbb{Z}} (f(y) - F(y)) = -\frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2}.$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , nous avons cette double inégalité  $F(x) - \frac{1}{2} < f(x) \leq F(x) + \frac{1}{2}$ .

A partir de l'inégalité droite on a pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ;  $f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2}$  et par conséquent on obtient pour tout  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \alpha_2 f(x) - (\alpha_1 x + \mu) \leq \frac{\alpha_2}{2} \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair,} \\ \alpha_2 f(x) - (\alpha_1 x + \mu) \leq \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair,} \end{cases}$$



cela implique que pour tout  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair,} \\ f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair,} \end{cases}$$

On a  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , il existe  $x \in \mathbb{Z}$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\begin{cases} \alpha_2 y - (\alpha_1 x + \mu) = \frac{\alpha_2}{2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair,} \\ \alpha_2 y - (\alpha_1 x + \mu) = \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair,} \end{cases}$$

Alors, en prenant  $y = f(x)$ , on obtient

$$f(x) - F(x) = \sup_{z \in \mathbb{Z}} (f(z) - f(z)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair,} \end{cases}$$

cela équivaut à

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} (f(x) - F(x)) = \frac{\lceil \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rceil}{\alpha_2} = \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}.$$

Considérons la même double inégalité  $F(x) - \frac{1}{2} < f(x) \leq F(x) + \frac{1}{2}$ .

De l'inégalité gauche, on obtient pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ;  $f(x) - F(x) > -\frac{1}{2}$  cela implique que pour tout  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \alpha_2 f(x) - (\alpha_1 x + \mu) \geq -\frac{\alpha_2}{2} + 1 \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ \alpha_2 f(x) - (\alpha_1 x + \mu) \geq -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc, on obtient pour tout  $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} f(x) - F(x) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ f(x) - F(x) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

Avec  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , alors il existe  $x \in \mathbb{Z}$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\begin{cases} \alpha_2 y - (\alpha_1 x + \mu) = -\frac{\alpha_2}{2} + 1 \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ \alpha_2 y - (\alpha_1 x + \mu) = -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

En prenant  $y = f(x)$ , on obtient

$$f(x) - F(x) = \inf_{z \in \mathbb{Z}} (f(z) - F(z)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_2} & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}} (f(x) - F(x)) = -\frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2}.$$

□

Considérons une droite euclidienne  $L$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \alpha_1 x - \alpha_2 y + \mu = 0\}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ et } \mu \in \mathbb{Z}.$$

Cette droite  $L$  est le graphe de la fonction  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Supposons sans perdre de généralité que  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \neq 0$  et sont relativement premiers. Aussi on définit l'ensemble des points  $M$  par

$$M = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \left\lfloor \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\}, \quad \text{et}$$

$$F(x) - \frac{1}{2} < f(x) \leq F(x) + \frac{1}{2}.$$

La représentation graphique des ensembles  $L$  et  $M$  dans le même plan donne ces figures suivantes :

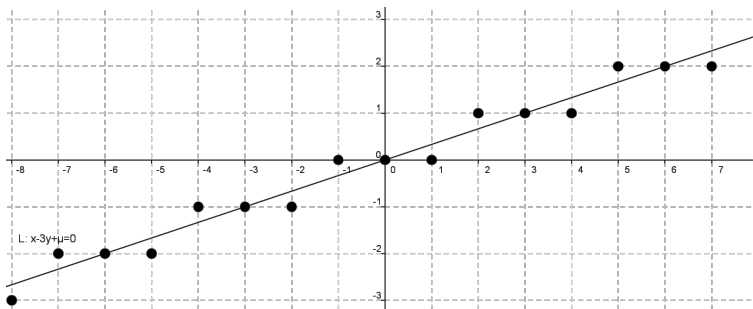


FIGURE 2.3 – La droite euclidienne définie par  $L : x - 3y + \mu = 0$  et l'ensemble  $M$  des points discrets associés.

Ces deux carrés ci-dessous illustrent deux positions particulières entre la droite euclidienne et sa discrétisation en utilisant le nombre entier le plus proche par rapport au problème considéré.

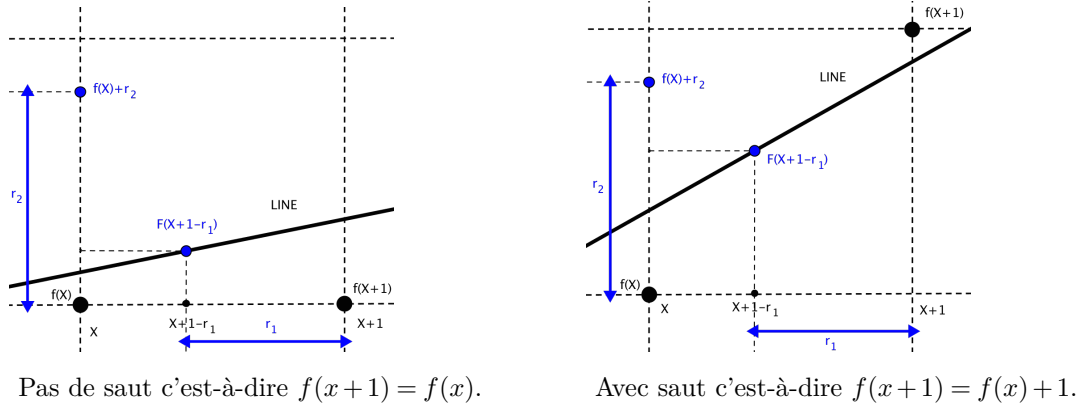


FIGURE 2.4 – La relations entre deux points consécutifs  $x$  et  $x+1$  donnée par cette inégalité  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x+1-r_1) + \frac{\mu}{\alpha_2} \leq f(x) + r_2$ , pour tout  $(x, f(x)) \in M$  avec  $r_1$  le rayons sur l'axe  $x$  et  $r_2$  le rayons sur l'axe  $y$ .

**Théorème 2.2.4.** *Soit*

$$F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

une fonction affine avec  $\alpha_1, \alpha_2, \mu \in \mathbb{Z}$ , et  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ . Soit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} + \frac{1}{2} \rfloor$  sa discrétisation en utilisant la valeur de l'entier le plus proche de  $F(x)$ .

Si  $\alpha = (0, 1)$ , alors  $\text{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\text{graphe}(F)$  si et seulement si  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq 0$ .

Si  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$  et  $\alpha_1, \alpha_2$  sont relativement premiers, alors  $\text{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\text{graphe}(F)$  si et seulement si  $r$  appartient au polygone

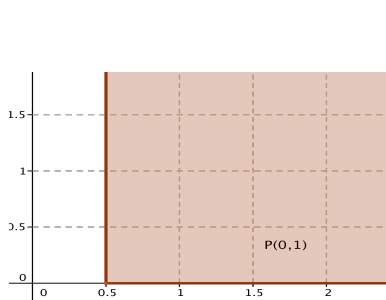
$$Q(\alpha) = \left\{ r \in \mathbb{R}^2; r_1 \geq \frac{1}{2}, r_2 \geq \frac{1}{2}, \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \left\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \right\rfloor \right\}. \quad \square$$

Quand on prend  $r_1 = r_2$  alors on obtient un cas particulier  $r_2 = T_1 \left( F, \left\lfloor F|_{\mathbb{Z}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right)$

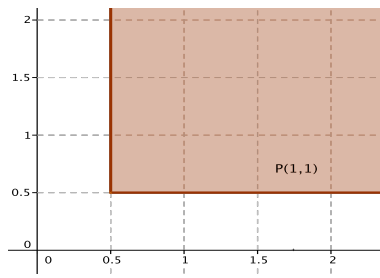
---

et défini par

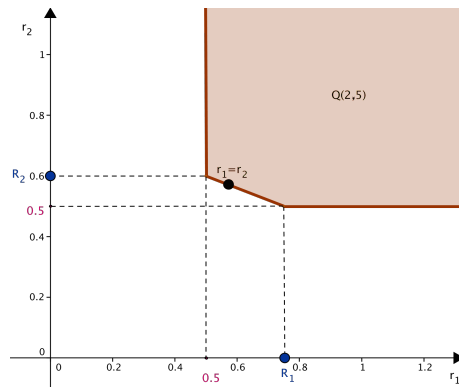
$$T_1\left(F, \left\lfloor F \middle| \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right) = \max\left(1 - \frac{\lceil \frac{\alpha_2}{2} \rceil}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{1}{2}\right).$$



Polygone avec  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = 1$



Polygone avec  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  est un cas particulier du cas suivant.



Polygone avec  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 5$  et les sommets du polygone sont  $(R_1, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, R_2)$  avec  $R_1 = \frac{3}{4}$  et  $R_2 = \frac{3}{5}$ .

FIGURE 2.5 – La représentation graphique des différents polygones  $Q(\alpha)$  selon les valeurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha = (0, 1)$ , alors il est nécessaire et suffisant que  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq 0$ .

Si  $\alpha = (1, 1)$ , alors il est nécessaire et suffisant que  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  et  $r_2 \geq \frac{1}{2}$ .

Supposons maintenant que  $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ , et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont relativement premiers. On démontre d'abord que  $r \in Q(\alpha)$  implique que  $\text{graphe}(f) + U(r) \supset$

**graphe**( $F$ ).

$r \in Q(\alpha)$  implique que  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor$ , et  $r \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ .

Ainsi  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor$  implique que  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2} \right)$ .

$$\text{Et } \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2} \right) \geq \alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2} \right).$$

Le lemme 2.2.3 nous donne

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}} (f(x) - F(x)) = -\frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2}$$

ce qui implique que

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x)) = \frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2}.$$

Donc,  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lfloor \frac{\alpha_2 - 1}{2} \rfloor}{\alpha_2} \right)$  si et seulement si

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \sup_{x \in \mathbb{Z}} (F(x) - f(x))$$

Et  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 (F(x) - f(x)) = \alpha_1 + \alpha_1 x + \mu - \alpha_2 f(x)$ .

Aussi,  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \alpha_1 x + \mu - \alpha_2 f(x)$  cela implique que

$$F(x + 1 - r_1) \leq f(x) + r_2, \quad r \in [\frac{1}{2}, +\infty[$$

Donc, pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $F(x + 1 - r_1) \leq f(x) + r_2$ ,  $r \in [\frac{1}{2}, +\infty[$  implique que

$$\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F).$$

Finalement, on démontre que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  implique que  $r \in Q(\alpha)$ .

$\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  implique qu'il existe deux points entiers  $x$  et  $x + 1$  tels que  $F(x + 1 - r_1) \leq f(x) + r_2$ ,  $r = (r_1, r_2) \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ .

D'autre part, on a pour tout  $x \in \mathbb{Z}$ , il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que  $y \leq F(x) < F(x+1) \leq y+1$ , et on définit  $\varepsilon$  comme 0 si  $\alpha_2$  est pair et comme  $\frac{1}{2\alpha_2}$  si  $\alpha_2$  est impair. Alors lorsqu'on se réfère à la première supposition, il existe deux points entiers  $x$  et  $y$  tels que

$F(x+1) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon \Rightarrow \alpha_1(x+1) + \mu = \alpha_2 y + \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_2 \varepsilon = C_\alpha \in \mathbb{N}$ , le pire des cas qui puisse se produire. Nous savons que  $\alpha_2$  est impair alors  $\alpha_2 \varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2\alpha_2}$ .

Cependant,  $F(x) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < y+1$  et  $F(x+1) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon \geq y+1$ , signifie qu'il existe un saut dans  $f$  tel que  $f(x) = y$  et  $f(x+1) = y+1$ . On a  $r_1 \geq \frac{1}{2}$  implique que  $\alpha_1 r_1 \geq \frac{\alpha_1}{2}$ , on déduit de cela que  $r_2 \geq y+1 - F(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} - \varepsilon$  et  $\alpha_2 r_2 \geq \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_2 \varepsilon$ . Donc, on obtient  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \alpha_2 \varepsilon$  ce qui implique que

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \begin{cases} \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}, & \text{si } \alpha_2 \text{ est pair} \\ \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{2}, & \text{si } \alpha_2 \text{ est impair} \end{cases}$$

cela implique que  $\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor$ . Donc, on obtient les différents côtés du polygone par les inégalités ci-dessous.

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq \alpha_1 + \lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor, \quad \frac{1}{2} \leq r_1, \quad \frac{1}{2} \leq r_2.$$

Donc  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$  si et seulement si  $r$  appartient au polygone  $Q(\alpha)$  donné par les expressions dans l'énoncé du théorème 2.2.4.

On détermine  $r_2$  comme une fonction affine de  $r_1$  ayant comme pente  $\frac{-\alpha_1}{\alpha_2}$  où  $\frac{1}{2} \leq r_1$  et  $\frac{1}{2} \leq r_2$  comme suit

$$r_2 = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1 - r_1) + \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}, & r_1 \in \left[ \frac{1}{2}, 1 + \frac{2\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor - \alpha_2}{2\alpha_1} \right] \\ \frac{1}{2}, & 1 + \frac{2\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor - \alpha_2}{2\alpha_1} \leq r_1 \end{cases}$$

avec  $\frac{1}{2} \geq \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}$  la déviation maximale entre  $F$  et le nombre entier le plus proche  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \rfloor$ . □

## 2.3 Discontinuité de la dilatation

Dans cette section, nous étudions la variation de la pente de la droite euclidienne sur l'ensemble des rayons admissibles appelé polygone  $P(\alpha)$  ou  $Q(\alpha)$ . Cette variation produit parfois des effets très intéressants sur les dimensions de l'élément structurant utilisé dans des dilatations.

### 2.3.1 Discontinuité de la dilatation en utilisant la fonction plancher

L'étude de la variation de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sur la pente du polygone  $P(\alpha)$  montre qu'il existe un intéressant genre de discontinuité au niveau de la dépendance du polygone sur la pente de la droite euclidienne. Ainsi, nous avons :

**Proposition 2.3.1.** *La fonction  $p: [0, 1]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par*

$$p(s) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}{\alpha_2}, \quad s \in [0, 1]_{\mathbb{Q}},$$

où  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = s$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$  est discontinue en tout point  $s$ .

La définition de  $p$  signifie que le polygone  $P(\alpha)$  est défini par  $r_1 \geq \frac{1}{2}$ ,  $r_2 \geq \frac{1}{2}$ , et le côté oblique du polygone est donné par  $sr_1 + r_2 = p(s)$ . Ainsi, la discontinuité de  $p$  implique la discontinuité du polygone  $P(\alpha)$ .

*Démonstration.* Avec  $\alpha$  comme dans l'énoncé de la proposition, nous pouvons trouver  $\alpha^j \in \mathbb{N}^2, j \in \mathbb{N}$ , tel que  $\alpha_2^j$  soit premier,  $\alpha_2^j \rightarrow +\infty$  lorsque  $j \rightarrow +\infty$  et définir  $\alpha_1^j = \left\lfloor \frac{\alpha_1 \alpha_2^j}{\alpha_2} \right\rfloor$ . Alors,  $s_j = \frac{\alpha_1^j}{\alpha_2^j} \nearrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = s$ . Nous voyons que  $p(s_j)$  converge vers  $s + 1 > s + 1 - \frac{1}{\alpha_2} = p(s)$ . Donc, la limite supérieure de  $p(s^j)$  bien que la pente s'approche de  $s = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$  est strictement plus grande que la valeur  $p(s)$  en  $s$ . En d'autre terme, lorsque  $\alpha_2$  est impair, la limite supérieure des polygones  $q(s)$  est strictement incluse dans le polygone  $Q(\alpha)$ , donc nous avons la discontinuité dans ce cas.  $\square$

### 2.3.2 Discontinuité de la dilatation en utilisant le nombre entier le plus proche

Il existe aussi une discontinuité dans ce cas, mais de nature différente de celle de la dilatation en utilisant la fonction. En effet, on a

**Proposition 2.3.2.** *La fonction  $q: [0, 1]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par*

$$q(s) = \frac{\alpha_1 + \lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}, \quad s \in [0, 1]_{\mathbb{Q}},$$

où  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ ,  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = s$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$  est continue en tout point  $s$  tel que  $\alpha_2$  soit pair, et discontinue en tout point  $s$  tel que  $\alpha_2$  soit impair.

*Démonstration.* Prenons d'abord le cas où  $\alpha_2$  est pair. Alors  $q(s) = s + \frac{1}{2}$ , et pour tout  $t = \frac{\beta_1}{\beta_2}$  avec  $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) = 1$ , nous avons  $q(t) = t + \frac{\lfloor \frac{\beta_2}{2} \rfloor}{\beta_2}$ , cela implique que lorsque  $\beta_2$  tend vers  $+\infty$ ,  $q(t)$  converge vers  $s + \frac{1}{2} = q(s)$ .

Si  $\alpha_2$  est impair, la convergence de  $q(t)$  est aussi vers  $s + \frac{1}{2}$ , ce qui est plus grand que  $q(s) = s + \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}$ . Autrement dit, la limite supérieure des polygones  $q(s)$  est strictement incluse dans le polygone  $Q(\alpha)$ , donc nous avons la discontinuité.  $\square$

## 2.4 Exemples d'application

Nous donnerons dans cette section quelques exemples d'applications dans le plan pour permettre de cerner le contexte de recouvrement étudié. Nous prendrons quelques résultats arbitraires en ce qui concerne la taille de l'élément structurant dans les polygones  $P(\alpha)$  et  $Q(\alpha)$ . Parmi les résultats obtenus, nous ferons quelques représentations graphiques des recouvrements lorsque l'élément structurant a une forme carrée et rectangulaire. Nous choisirons  $r_1 = \frac{1}{2}$  pour la forme rectangulaire car ce choix semble être judicieux d'autant plus que  $\frac{1}{2}$  est la valeur minimale que  $r_1$  et  $r_2$  peuvent prendre.



### 2.4.1 Recouvrement de la droite euclidienne

Considérons la fonction  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \frac{x+5}{3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Pour le recouvrement  $\mathbf{graphe}(f) + U(r_1, r_2) \supset \mathbf{graphe}(F)$  avec les cas  $r_1 = r_2$  et  $r_1 \leq r_2$  ou  $r_1 \geq r_2$ , on obtient les dimensions optimales de l'élément structurant  $U(r_1, r_2)$  en utilisant les deux discrétisations  $f(x) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}} \rfloor$  et  $f(x) = \lfloor F|_{\mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \rfloor$ .

Notons maintenant  $L = \mathbf{graphe}(F)$ ,  $M_{pl}$  la discrétisation de  $L$  en utilisant la fonction plancher et  $M_{pp}$  la discrétisation de  $L$  en utilisant l'entier le plus proche (cette notation est utilisée uniquement pour le besoin d'application).

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous et suivis de leurs applications graphiques pour le recouvrement de la droite euclidienne en utilisant la fonction plancher et le nombre entier le plus proche.

TABLE 2.1 – Les résultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements :  $M_{pl} + U(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset L$ , cf. Figure 2.6, 2.7 et Figure 2.8.

Paramètres $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = 3$	$(r_1, r_2)$ avec la fonction plancher	$(r_1, r_2)$ avec l'entier le plus proche
$r_1 = r_2$	$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$r_1 \leq r_2$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
Optimum $(r_1, r_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

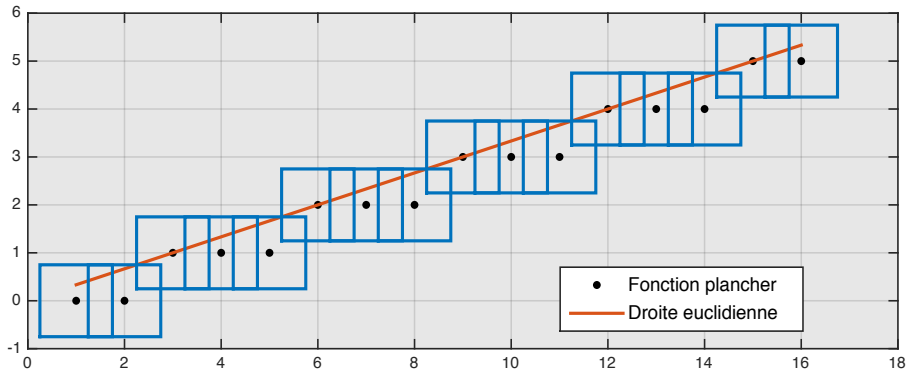


FIGURE 2.6 – Exemple de recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1

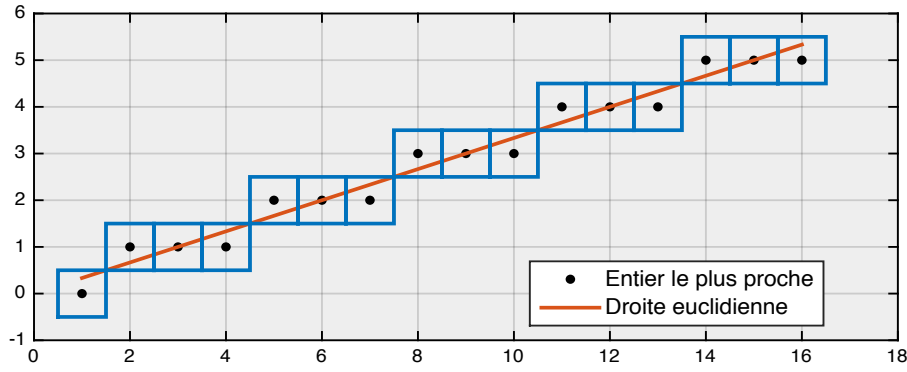


FIGURE 2.7 – Exemple de recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1

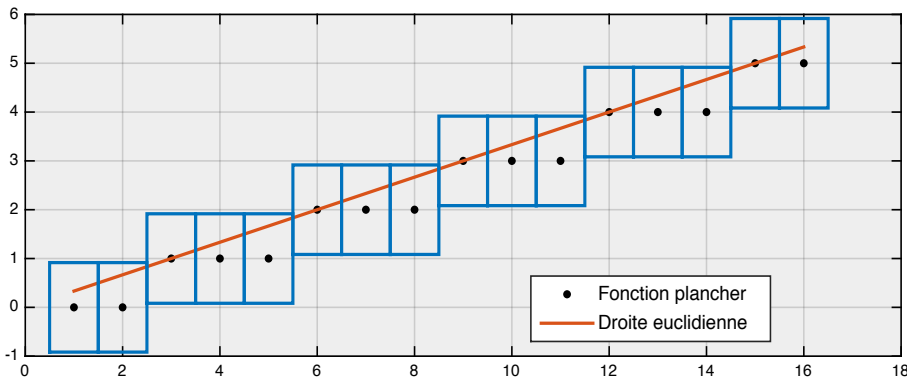


FIGURE 2.8 – Exemple de recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1

## 2.4.2 Etude comparative des deux méthodes

Nous allons étudier l'impact de la variation de la pente sur les dimensions de l'élément structurant en utilisant les deux méthodes de discrétisations.

Etant donnée une classe de fonctions affines  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2}$ , tels que  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\mu \in \mathbb{Z}$  aussi  $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \neq 0$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ , on définit la droite euclidienne par

$$L = \left\{ (x, F(x)) \in \mathbb{R}^2; F(x) = \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} \right\}$$

et

$$M_{pl} = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \left\lfloor \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} \right\rfloor \right\}$$

sa discrétisation en utilisant la fonction plancher et aussi

$$M_{pp} = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{Z}^2; f(x) = \left\lfloor \frac{\alpha_1 x + \mu}{\alpha_2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\}$$

l'autre discrétisation en utilisant le nombre entier le plus proche.

Les tableaux ci-dessous résument les différents résultats obtenus concernant la taille de l'élément structurant pour le recouvrement de la droite euclidienne par rapport à la variation de la pente  $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ .

TABLE 2.2 – Les résultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements :  $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ ,  $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{17}{15}) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \supset L$ , cf. Figure 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12.

Paramètres $(\alpha_1, \alpha_2)$ et $(r_1, r_2)$	$(r_1, r_2)$ avec la fonction plancher	$(r_1, r_2)$ avec l'entier le plus proche
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$ et $r_1 = r_2$	$(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$	$(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$ et $r_1 \neq r_2$	$(\frac{1}{2}, \frac{17}{15})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
Optimum $(r_1, r_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{17}{15})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

## Recouvrement d'une droite euclidienne

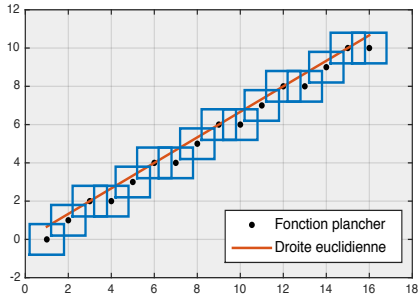


FIGURE 2.9 – Recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2.

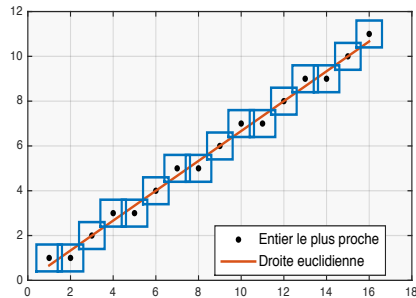


FIGURE 2.10 – Recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2.

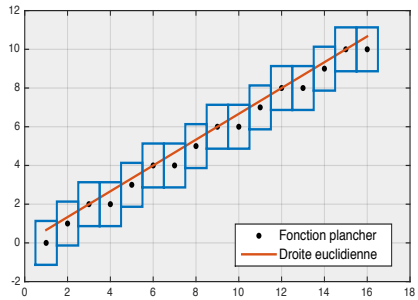


FIGURE 2.11 – Recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{17}{15}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2.

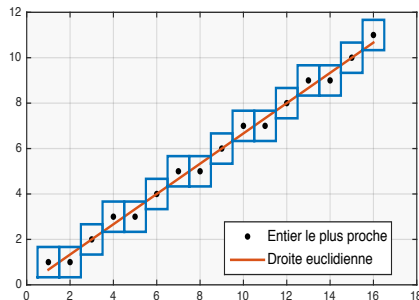


FIGURE 2.12 – Recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2.

TABLE 2.3 – Les résultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements :  $M_{pl} + U(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}) \supset L$ ,  $M_{pp} + U(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, 1) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Figure 2.13, 2.14, 2.15 et 2.16.

Paramètres $(\alpha_1, \alpha_2)$ et $(r_1, r_2)$	$(r_1, r_2)$ avec la fonction plancher	$(r_1, r_2)$ avec l'entier le plus proche
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 5$ et $r_1 = r_2$	$(\frac{6}{7}, \frac{6}{7})$	$(\frac{4}{7}, \frac{4}{7})$
$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 5$ et $r_1 \neq r_2$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$
Optimum $(r_1, r_2)$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$

## Recouvrement d'une droite euclidienne

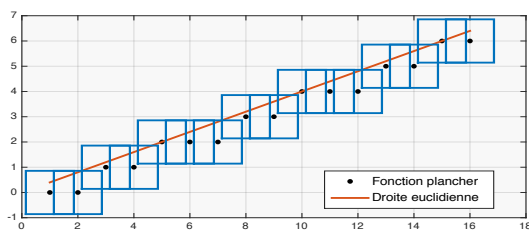


FIGURE 2.13 – Recouvrement  
 $M_{pl} + U(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3.

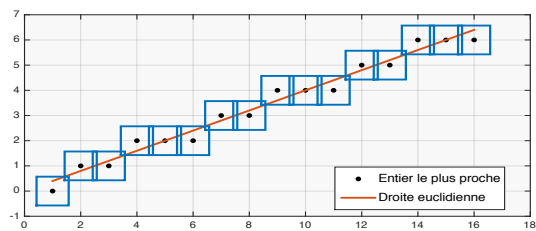


FIGURE 2.14 – Recouvrement  
 $M_{pp} + U(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3.

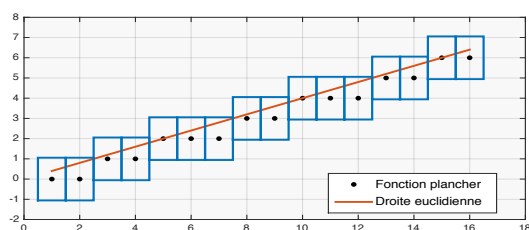


FIGURE 2.15 – Recouvrement  
 $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, 1) \supset L$ , cf. Tableau 2.3.

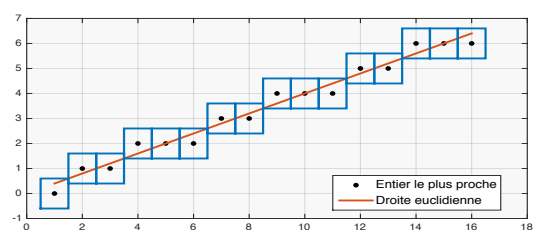


FIGURE 2.16 – Recouvrement  
 $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3.

TABLE 2.4 – Les résultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements :  
 $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ ,  $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Figure 2.17, 2.18, 2.19 et 2.20.

Paramètres $(\alpha_1, \alpha_2)$ et $(r_1, r_2)$	$(r_1, r_2)$ avec la fonction plancher	$(r_1, r_2)$ avec l'entier le plus proche
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4$ et $r_1 = r_2$	$(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$	$(\frac{3}{5}, \frac{3}{5})$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4$ et $r_1 \neq r_2$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$
Optimum $(r_1, r_2)$	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$

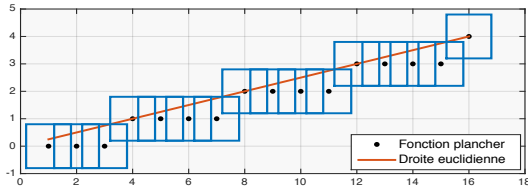


FIGURE 2.17 – Recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4.

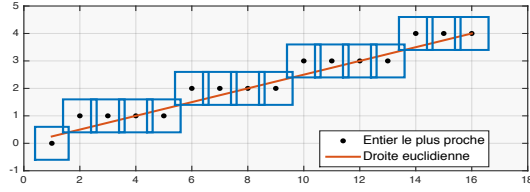


FIGURE 2.18 – Recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4.

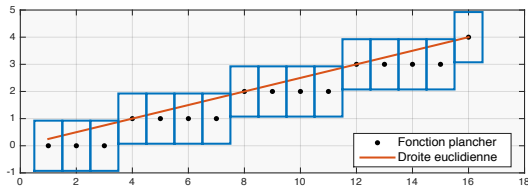


FIGURE 2.19 – Recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4.

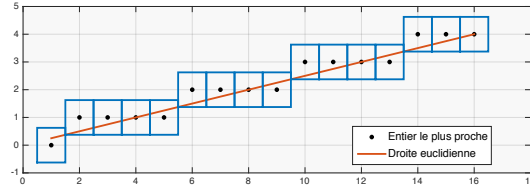


FIGURE 2.20 – Recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4.

### 2.4.3 Interprétation des résultats

#### Cas de la fonction plancher

Si nous souhaitons avoir un carré comme la forme de l'élément structurant  $U(r, r)$ , l'optimum est atteint lorsque  $r = \max(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2})$  mais par contre pour une forme arbitraire de l'élément structurant  $U(r_1, r_2)$  différente d'une forme carrée, un cas particulier est que si on souhaite avoir  $r_1 = \frac{1}{2}$ , alors l'optimum est atteint pour  $r_2 = \max(\frac{1}{2}, 1 + \frac{\alpha_1 - 2}{2\alpha_2})$  où  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ . Généralement l'optimum est atteint pour

$$r_2 = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1 - r_1) + 1 - \frac{1}{\alpha_2}, & r_1 \in [\frac{1}{2}, 1] ; \\ 1 - \frac{1}{\alpha_2}, & 1 \leq r_1. \end{cases}$$

### Cas de l'entier le plus proche

De même si, on souhaite avoir un carré comme la forme de l'élément structurant  $U(r, r)$ , l'optimum est atteint au point  $r = \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)$  où  $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$ . Tandis que pour une forme quelconque, l'optimum est déterminé par cette relation entre  $r_1$  et  $r_2$  ci-dessous.

$$r_2 = \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1 - r_1) + \frac{\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor}{\alpha_2}, & r_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1 + \frac{2\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor - \alpha_2}{2\alpha_1}\right]; \\ \frac{1}{2}, & 1 + \frac{2\lfloor \frac{\alpha_2}{2} \rfloor - \alpha_2}{2\alpha_1} \leq r_1. \end{cases}$$

Pour ce cas, le choix sur les dimensions de l'élément structurant dépendra des objectifs fixés au préalable par le décideur.

A travers ces exemples, nous remarquons que la discrétisation en utilisant l'entier le plus proche dans le plan offre un recouvrement minimal par rapport à celle de la fonction plancher.

En effet, la méthode de recouvrement en utilisant l'entier le plus proche donne en général un recouvrement plus petit de la droite euclidienne par rapport à la méthode de recouvrement en utilisant la fonction plancher.

### Autres exemples de recouvrement

Lorsqu'on prend  $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$  pour le cas où  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 3$ , on obtient ces exemples ci-dessous de recouvrement qui ne sont pas appropriés pour un recouvrement total de la droite euclidienne.

---

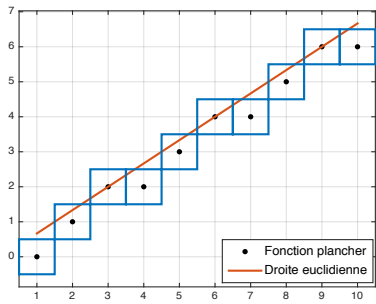


FIGURE 2.21 – Autre exemple de recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supseteq L$  pour  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 3$ .

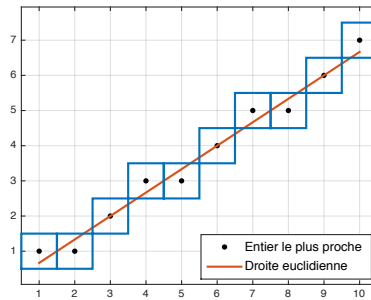


FIGURE 2.22 – Autre exemple de recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supseteq L$  pour  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = 3$ .

Ces exemples confirment que l'élément structurant  $U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  n'est pas toujours adapté pour un recouvrement optimal.



---

---

## CHAPITRE 3

---

# EXTENSION DE LA NOTION DE RECOUVREMENT

### 3.1 Recouvrement d'un hyperplan euclidien

Nous généralisons ces deux précédentes méthodes de recouvrement présentées dans le plan, en dimensions supérieures et rappelons que  $L$  est un hyperplan euclidien de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ayant comme équation  $\alpha_{n+1}x_{n+1} = \alpha' \cdot x + \mu$  et donné par une fonction  $F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}^{n+1}, \alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ , avec  $L = \mathbf{graph}F$ , et  $M$  est le graphe d'une fonction  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , donc un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^{n+1}$ . En particulier on peut prendre  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor$  ou  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n + \frac{1}{2}} \rfloor$ . Pour tout  $r \in P(\alpha)$  où  $Q(\alpha)$  des sous ensembles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , on définit  $U$  comme un bloc de la forme

$$U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x_j| \leq r_j, j = 1, \dots, n+1\} = \prod_{j=1}^{n+1} [-r_j, r_j] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

### 3.1.1 Discrétisation à l'aide de la fonction plancher

Nous choisissons d'abord la discrétisation  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  d'une fonction affine  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $F|_{\mathbb{Z}^n} - 1 < f \leq F|_{\mathbb{Z}^n}$ . Ainsi on obtient le lemme suivant.

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $F$  une fonction affine définie par  $F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \mu \in \mathbb{Z}$ , et  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , on définit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$  nous avons*

$$F(x) - f(x) \leq 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

et il existe au moins un  $x \in \mathbb{Z}^n$  donnant l'égalité.

Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ,  $F(x) - f(x) \geq 0$  avec l'égalité pour quelques  $x \in \mathbb{Z}^n$ .

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$  nous avons  $f(x) \leq F(x) < f(x) + 1$  et

$$F(x) < f(x) + 1 \text{ implique que } \alpha' \cdot x + \mu < \alpha_{n+1}f(x) + \alpha_{n+1}.$$

Aussi  $\alpha' \cdot x + \mu < \alpha_{n+1}f(x) + \alpha_{n+1}$  implique que  $\alpha' \cdot x + \mu \leq \alpha_{n+1}f(x) + \alpha_{n+1} - 1$ .

Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{Z}^n$  on a  $F(x) - f(x) \leq 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ . Nous avons aussi  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , alors il existe  $x \in \mathbb{Z}^n$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\alpha' \cdot x + \mu = \alpha_{n+1}y + \alpha_{n+1} - 1.$$

Par conséquent  $F(x) = y + 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ . Il en résulte que si  $y = f(x)$  alors

$$F(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}} = \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} (F(z) - f(z)).$$

□

**Théorème 3.1.2.** *Soit*

$$F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

une fonction affine avec  $\alpha_j, \mu \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} \neq 0, j = 1, \dots, n$ . Soit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor$  sa discrétisation en utilisant la fonction plancher.

Si  $\alpha_j = 0$  et  $\alpha_{n+1} = 1, j = 1, \dots, n$ , alors  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$  si et seulement si  $r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n$ , et  $r_{n+1} \geq 0$ .

Si  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}, j = 1, \dots, n$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , alors  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$  si et seulement si  $r$  appartient au polyèdre

$$P(\alpha) = \left\{ r \in \mathbb{R}^{n+1}; r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n+1, \alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1 \right\}. \quad \square$$

En prenant  $r_1 = \dots = r_{n+1}$ , on obtient un cas particulier  $r_{n+1} = T_n(F, \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor)$  et défini par

$$T_n(F, \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} \rfloor) = \max \left( 1 - \frac{1}{\|\alpha\|_1}, \frac{1}{2} \right).$$

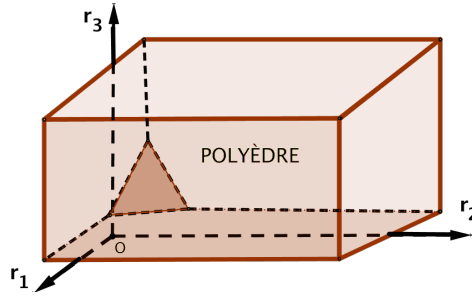


FIGURE 3.1 – Pour  $n = 2$ , on obtient une représentation graphique du polyèdre en utilisant la fonction plancher.

**Rémarque 3.1.3.** Cela pourrait être une surprise que, juste pour  $n = 1$ , le polyèdre a au plus une face qui n'est pas parallèle au plan de coordonnées.

*Démonstration.* Si  $\alpha = (0, \dots, 0, 1)$  alors il est nécessaire et suffisant que  $r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n$ , et  $r_{n+1} \geq 0$ .

Si  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}, j = 1, \dots, n$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$  alors considérons ces deux graphes,  $\mathbf{graphe}(F) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et  $\mathbf{graphe}(f) \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ .

Nous allons prouver d'abord que  $r$  appartient au polyèdre  $P(\alpha)$  implique que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$ .

Si  $r \in P(\alpha)$  alors  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1$ , et  $\frac{1}{2} \leq r_j, j = 1, \dots, n+1$ .

Donc  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1$  implique que  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$ .

Et  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \left(1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)$  si et seulement si

$$\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \sup_{x \in \mathbb{Z}^n} (F(x) - f(x))$$

parce que dans le Lemme 3.1.1 on a

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^n} (F(x) - f(x)) = 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1}(F(x) - f(x)) = \alpha' \cdot \mathbb{1} + \alpha' \cdot x + \mu - \alpha_{n+1}f(x)$ .

Et  $\alpha_{n+1}r_{n+1} + \alpha' \cdot (r_1, \dots, r_n) \geq \alpha' \cdot \mathbb{1} + \alpha' \cdot x + \mu - \alpha_{n+1}f(x)$  implique que  $\alpha' \cdot (x_1 + 1 - r_1, \dots, x_n + 1 - r_n) + \mu \leq \alpha_{n+1}f(x) + \alpha_{n+1}r_{n+1}$ . Il en résulte que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;  $F(x+1-r) \leq f(x) + r_2, \frac{1}{2} \leq r_j, j = 1, \dots, n+1$ , cela implique que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$ .

En suite nous allons prouver que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  implique que  $r$  appartient au polyèdre  $P(\alpha)$ .

Si  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  alors il existe au moins un  $x \in \mathbb{Z}^n$  tel que

$$F(x_1 + 1 - r_1, \dots, x_n + 1 - r_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) + r_{n+1}, r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n+1.$$

Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tel que  $y \leq F(x) < y+1 \leq F(x+1)$  et on choisit

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha_{n+1}} \text{ tel que } y+1 > F(x),$$

c'est-à-dire,  $y+1 > \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}$  cela implique que  $\alpha_{n+1}(y+1) - 1 \geq \alpha' \cdot x + \mu$  et

$$y+1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}} \geq \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}} = F(x).$$

Donc  $y+1 - F(x) \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}} = \varepsilon$ . Nous avons aussi

$$F(x) = y+1 + \frac{\|\alpha'\|_1}{2\alpha_{n+1}} - \varepsilon < y+1 \text{ et } F(x+1) = y+1 + \frac{\|\alpha'\|_1}{\alpha_{n+1}} - \varepsilon \geq y+1,$$

cela signifie qu'il existe un saut dans  $f$ , tel que  $f(x) = y$  et  $f(x+1) = y+1$ .

De  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$  on obtient  $\alpha_j r_j \geq \frac{\alpha_j}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et par suite

$$r_{n+1} \geq F(x + \frac{1}{2}) - y = 1 + \frac{\|\alpha'\|_1}{2\alpha_{n+1}} - \varepsilon \text{ ce qui donne } \alpha_{n+1} r_{n+1} \geq \alpha_{n+1} + \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 - \alpha_{n+1}\varepsilon$$

$$\text{et } \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \alpha_{n+1} r_{n+1} \geq \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 + (\alpha_{n+1} + \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 - \alpha_{n+1}\varepsilon).$$

Il en résulte que  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - \alpha_{n+1}\varepsilon$  donc  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1 \in \mathbb{N}$ .

De cette inégalité, on définit les différentes faces du polyèdre comme suivant

$$r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n+1, \alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1.$$

Par conséquent,  $r \in P(\alpha)$  si et seulement si  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  et le polyèdre  $P(\alpha)$  est donné par les expressions dans l'énoncé du théorème 3.1.2.

Cependant, on détermine  $r_{n+1}$  comme une fonction affine de  $(r_1, \dots, r_n)$  avec comme pente  $(\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}, \dots, \frac{-\alpha_n}{\alpha_{n+1}})$  dans l'intervalle où  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Donc on définit un nombre réel  $\theta \in [0, 1]$  par  $\theta = \max(\frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}, \frac{1}{2})$ . Ainsi on obtient  $r_{n+1}$  tel que  $r_{n+1} \geq \theta$ .

De  $\alpha' \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - 1$ ,  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$  nous avons

$$r_{n+1} \geq \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}(1 - r_j) + \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}}, \frac{1}{2} \leq r_j, j = 1, \dots, n,$$

et

$$r_{n+1} \geq \theta \text{ si et seulement si } \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}(1 - r_j) + \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}} \geq \theta.$$

Donc

$$\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}(1 - r_j) + \frac{\alpha_{n+1}-1}{\alpha_{n+1}} \geq \theta \Rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j(1 - r_j) \geq \alpha_{n+1}(\theta - 1) + 1, j = 1, \dots, n.$$

On prend  $\varepsilon_j = 1 - r_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et on obtient  $\alpha' \cdot \varepsilon \geq \alpha_{n+1}(\theta - 1) + 1$ ,  
 $j = 1, \dots, n$ .

En se référant sur les taux  $\frac{\alpha_j}{\|\alpha'\|_1}$  de proportionnalité tels que  $\frac{\alpha' \cdot 1}{\|\alpha'\|_1} = 1$ , on obtient

$$\frac{\alpha_j \varepsilon_j}{\|\alpha'\|_1} \geq \frac{\alpha_{n+1}(\theta - 1) + 1}{n\|\alpha'\|_1}, \quad j = 1, \dots, n,$$

ce qui implique que

$$\varepsilon_j \geq \frac{\alpha_{n+1}(\theta - 1) + 1}{n\alpha_j} \quad \text{où} \quad r_j \leq 1 + \frac{\alpha_{n+1}(1 - \theta) - 1}{n\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Finalement, on obtient  $r_{n+1}$ , comme suivant

$$r_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}(1 - r_j) + \frac{\alpha_{n+1} - 1}{\alpha_{n+1}}, & r_j \in \left[ \frac{1}{2}, 1 + \frac{\alpha_{n+1}(1 - \theta) - 1}{n\alpha_j} \right], \quad j = 1, \dots, n; \\ \theta, & 1 + \frac{\alpha_{n+1}(1 - \theta) - 1}{n\alpha_j} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n; \\ \max \left( \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}(1 - r_j) + \frac{\alpha_{n+1} - 1}{\alpha_{n+1}}, \theta \right), & \frac{1}{2} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

□

### 3.1.2 Discretisation à l'aide du nombre entier le plus proche

Nous discrétisons une fonction affine  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en prenant le nombre entier le plus proche  $f(x) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n}(x) + \frac{1}{2} \rfloor: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  telle que  $F|_{\mathbb{Z}^n} - \frac{1}{2} < f \leq F|_{\mathbb{Z}^n} + \frac{1}{2}$ .

**Lemme 3.1.4.** *Soit  $F$  une fonction affine,  $F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}, \mu \in \mathbb{Z}$ , et  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$  sont relativement premier. On définit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} + 1/2 \rfloor: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$  nous avons*

$$f(x) - F(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair} \end{cases}$$

et il existe un  $x \in \mathbb{Z}^n$  tel que

$$f(x) - F(x) = \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} (f(z) - F(z)) = \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1} - 1}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}} = \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}.$$

$$\text{Aussi} \quad f(x) - F(x) \geq \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair} \end{cases}$$

et il existe aussi un  $x \in \mathbb{Z}^n$  tel que

$$f(x) - F(x) = \inf_{y \in \mathbb{Z}^n} (f(y) - F(y)) = -\frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}.$$

*Démonstration.* Supposons que  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ . Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , nous avons cette double inégalité  $F(x) - \frac{1}{2} < f(x) \leq F(x) + \frac{1}{2}$ .

A partir de l'inégalité droite on a pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;  $f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2}$  et par conséquent on obtient pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}f(x) - (\alpha' \cdot x + \mu) \leq \frac{\alpha_{n+1}}{2} \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \alpha_{n+1}f(x) - (\alpha' \cdot x + \mu) \leq \frac{\alpha_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair,} \end{cases}$$

cela implique que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;

$$\begin{cases} f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair;} \\ f(x) - F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair,} \end{cases}$$

Puisque  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , il existe  $x \in \mathbb{Z}^n$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}y - (\alpha' \cdot x + \mu) = \frac{\alpha_{n+1}}{2} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \alpha_{n+1}y - (\alpha' \cdot x + \mu) = \frac{\alpha_{n+1}}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair,} \end{cases}$$

Alors prenons  $y = f(x)$ , on obtient

$$f(x) - F(x) = \sup_{z \in \mathbb{Z}^n} (f(z) - F(z)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair,} \end{cases}$$

cela équivaut à

$$\sup_{x \in \mathbb{Z}^n} (f(x) - F(x)) = \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}} = \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}.$$

Considérons la même double inégalité  $F(x) - \frac{1}{2} < f(x) \leq F(x) + \frac{1}{2}$ .

De l'inégalité gauche on obtient pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;  $f(x) - F(x) > -\frac{1}{2}$  cela implique que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ;

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}f(x) - (\alpha' \cdot x + \mu) \geq -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + 1 \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \alpha_{n+1}f(x) - (\alpha' \cdot x + \mu) \geq -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair.} \end{cases}$$

Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{Z}^n$ , on obtient

$$\begin{cases} f(x) - F(x) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ f(x) - F(x) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair.} \end{cases}$$

Avec  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , alors il existe  $x \in \mathbb{Z}^n$  et il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tels que pour tout  $x$  de  $\mathbb{Z}^n$ , on a

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}y - (\alpha' \cdot x + \mu) = -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + 1 \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ \alpha_{n+1}y - (\alpha' \cdot x + \mu) = -\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^n & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair.} \end{cases}$$

Prenons  $y = f(x)$  et on obtient

$$f(x) - F(x) = \inf_{z \in \mathbb{Z}^n} (f(z) - F(z)) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est pair,} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha_{n+1}} & \text{si } \alpha_{n+1} \text{ est impair} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\inf_{x \in \mathbb{Z}^n} (f(x) - F(x)) = -\frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}.$$

□

**Théorème 3.1.5.** *Soit*

$$F(x) = \frac{\alpha' \cdot x + \mu}{\alpha_{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

*une fonction affine avec  $\alpha_j, \mu \in \mathbb{Z}$  et  $0 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Soit  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} + 1/2 \rfloor$  sa discrétisation en utilisant la valeur du nombre entier le plus proche de  $F(x)$ .*

---



Si  $\alpha_j = 0$  et  $\alpha_{n+1} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ , alors  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$  si et seulement si  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $r_{n+1} \geq 0$ .

Si  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , alors  $\mathbf{graphe}(f) + U(r)$  contient  $\mathbf{graphe}(F)$  si et seulement si  $r$  appartient au polyèdre

$$Q(\alpha) = \left\{ r \in \mathbb{R}^{n+1}; r_j \geq \frac{1}{2}, j = 1, \dots, n+1, \alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - \left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rfloor \right\}. \quad \square$$

En prenant  $r_1 = \dots = r_{n+1}$ , on obtient un cas particulier  $r_{n+1} = T_n \left( F, \left\lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) \subset \mathbb{R}$  défini par

$$T_n \left( F, \left\lfloor F|_{\mathbb{Z}^n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right) = \max \left( 1 - \frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rfloor}{\|\alpha\|_1}, \frac{1}{2} \right).$$

*Démonstration.* Si  $\alpha = (0, \dots, 0, 1)$  alors il est nécessaire et suffisante que  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $r_{n+1} \geq 0$ .

Supposons d'abord que  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$ , et montrons que  $r$  appartient au polyèdre  $Q(\alpha)$  implique que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$ .

Si  $r \in Q(\alpha)$ , alors  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - \left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rfloor$ , et  $\frac{1}{2} \leq r_j$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . Aussi  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - \left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rfloor$  implique que

$$\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \left( \frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rfloor}{\alpha_{n+1}} \right) \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \left( \frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \right\rfloor}{\alpha_{n+1}} \right).$$

Donc  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \left( \frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \right\rfloor}{\alpha_{n+1}} \right)$  si et seulement si

$$\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} \sup_{x \in \mathbb{Z}^n} (F(x) - f(x))$$

parce que dans le Lemme 3.1.4 on a  $\inf_{x \in \mathbb{Z}^n} (f(x) - F(x)) = -\frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \right\rfloor}{\alpha_{n+1}}$ .

Et  $\inf_{x \in \mathbb{Z}^n} (f(x) - F(x)) = -\frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \right\rfloor}{\alpha_{n+1}}$  implique que  $\sup_{x \in \mathbb{Z}^n} (F(x) - f(x)) = \frac{\left\lfloor \frac{\alpha_{n+1}-1}{2} \right\rfloor}{\alpha}$ .

---

Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1}(F(x) - f(x)) = \alpha' \cdot \mathbb{1} + \alpha' \cdot x + \mu - \alpha_{n+1}f(x)$ .

Et  $\alpha_{n+1}r_{n+1} + \alpha' \cdot (r_1, \dots, r_n) \geq \alpha' \cdot \mathbb{1} + \alpha' \cdot x + \mu - \alpha_{n+1}f(x)$ , cela implique que

$$\alpha' \cdot (x_1 + 1 - r_1, \dots, x_n + 1 - r_n) + \mu \leq \alpha_{n+1}f(x) + \alpha_{n+1}r_{n+1}.$$

De la dernière inégalité, il en résulte que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , on a

$$F(x + 1 - r) \leq f(x) + r_2, \quad \frac{1}{2} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n + 1,$$

cela implique que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$ .

Il reste à prouver que  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  implique que  $r \in Q(\alpha)$ .

Si  $\mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$  nous avons

$$F(x_1 + 1 - r_1, \dots, x_n + 1 - r_n) \leq f(x_1, \dots, x_n) + r_{n+1}, \quad \frac{1}{2} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Aussi pour tout  $x \in \mathbb{Z}^n$ , il existe  $y \in \mathbb{Z}$  tel que  $y \leq F(x) < F(x + 1) \leq y + 1$ , et on définit  $\varepsilon$  comme 0 si  $\alpha_{n+1}$  est pair et comme  $\frac{1}{2\alpha_{n+1}}$  si  $\alpha_{n+1}$  est impair. Il existe deux points entiers  $x \in \mathbb{Z}^n$  et  $y \in \mathbb{Z}$  tels que

$$F(x + 1) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon \quad \text{implique que} \quad \alpha' \cdot x + \mu = \alpha_{n+1}y + \frac{\alpha_{n+1}}{2} + \alpha_{n+1}\varepsilon \in \mathbb{Z},$$

le pire des cas qui peut se produire. Nous savons que  $\alpha_{n+1}$  est impair ainsi

$$\alpha_{n+1}\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \text{implique que} \quad \varepsilon = \frac{1}{2\alpha_{n+1}}.$$

Cependant on a  $F(x) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon - \frac{\|\alpha'\|_1}{\alpha_{n+1}} < y + \frac{1}{2}$  et  $F(x + 1) = y + \frac{1}{2} + \varepsilon \geq y + \frac{1}{2}$ , cela veut dire qu'il existe un saut dans  $f$  tel que  $f(x) = y$  et  $f(x + 1) = y + 1$ . En effet pour  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$  implique que  $\alpha_j r_j \geq \frac{\alpha_j}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n$  on déduit de cela que

$$r_{n+1} \geq y + 1 - F(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\|\alpha'\|_1}{2\alpha_{n+1}} - \varepsilon \quad \text{et} \quad \alpha_{n+1}r_{n+1} \geq \frac{\alpha_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 - \alpha_{n+1}\varepsilon.$$

Donc on obtient

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \alpha_{n+1}r_{n+1} \geq \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}\|\alpha'\|_1 - \alpha_{n+1}\varepsilon\right) \quad \text{implique que}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j r_j \geq \|\alpha'\|_1 + \frac{\alpha_{n+1}}{2} - \alpha_{n+1}\varepsilon \quad \text{donc} \quad \alpha \cdot r \geq \|\alpha'\|_1 + \lfloor \alpha_{n+1}/2 \rfloor.$$

$$\text{Et nous avons} \quad \|\alpha'\|_1 + \lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor = \|\alpha'\|_1 + \alpha_{n+1} - \lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rceil = \|\alpha\|_1 - \lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rceil$$

ce qui implique que les différentes faces du polyèdre sont données par

$$r_j \geq \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, n+1 \quad \alpha \cdot r \geq \|\alpha\|_1 - \lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rceil,$$

Finalement,  $r \in Q(\alpha) \Leftrightarrow \mathbf{graphe}(f) + U(r) \supset \mathbf{graphe}(F)$  et le polyèdre  $Q(\alpha)$  est donné par les expressions dans l'énoncé du théorème 3.1.5.

On détermine aussi  $r_{n+1}$  comme une fonction affine de  $(r_1, \dots, r_n)$  ayant comme pente  $(\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}, \dots, \frac{-\alpha_n}{\alpha_{n+1}})$ . Les valeurs optimales du rayon  $r_{n+1}$  sont obtenues en tenant compte que  $r_{n+1} \geq \max\left(\frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  et on obtient  $r_{n+1}$  de la même façon que dans la précédente preuve comme suivant

$$r_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} (1 - r_j) + \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}, & r_j \in \left[ \frac{1}{2}, 1 + \frac{2 \lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rceil - \alpha_{n+1}}{2n\alpha_j} \right], \quad j = 1, \dots, n; \\ \frac{1}{2}, & 1 + \frac{2 \lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rceil - \alpha_{n+1}}{2n\alpha_j} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n; \\ \max\left(\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} (1 - r_j) + \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}, \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} \leq r_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

□

## 3.2 Discontinuité de la dilatation dans le polyèdre

Nous allons investiguer la variation des coefficients  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, n+1$  sur la forme du polyèdre obtenu en utilisant les deux différentes discrétisations.

### 3.2.1 Discontinuité de la dilatation en utilisant la fonction plancher

En dimensions supérieures, nous avons aussi un cas intéressant de discontinuité dans la dépendance du polyèdre sur les pentes de l'hyperplan euclidien de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposition 3.2.1.** *La fonction  $p: [0, 1]_{\mathbb{Q}}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par*

$$p(s) = \frac{\|\alpha\|_1 - 1}{\alpha_{n+1}}, \quad s \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}^n,$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $s_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$  est discontinue en tout point  $s$ .

Pour  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , une face du polyèdre est donnée par  $s_1 r_1 + \dots + s_n r_n + r_{n+1} = p(s)$ . Ainsi la discontinuité de  $p$  implique la discontinuité du polyèdre  $P(\alpha)$ .

*Démonstration.* Il existe  $\alpha^i \in \mathbb{N}^{n+1}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  associé à  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$  tel que  $\alpha_{n+1}^i$  est premier,  $\alpha_{n+1}^i \rightarrow +\infty$  lorsque  $i \rightarrow +\infty$  et définit  $\alpha_j^i = \left\lfloor \frac{\alpha_j \alpha_{n+1}^i}{\alpha_{n+1}} \right\rfloor$ . Alors  $s_j^i = \frac{\alpha_j^i}{\alpha_{n+1}^i} \nearrow \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} = s_j$ . Nous remarquons que  $p(s^i)$  converge vers  $\|s\|_1 + 1 > \|s\|_1 + 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}} = p(s)$ . La limite supérieure de  $p$  a la pente  $s_j^i = \frac{\alpha_j^i}{\alpha_{n+1}^i}$  qui s'approche de  $s_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}$  et est strictement plus grand que cette valeur en  $s_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ .  $\square$

### 3.2.2 Discontinuité de la dilatation en utilisant le nombre entier le plus proche

Nous avons aussi une discontinuité en dimensions supérieures en utilisant le nombre entier le plus proche pour discrétiser une fonction affine dans l'énoncé du théorème 3.1.5.

**Proposition 3.2.2.** *La fonction  $q: [0, 1]_{\mathbb{Q}}^n \rightarrow \mathbb{Q}$  définie par*

$$q(s) = \frac{\|\alpha\|_1 - \left\lceil \frac{\alpha_{n+1}}{2} \right\rceil}{\alpha_{n+1}}, \quad s \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}^n,$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \alpha_j \leq \alpha_{n+1}$ ,  $s_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = 1$  est continue en tout point  $s$  tel que  $\alpha_{n+1}$  soit pair, et discontinue en tout point  $s$  tel que  $\alpha_{n+1}$  soit impair.

Pour  $r_j \geq \frac{1}{2}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , une face du polyèdre est donnée par  $s_1 r_1 + \dots + s_n r_n + r_{n+1} = q(s)$ . Donc la continuité ou la discontinuité de  $q$  implique respectivement la continuité ou la discontinuité du polyèdre  $Q(\alpha)$ .

*Démonstration.* Si  $\alpha_{n+1}$  est pair alors on obtient  $q(s) = \|s\|_1 + \frac{1}{2}$ , et pour tout  $t \in [0, 1]_{\mathbb{Q}}^n$  tel que  $t_j = \frac{\beta_j}{\beta_{n+1}}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et  $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$  soient relativement premiers, on obtient  $q(t) = \|t\|_1 + \frac{\lfloor \frac{\beta_{n+1}}{2} \rfloor}{\beta_{n+1}}$ . Lorsque  $\beta_{n+1}$  tend vers  $+\infty$ , cette quantité converge vers  $\|s\|_1 + \frac{1}{2} = q(s)$ .

Si on prend  $\alpha_{n+1}$  impair, la convergence de  $q(t)$  est aussi équivalent à  $\|s\|_1 + \frac{1}{2}$ , ce qui est plus grand que  $q(s) = \|s\|_1 + \frac{\lfloor \frac{\alpha_{n+1}}{2} \rfloor}{\alpha_{n+1}}$ ; la limite supérieure du polyèdre  $q(s)$  devient plus petit que le polyèdre  $Q(\alpha)$  donc nous avons la discontinuité dans ce cas. □

### 3.3 Application en dimensions supérieures.

Dans cette section, nous allons donner quelques exemples d'applications en dimensions supérieures pour permettre de mieux cerner le contexte de recouvrement étudié. Nous prendrons quelques résultats arbitraires dans les polyèdres en ce qui concerne la taille de l'élément structurant. Parmi les résultats obtenus, nous ferons quelques représentations graphiques des recouvrements en 3-D à l'aide de l'élément structurant de forme cubique (voxel) et de forme parallélépipédique (pavé droit).

#### 3.3.1 Exemple d'application en 3-D.

Soit  $L$  un plan euclidien de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $\alpha_3 x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \mu$  et donné par une fonction  $F(x) = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \mu}{\alpha_3}$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}^3$  et  $\mu \in \mathbb{Z}$ , avec

---

$L = \mathbf{graphe}(F)$ , et  $M = \mathbf{graphe}(f)$  est le graphe d'une fonction  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ , donc un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^3$ . Dans ces exemples on prend  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^2} \rfloor$  ou  $f = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^2} + \frac{1}{2} \rfloor$  et l'élément structurant  $U$  de la forme d'un bloc défini par

$$U(r) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x_j| \leq r_j, j = 1, \dots, 3\} = \prod_{j=1}^3 [-r_j, r_j] \subset \mathbb{R}^3.$$

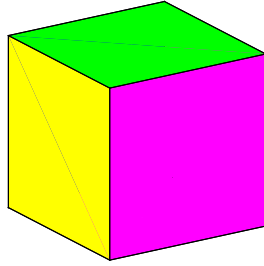


FIGURE 3.2 – Forme géométrique de l'élément structurant  $U(r_1, r_2, r_3)$  en 3-D.

**Exemple 3.3.1.** *Etant donné un plan euclidien défini par*

$$L = \left\{ (x_1, x_2, F(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2) = \frac{-3x_1 + 2x_2 + \mu}{4} \right\},$$

*on associe sa discrétisation  $M_{pl}$  en utilisant la fonction plancher et définie par*

$$M_{pl} = \left\{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{Z}^3; f(x_1, x_2) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^2} \rfloor \right\}$$

*et sa discrétisation  $M_{pp}$  en utilisant le nombre entier le plus proche par*

$$M_{pp} = \left\{ (x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{Z}^3; f(x_1, x_2) = \lfloor F|_{\mathbb{Z}^2} + \frac{1}{2} \rfloor \right\}.$$

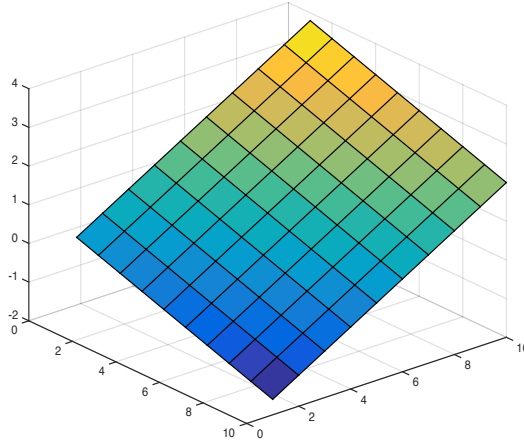


FIGURE 3.3 – Plan euclidien défini par  $L = \{(x_1, x_2, F(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2) = \frac{-3x_1 + 2x_2 + \mu}{4}\}$ .

TABLE 3.1 – On selectionne les recouvrements  $M_{pl} + U(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}) \supset L$ ,  $M_{pp} + U(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{9}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8}) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}) \supset L$ , cf. Figures 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7.

Paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(r_1, r_2, r_3)$	Pour fonction plancher	Pour entier le plus proche
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$ et $r_1 = r_2 = r_3$	$(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9})$	$(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{9})$
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8})$
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{25}{24})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{31}{24})$
$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6})$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{12})$
Optimum $(r_1, r_2, r_3)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8})$

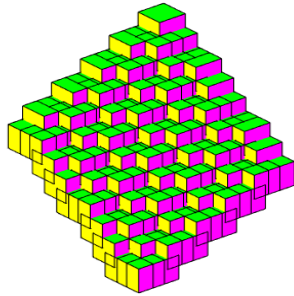


FIGURE 3.4 – Recouvrement  
 $M_{pl} + U(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1

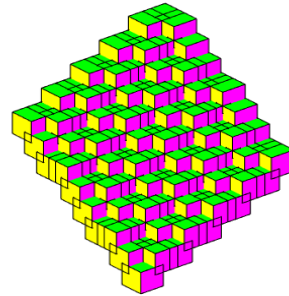


FIGURE 3.5 – Recouvrement  
 $M_{pp} + U(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{9}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1

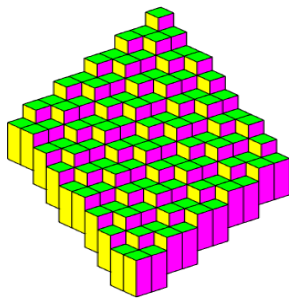


FIGURE 3.6 – Recouvrement  
 $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1

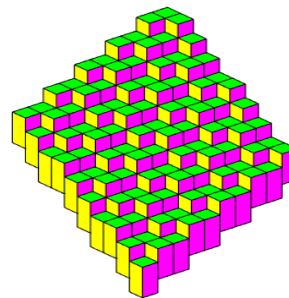


FIGURE 3.7 – Recouvrement  
 $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1

### 3.3.2 Etudes comparatives en dimensions supérieures

Considérons le plan défini par

$$L = \left\{ (x_1, x_2, F(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2) = \frac{-x_1 + 2x_2 + \mu}{5} \right\},$$

$M_{pl}$  et  $M_{pp}$  deux de ses discrétisations en utilisant respectivement la fonction plancher et le nombre entier le plus proche. Le tableau ci-dessous nous donne quelques résultats obtenus concernant la taille de l'élément structurant.



TABLE 3.2 – On selectionne les recouvrements  $M_{pl} + U(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}) \supset L$ ,  $M_{pp} + U(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}) \supset L$ ,  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10}) \supset L$  et  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}) \supset L$ , cf. Figures 3.9, 3.8, 3.11 et 3.10.

Paramètres $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(r_1, r_2, r_3)$	Pour fonction plancher	Pour entier le plus proche
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$ et $r_1 = r_2 = r_3$	$(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$	$(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8})$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10})$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{31}{30})$	$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{19}{30})$
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$ et $r_1 \neq r_3, r_2 \neq r_3$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5})$
Optimum $(r_1, r_2, r_3)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10})$

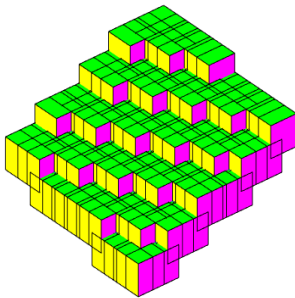


FIGURE 3.8 – Recouvrement  $M_{pl} + U(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2

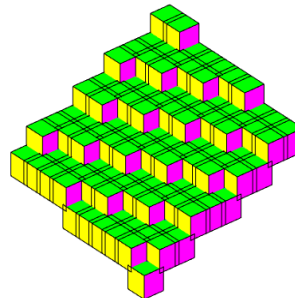


FIGURE 3.9 – Recouvrement  $M_{pp} + U(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2

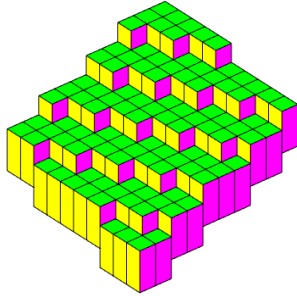


FIGURE 3.10 – Recouvrement  
 $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2

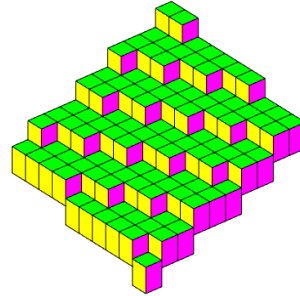


FIGURE 3.11 – Recouvrement  
 $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2

### 3.3.3 Interprétation des résultats obtenus

Comme dans le plan, les recouvrements obtenus en 3-D d'une portion du plan  $L = \{(x_1, x_2, F(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \mu}{\alpha_3}\}$  en utilisant le nombre entier le plus proche comme discrétisation offre une transcription discrète plus raffinée et plus petite que le recouvrement obtenu en utilisant la fonction plancher comme discrétisation.

Nous remarquons aussi que la taille de l'élément structurant devient plus petite avec le nombre entier le plus proche qu'avec la fonction plancher pour tout choix de la forme de l'élément structurant.

Une autre remarque est que lorsqu'on considère un cube comme l'élément structurant dont l'arrêt est  $a = 1$  c'est-à-dire  $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$ , on constate que les recouvrements obtenus, pour les exemples considérés, ne contiennent pas parfaitement ce plan. Les figures suivantes donnent une illustration des exemples de recouvrement partiel du plan.

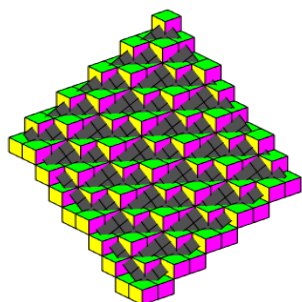


FIGURE 3.12 – Autre exemple pour  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 2$  et  $\alpha_3 = 4$  on a :  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\subset L$ .

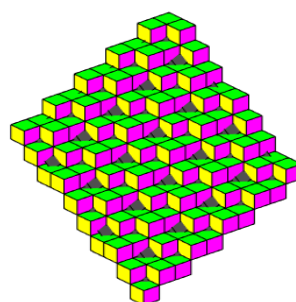


FIGURE 3.13 – Autre exemple pour  $\alpha_1 = 3$ ,  $\alpha_2 = 2$  et  $\alpha_3 = 4$  on a :  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\subset L$ .

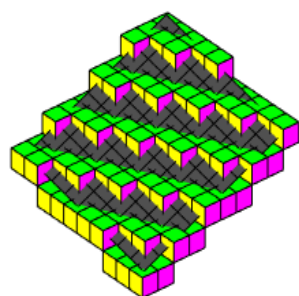


FIGURE 3.14 – Autre exemple pour  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  et  $\alpha_3 = 5$  on a :  $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\subset L$ .

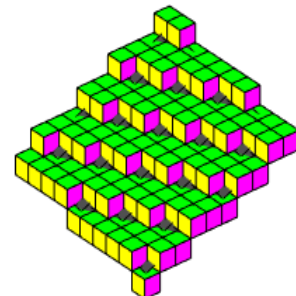


FIGURE 3.15 – Autre exemple pour  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$  et  $\alpha_3 = 5$  on a :  $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\subset L$ .

Ces quatre exemples ci-dessus montrent des recouvrements partiels du plan. Ce qui justifie l'importance de la prise en compte des caractéristiques locales du plan (l'inclinaison du plan) concernant le choix sur la taille de l'élément structurant. Les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 montrent respectivement les parties (ombres) du plan non couvertes par ces recouvrements.



---

---

# CHAPITRE 4

---

## CONVEXITÉ DÉFINIE PAR CONVOLUTIONS

### 4.1 Introduction

Les relations entre l'opérateur de Jensen et l'opérateur  $D_b D_a$ , qui sont déjà établies pour des fonctions d'une seule variable, semblent être très compliquées en dimensions supérieures. Pour  $n = 1$ , Christer O. KISELMAN a démontré dans son article [21] que  $D_b D_a f \geq -1$  si et seulement si  $J_{\lambda,p} f > -1$ , à partir duquel  $|D_b D_a f| \leq 1$  si et seulement si  $|J_{\lambda,p} f| < 1$ .

Pour généraliser ces notions en dimensions supérieures, nous allons utiliser la convolution qui donne un bon cadre de travail à la fois avec les opérateurs de différence de second ordre et l'opérateur de Jensen pour la caractérisation de la convexité.

## 4.2 Les opérateurs de différences

**Définition 4.2.1.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  on définit un opérateur de différence  $D_a: \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$  par

$$(D_a f)(x) = f(x+a) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}. \quad (4.2.1)$$

□

Si  $a \in \mathbb{Z}^n$ ,  $D_a$  opère aussi de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  à  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  et de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$  à  $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$ ; on utilisera le même symbole pour sa restriction de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  et  $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$ .

### Opérateur de différence de second ordre

La composition de  $D_a$  et  $D_b$  prend la forme d'un opérateur de différence de second ordre défini par

$$(D_b D_a f)(x) = f(x+a+b) - f(x+b) - f(x+a) + f(x), \quad (a, b) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n, f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}. \quad (4.2.2)$$

**Définition 4.2.2.** On définit un opérateur de Jensen  $J_{p,\lambda}: \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ , où  $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(k)}) \in (\mathbb{R}^n)^k$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$  en dimensions supérieures par

$$(J_{p,\lambda} f)(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x+p^{(j)}) - f(x), \quad f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}, \quad (4.2.3)$$

où  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , et  $\sum_{j=1}^k \lambda_j p^{(j)} = 0$  avec  $k$  un nombre entier quelconque et d'après Carathéodory, on peut réduire  $k = n+1$  points. □

## 4.3 Convexité définie par convolutions

Les définitions générales des opérateurs dans la section 4.2 peuvent être exprimées comme étant un produit de convolution. Cependant, nous avons besoin de

définir d'abord une autre fonction  $\mu: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ayant un support fini non vide et qui annule toutes les fonctions affines.

Nous rappelons qu'étant données deux fonctions  $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit leur *produit de convolution*  $h = f * g$  par

$$h(x) = (f * g)(x) = \sum_{y+z=x} f(y)g(z), \quad x \in G, \quad (4.3.1)$$

qui donne une somme finie si le nombre des couples  $(y, z)$  tel que  $y + z = x$  et  $f(y)g(z)$  soit non nul est fini. Une façon plus simple de parvenir à cela est de supposer que l'une des fonctions  $f$  et  $g$  soit nulle à l'extérieur d'un sous-ensemble fini de  $G$ . Lorsque  $G = \mathbb{Z}^n$ , une situation plus commune est que  $f$  et  $g$  soient nulles à l'extérieur d'un cône saillant  $\{x \in \mathbb{Z}^n; \alpha \cdot x \geq \|x\|\}$  pour un  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha \neq 0$ . Alors le produit  $f(y)g(x-y)$  est non nul lorsque  $\alpha \cdot y \geq \|y\|$  et  $\alpha \cdot (x-y) \geq \|x-y\|$ , cela implique que

$$\|y\| \leq \alpha \cdot y \leq \alpha \cdot x - \|x-y\| \leq \alpha \cdot x,$$

donc, pour tout point  $x$ , pour seulement un nombre fini de  $y$ .

Si  $G = \mathbb{Z}^n$  alors l'ensemble des points pour lesquels la fonction  $f$  est non nulle est le *support* et est noté par  $\text{supp } f$ .

Le *symbole de Kronecker delta*  $\delta_a$  est défini par  $\delta_a(a) = 1$  et  $\delta_a(x) = 0$  pour  $x \neq a$ , et satisfait  $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$ . En particulier  $\delta_0$  est un élément neutre :  $f * \delta_0 = f$  pour tout  $f$ ; plus généralement  $f \mapsto \delta_a * f$  est la translation de  $f$  par le vecteur  $a$  :  $(\delta_a * f)(x) = f(x-a)$ .

Si deux des trois fonctions  $f, g, h$  sont nulles à l'extérieur d'un ensemble fini, la loi associative  $f * (g * h) = (f * g) * h$  est vérifiée. Cependant, si  $g$ ,  $f * g$  et  $g * h$  ont un support fini, les produits  $(f * g) * h$  et  $f * (g * h)$  sont bien définis mais n'ont pas besoin d'être égaux. Ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant sur  $\mathbb{Z}$  :  $1 * ((\delta_0 - \delta_1) * H) = 1 * \delta_0 = 1$  et  $(1 * (\delta_0 - \delta_1)) * H = 0 * H = 0$ , où  $H(x) = 1$  pour  $x \geq 0$ ,  $H(x) = 0$  ailleurs.

**Définition 4.3.1.** Soit  $G$  un groupe abélien et  $M$  un ensemble de fonctions  $\mu: G \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que chacune d'elles soit nulle à l'extérieur d'un ensemble fini. On dira qu'une fonction  $f \in \mathbb{R}^G$  est  $M$ -positive si  $\mu * f \geq 0$  pour tout  $\mu \in M$ .  $\square$

Si une fonction  $f$  est  $M$ -positive, elle est aussi  $N$ -positive pour un ensemble plus vaste  $N = \{\mu * \rho; \mu \in M \text{ et } \rho \text{ est non négative et disparaît à l'extérieur d'un ensemble fini}\}$ .

**Exemple 4.3.2.** Un exemple simple est lorsque  $M = \{\delta_a\}$ . Alors  $f$  est  $M$ -positive si et seulement si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$ . Si  $G = \mathbb{Z}$  et  $M = \{\delta_{-1} - \delta_0\}$ , les fonctions  $M$ -positives sont exactement les fonctions croissantes.  $\square$

**Exemple 4.3.3.** Si on prend  $G = \mathbb{R}^n$  et

$$M = \{(1 - \lambda)\delta_a - \delta_c + \lambda\delta_b; a, b, c \in \mathbb{R}^n, c = (1 - \lambda)a + \lambda b, 0 < \lambda < 1\},$$

une fonction est  $M$ -positive si et seulement si elle est convexe.  $\square$

**Exemple 4.3.4.** Si on prend  $G = \mathbb{Z}^n$  et

$$\mu = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_1=1}} \delta_a - 2n\delta,$$

alors  $\mu * f$  est un analogue discret du Laplacien  $\Delta f$  et dans ce cas les fonctions  $\{\mu\}$ -positives sont des analogues sur  $\mathbb{Z}^n$  discrets des fonctions sous-harmoniques sur  $\mathbb{R}^n$ ; cf. [18] (Kiselman 2005).  $\square$

Il est clair que l'ensemble des fonctions  $M$ -positives est une cône convexe : si  $f, g$  sont  $M$ -positives et pour  $t \geq 0$ , alors  $f + tg$  est  $M$ -positive. Aussi, la classe est invariante par translations. Plus généralement on a

**Proposition 4.3.5.** Si  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  est  $M$ -positive et  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  est  $N$ -positive; si  $f * g$  est bien défini alors il est  $M * N$ -positive, où  $M * N = \{\mu * \nu; \mu \in M, \nu \in N\}$ .  $\square$



On suppose habituellement que toutes les constantes sont  $M$ -positives. Cela a lieu si et seulement si

$$\sum_{y \in G} \mu(y) = 0, \quad \text{de même que} \quad \sum_{y \in G} \mu^+(y) = \sum_{y \in G} \mu^-(y) \quad (4.3.2)$$

pour tout  $\mu \in M$ , où nous avons écrit  $\mu^+ = \max(\mu, 0)$ ,  $\mu^- = \max(-\mu, 0)$ . On peut exprimer cela par le fait que  $\mu^+$  et  $\mu^-$  ont la même masse :  $\|\mu^+\|_1 = \|\mu^-\|_1$ .

Lorsqu'on définit la convexité sur  $\mathbb{Z}^n$  il est naturel d'exiger que toutes les restrictions à  $\mathbb{Z}^n$  des fonctions affines sur  $\mathbb{R}^n$  soient  $M$ -positives. Cela se passe lorsqu'à la fois (4.3.2) et

$$\sum_{y \in G} \mu(y)y = 0, \quad \text{de même que} \quad \sum_{y \in G} \mu^+(y)y = \sum_{y \in G} \mu^-(y)y, \quad (4.3.3)$$

sont vérifiées pour tout  $\mu \in M$ . On peut exprimer cela par le fait que  $\mu^+$  et  $\mu^-$  ayant le même barycentre, le poids des points sur le support étant les valeurs de la fonction respective. En effet, sauf dans le cas non intéressant  $\mu = 0$ , le barycentre de  $\mu^+$  est

$$c = \mathbf{bary}(\mu^+) = \frac{\sum \mu^+(y)y}{\sum \mu^+(y)}$$

et  $\sum \mu^+(y) = \sum \mu^-(y)$  selon (4.3.2).

On résume ces arguments dans une proposition :

**Proposition 4.3.6.** *Soit une fonction  $\mu \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  avec un support fini. Alors  $\mu * h = 0$  pour toutes les fonctions  $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  qui sont les restrictions des fonctions affines si et seulement si (4.3.2) et (4.3.3) sont vérifiées.*

On dira brièvement que  $\mu$  annule toutes les fonctions affines s'il satisfait les conditions de la proposition.

Le moment centré d'ordre 2 (ou la variance) de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont parfois intéressants. Lorsque  $G = \mathbb{Z}^n$  ils sont définis par

$$\sum_y \mu^+(y) \|y - c\|_2^2 \quad \text{et} \quad \sum_y \mu^-(y) \|y - c\|_2^2,$$

où  $c$  est le barycentre commun. Ils mesurent la façon dont les fonctions sont réparties. Si la première est plus grande que la seconde, les fonctions  $M$ -positives rappellent les fonctions convexes.

Nous pouvons écrire la condition  $M$ -positivité de la façon suivante

$$\sum_y \mu^+(y)f(x-y) \geq \sum_y \mu^-(y)f(x-y), \quad x \in G, \quad \mu \in M. \quad (4.3.4)$$

Si  $f$  prend des valeurs infinies, on remplace cette condition par

$$\dot{\sum}_y \mu^+(y)f(x-y) \geq \dot{\sum}_y \mu^-(y)f(x-y), \quad x \in G, \quad \mu \in M, \quad (4.3.5)$$

où  $\dot{\sum} t_j$  désigne la somme supérieure du nombre fini de termes  $t_j \in \mathbb{R}_1 = [-\infty, +\infty]$ , définie comme étant la somme usuelle si tous les termes sont finis ; par  $+\infty$  si l'un des termes est égal à  $+\infty$  ; et  $-\infty$  si l'un des termes est égal à  $-\infty$  et tous les autres sont  $< +\infty$ . Lorsqu'on n'a que deux termes, on écrit  $t_1 \dot{+} t_2$  pour  $\dot{\sum} t_j$ .

**Définition 4.3.7.** Etant donné un ensemble  $M$  de fonctions tel que le support de  $\mu$  soit fini pour tout  $\mu \in M$ , on dira que  $f \in \mathbb{R}_1^G$  est  $M$ -positive au sens généralisé si (4.3.5) est vérifiée.  $\square$

On dira qu'un opérateur  $f \mapsto \mu * f$  est un *opérateur de Jensen* si  $\mu^- = \delta_c$  pour un  $c \in G$ . Donc la  $\{\mu\}$ -positivité pour un tel  $\mu$  signifie que

$$\sum_y \mu^+(y)f(x-y) \geq f(x-c), \quad x \in G;$$

pour ce cas, (4.3.2) signifie que  $\|\mu^+\|_1 = \sum \mu^+(y) = 1$ , et (4.3.3) indique que le barycentre **bary**( $\mu^+$ ) de  $\mu^+$  est  $c$ . La fonction  $\mu = \mu^+ - \mu^- = \mu^+ - \delta_c$  pourra être appelée une *fonction de Jensen* cf. 4.2.2.

Quand on travaille sur  $\mathbb{R}$ , l'inégalité de Jensen s'applique à trois points. Etant donnés deux points  $a$  et  $b$  puis le point  $(1-\lambda)a + \lambda b$ ,  $\lambda \in ]0, 1[$ , sur un segment rectiligne entre eux. Ceci fonctionne aussi avec des fonctions à variable entière,

en prenant  $\lambda = \frac{k}{(b-a)}$ ,  $k = 1, \dots, b-a-1$ . Cependant, dès que nous sommes sur  $\mathbb{Z}^n$ ,  $n \geq 2$ , on n'a pas nécessairement un point à coordonnées entières entre  $a, b \in \mathbb{Z}^n$ , donc l'inégalité de Jensen ne peut pas être appliquée.

Il existe deux façons essentielles pour surmonter ces difficultés. Soit on considère certaines discrétisations du point  $(1-\lambda)a + \lambda b$ , ou bien on prend plus de points dans l'image. La première alternative a été exploitée par Miller (1971 : 168). Ici on suivra la dernière voie : on utilisera les  $n+1$  points donnés sur  $\mathbb{Z}^n$  et alors on prendra les barycentres de ces derniers.

**Proposition 4.3.8.** *Pour tout  $M \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^G)$ , dont les éléments sont à support fini, les fonctions  $M$ -positives de  $G \rightarrow \mathbb{R}$  forment un cône convexe. Plus généralement, si  $f, g \in \mathbb{R}_+^G$  sont  $M$ -positives au sens généralisé, alors leur somme supérieure  $f \dot{+} g$  l'est aussi.*

*Si  $M$  est constitué uniquement des fonctions de Jensen, le supremum de toute famille des fonctions  $M$ -positives au sens généralisé est dans la même classe.*

*Démonstration.* C'est facile de voir que les fonctions  $M$ -positives forment un cône convexe. Maintenant soit  $\{f_j\}_{j \in J}$  une famille de fonctions  $M$ -positives, et  $f$  désigne leur supremum. Alors pour tout  $j \in J$  et toute  $\mu \in M$  on a

$$\sum_y \mu^+(y) f(x-y) \geq \sum_y \mu^+(y) f_j(x-y) \geq \sum_y \mu^-(y) f_j(x-y) = f_j(x - c_\mu)$$

où  $c_\mu$  est le seul point où  $\mu$  soit négative. Puisqu'on a maintenant un seul terme à droite, alors on peut prendre le supremum sur tout  $j \in J$ . □

**Exemple 4.3.9.** *On prend  $G = \mathbb{Z}$  et on définit  $\mu = \delta_0 - \delta_{-1} - \delta_{-2} + \delta_{-3}$ . On définit  $f(x) = -x - 2$  pour  $x \leq -1$ ,  $f(0) = 1$  et  $f(x) = 2x - 2$  pour  $x \geq 1$ . Alors  $f$  et 0 sont  $\{\mu\}$ -positives, mais pas leur maximum  $f^+$ . □*

**Exemple 4.3.10.** *On prends  $G = \mathbb{Z}^2$  et on définit  $\mu = \delta_{(0,0)} - \delta_{(1,0)} - \delta_{(1,1)} + \delta_{(2,1)}$ . Alors  $f(x) = 2x_2 - x_1$  et  $g = 0$  sont  $\{\mu\}$ -positives, mais leur maximum  $(f \vee g)(x) = (2x_2 - x_1)^+$  ne l'est pas.*

Ces exemples montrent qu'en général la classe des fonctions  $A$ -latéralement convexes définie dans 4.3.13 ne permet pas la formation de maxima.

### 4.3.1 Moments des fonctions

Pour une fonction  $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  donnée avec support fini on définit ses *moments* d'ordre 0, 1 et 2, notés  $M^{(0)}(\mu)$ ,  $M_j^{(1)}(\mu)$ ,  $M_{j,k}^{(2)}(\mu)$ , comme suit.

$$M^{(0)}(\mu) = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \mu(x), \quad M_j^{(1)}(\mu) = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \mu(x)x_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$M_{j,k}^{(2)}(\mu) = \sum_{x \in \mathbb{R}^n} \mu(x)x_jx_k, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Donc  $M^{(0)}(\mu)$  et  $M_j^{(1)}(\mu)$  sont nuls pour tout  $j$  si et seulement si  $\mu$  annule toutes les fonctions affines.

En toute dimension il existe des fonctions avec tous les moments d'ordre 0, 1, 2 nuls, par exemple en dimension  $n = 1$

$$\mu = 5\delta_1 - 8\delta_2 + 3\delta_3 + 5\delta_{-1} - 8\delta_{-2} + 3\delta_{-3}.$$

À partir de cet exemple on trouve facilement des exemples pour tout  $n \geq 2$ .

### Polynômes de degré deux

Pour toute fonction  $\mu$  qui annule toutes les fonctions affines et tout polynôme  $P$  de degré deux la convolution  $\mu * P$  est constante. Plus précisément, si

$$P(x) = \sum A_{j,k}x_jx_k \text{ plus une fonction affine,}$$

on a

$$\mu * P = \sum A_{j,k}M_{j,k}^{(2)}(\mu),$$

où  $M_{j,k}^{(2)}(\mu)$  sont les moments d'ordre deux de  $\mu$ . Cette observation va nous servir dans l'exemple suivant.

### 4.3.2 Fonctions $\mu$ avec deux points dans le support de $\mu^-$

**Proposition 4.3.11.** *Soit  $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à support fini qui annule toutes les fonctions affines. Supposons en plus*

- (1) *que  $M = \sum_{j=1}^n M_{j,j}^{(2)}(\mu)$  est non nul et*
- (2) *que le minimum de  $\mu$  est atteint en un seul point.*

*Alors, si  $\mu^-$  est non nulle en deux points, il existe deux fonctions  $\{\mu\}$ -positives telles que leur maximum n'est pas  $\{\mu\}$ -positive.*

*Démonstration.* Soit  $\mu(a) < 0$  et  $\mu(b) < 0$ ,  $a \neq b$ . Pour simplifier l'écriture on peut supposer que  $a = 0$ . On définit alors

$$f(x) = A\|x\|_2^2 - \alpha\delta_0 + \beta\delta_{-b}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\alpha, \beta > 0$ . Sans perdre de généralité on peut supposer que  $M > 0$  et on va choisir une constante  $A > 0$ . Donc  $f(0) = -\alpha < 0$ ,  $f(-b) = A\|b\|_2^2 + \beta > 0$  et  $f^+(x) = A\|x\|_2^2 + \beta\delta_{-b}(x)$ . On obtient

$$(\mu * f)(x) = AM - \alpha\mu(x) + \beta\mu(x+b),$$

où  $AM$  peut être n'importe quel nombre  $> 0$ , et

$$(\mu * f^+)(x) = AM + \beta\mu(x+b).$$

Pour que  $f$  soit  $\{\mu\}$ -positive il faut et il suffit que

$$AM \geq \alpha\mu(x) - \beta\mu(x+b) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Comme la fonction qui vaut zéro partout est toujours  $\{\mu\}$ -convexe, on veut que  $f^+ = \max(f, 0)$  ne soit pas  $\{\mu\}$ -convexe. On voit que  $(\mu * f^+)(x)$  est une quantité négative pour un point  $x$  ssi

$$AM < -\beta \inf \mu = \beta |\inf \mu|.$$

On peut supposer que  $\inf \mu = \mu(0)$  ou que  $\inf \mu = \mu(b)$ . Les deux cas sont pareils ; supposons que  $\inf \mu = \mu(b)$ .

Pour que  $f$  soit  $\{\mu\}$ -positive et que  $f^+$  ne soit pas  $\{\mu\}$ -positive il faut et il suffit que

$$-\beta\mu(b) > AM \geq \alpha\mu(x) - \beta\mu(x+b) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Comme  $M > 0$  on peut choisir  $A$  tel que cela soit vrai si

$$\beta\mu(x+b) - \beta\mu(b) > \alpha\mu(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Comme l'inégalité est valable pour  $x = 0$ , ceci est une conséquence de l'inégalité

$$\inf_{x \neq b} \mu(x) - \mu(b) > \frac{\alpha}{\beta} \sup \mu,$$

ce qui est vrai si  $\mu(b) < \inf_{x \neq b} \mu(x)$  (hypothèse (2)) et si le quotient  $\frac{\alpha}{\beta}$  est suffisamment petit. Le résultat est donc démontré sous les deux hypothèses spéciales (1) et (2).  $\square$

### 4.3.3 Opérateurs de différence définis comme produit de convolution

Ici, on étudiera deux cas particuliers des opérateurs de convolution : l'opérateur de différence de seconde ordre et l'opérateur de Jensen.

L'opérateur de différence  $D_a$ , défini par (4.2.1), fonctionne pour toute fonction  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un groupe abélien  $G$ . On remarque que lorsqu'on prend  $\mu = \delta_{-a} - \delta_0$  et on trouve que  $D_a$  est un opérateur de convolution défini par

$$D_a f = \mu * f = (\delta_{-a} - \delta_0) * f. \tag{4.3.6}$$

La fonction  $\mu = \delta_{-a} - \delta_0$  satisfait (4.3.2) mais, si  $G = \mathbb{Z}^n$ , elle ne vérifie pas (4.3.3).

---

On a aussi l'opérateur de convolution pour  $D_b D_a$  défini en (4.2.2) en considérant  $\mu = \delta_{-a-b} - \delta_{-a} - \delta_{-b} + \delta_0$  et on obtient

$$D_b D_a f = \mu * f = (\delta_{-a-b} - \delta_{-a} - \delta_{-b} + \delta_0) * f. \quad (4.3.7)$$

Cette  $\mu$  satisfait (4.3.2) et (4.3.3) et donc annule toutes les fonctions affines. Le barycentre commun de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  est  $c = -\frac{1}{2}(a+b)$  et les moments centrés d'ordre 2 sont respectivement,

$$\frac{1}{2}\|a+b\|_2^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\|a-b\|_2^2.$$

On peut donc s'attendre que les opérateurs  $D_b D_a$  avec  $\|a+b\|_2^2 > \|a-b\|_2^2$  pourront être utiles quand on veut définir les propriétés similaires de la convexité, aussi avec  $\|a+b\|_2^2 < \|a-b\|_2^2$  quand on veut définir les propriétés similaires de la concavité, tandis qu'avec égalité, les seconds moments jouent d'autre rôle. Réciproquement, ils peuvent être utilisés pour distinguer les fonctions affines sur l'espace vectoriel de dimension finie, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 4.3.12.** *Considerons une fonction à valeur réelle  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est la restriction d'une fonction affine  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si et seulement si elle satisfait le système*

$$D_{e^{(k)}} D_{e^{(j)}} f = 0, \quad 1 \leq j \leq k \leq n,$$

de  $\frac{1}{2}n(n+1)$  équations différentes. □

*Démonstration.* Un sens est trivial. Pour l'autre, on considère d'abord l'équation

$$D_{e^{(n)}} D_{e^{(n)}} f = 0.$$

Cela implique que  $f(x) = \alpha \cdot x + \beta(x')$ , où  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . On applique maintenant  $D_{e^{(j)}} D_{e^{(n)}} f = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , à cette expression et on trouve que

$$D_{e^{(j)}} D_{e^{(n)}} f = D_{e^{(j)}} \alpha(x') = 0,$$

tel que  $\alpha$  soit indépendant de  $x_j$ , donc une constante. Finalement on applique  $D_{e^{(k)}}D_{e^{(j)}}$ ,  $0 \leq j \leq k \leq n-1$ , à  $f(x) = \alpha \cdot x + \beta(x')$ , ce qui rend  $D_{e^{(k)}}D_{e^{(j)}}\beta(x') = 0$ . Par hypothèse d'induction cela implique que  $\beta(x') = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1} + \gamma$ , et c'est ainsi démontré.  $\square$

Un résultat similaire vérifie pour les fonctions à variables réelles de classe  $C^2$ , avec la même preuve.

Il est clair que moins d'équations que  $\frac{1}{2}n(n+1)$  ne pourra pas le faire. En effet, la fonction  $f(x) = x_p x_q$  n'est pas affine mais satisfait à toute  $D_{e^{(k)}}D_{e^{(j)}}f = 0$  sauf lorsque  $\{j, k\} = \{p, q\}$ . Donc une fonction affine peut être seulement définie par un tel système spécifique sur les équations de différence dès que  $n > 1$ .

**Définition 4.3.13.** Soit  $G$  un groupe abélien et  $A$  un sous-ensemble de  $G \times G$ . On dira qu'une fonction  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  est *A-latéralement convexe* si

$$D_b D_a f \geq 0, \quad (a, b) \in A.$$

Une fonction  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *A-latéralement convexe au sens généralisé* si

$$f(x) \dot{+} f(x+a+b) \geq f(x+a) \dot{+} f(x+b), \quad x \in G, \quad (a, b) \in A.$$

$\square$

Ici on obtient l'opérateur de convolution pour l'opérateur de Jensen dans la définition 4.2.2 de la page 72 par

$$\mu = \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{-p^{(j)}} - \delta_0, \quad (4.3.8)$$

on voit que la masse de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sont égales si et seulement si leur somme se résume à 1. Le barycentre de  $\mu^-$  est égal à 0, et les barycentres de  $\mu^+$  et  $\mu^-$  coïncident si et seulement si  $\sum \lambda_j p^{(j)} = 0$ . Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on écrira brièvement  $\mu * f = J_p f$  pour tout opérateur de Jensen.



Si  $H$  est une fonction affine, alors  $J_p H = 0$ . Réciproquement, si  $J_p f = 0$  pour tous les  $(n+1)$ -uplets de  $p$ , alors  $f$  est la restriction d'une fonction affine.

Si  $H$  est une fonction affine qui prend les mêmes valeurs que  $f$  aux  $n+1$  points  $x+p^{(j)}$ , alors  $(J_p f)(x) = H(x) - f(x)$ . Si les points sont affinement indépendants,  $H$  est unique, mais le résultat est vérifié même s'ils sont affinement dépendants.

#### 4.3.4 Graphes et épigraphes

Pour toute application  $f: X \rightarrow Y$  d'un ensemble  $X$  sur un ensemble  $Y$  on associe son *graphe*,

$$\mathbf{graphe}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}.$$

La relation entre les fonctions et les ensembles est fournie par la notion de l'*épigraphes fini*. Pour toute fonction  $f: X \rightarrow Y_1$ , où  $Y \subset \mathbb{R}$  et  $Y_1 = Y \cup \{-\infty, +\infty\}$ , on associe son *épigraphes* défini par

$$\mathbf{epi}(f) = \{(x, y) \in X \times Y_1; f(x) \leq y\} \subset X \times \mathbb{R}_1,$$

et son *épigraphes fini* défini par

$$\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; f(x) \leq y\} = \mathbf{epi}(f) \cap (X \times Y) \subset X \times \mathbb{R}.$$

Notons que  $-\infty$  et  $+\infty$  ne sont jamais éléments d'un épigraphes fini. (L'épigraphes fini d'une fonction constante  $+\infty$  est vide.) Si le codomaine de  $f$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , alors bien sûr

$$\mathbf{epi}(f) = \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f);$$

le superscript  $\mathbf{F}$  n'est pas nécessaire. On aura aussi besoin de l'*épigraphes fini stricte* :

$$\mathbf{epi}_s^{\mathbf{F}}(f) = \{(x, y) \in X \times Y; f(x) < y\}$$

### 4.3.5 Fonctions convexes

Une fonction  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_!$  est dite *convexe* si son épigraphe fini est un sous-ensemble convexe de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Etant donnée une fonction  $f: X \rightarrow \mathbb{R}_!$ , où  $X \subset \mathbb{R}^n$ , la plus grande fonction convexe  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_!$  telle que  $F|_X \leq f$  sera appelée *enveloppe convexe* de  $f$  et sera notée par  $\mathbf{cvxe}(f)$ . En général on a

$$\mathbf{cvxe}(f)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left( y; (x, y) \in \mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)) \right) \quad (4.3.9)$$

et

$$\mathbf{epi}_s^{\mathbf{F}}(\mathbf{cvxe}(f)) = \mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}_s^{\mathbf{F}}(f)) \subset \mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)) \subset \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(\mathbf{cvxe}(f)). \quad (4.3.10)$$

### 4.3.6 Convexité discrète

Nous allons maintenant généraliser la notion de la convexité comme suit

**Définition 4.3.14.** Soit  $W$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ , une partie  $A$  de  $W$  est *W-convexe* s'il existe un sous-ensemble convexe  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $A = C \cap W$ .

Lorsque  $W = \mathbb{R}^n$  on obtient la convexité usuelle; lorsque  $W = \emptyset$ , seul l'ensemble vide est  $W$ -convexe. Dans cette thèse, on s'intéresse à des cas  $W = \mathbb{Z}^n$  et  $W = \mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

L'ensemble convexe  $C$  n'est pas déterminé par  $A$ , et il est souvent convenable de prendre le plus petit ensemble convexe qui peut bien nous servir dans la définition; cet ensemble est  $\mathbf{cvxh}(A)$ , l'*enveloppe convexe* de  $A$  pris dans  $\mathbb{R}^n$ . Puisqu'on a toujours  $A \subset \mathbf{cvxh}(A) \cap W$ ,  $W$ -convexité de  $A$  équivaut à l'inclusion

$$\mathbf{cvxh}(A) \cap W \subset A. \quad (4.3.11)$$

$\kappa(A) = \mathbf{cvxh}(A) \cap \mathbb{Z}^n$  définit une fermeture  $\kappa: \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W)$ .

## 4.4 Quelques relations entre les opérateurs

Dans cette section, nous allons démontrer les équivalences entre certaines propriétés définies par Christer O. KISELMAN (2011) [21], on donnera aussi quelques notions sur les propriétés relatives en dimensions supérieures.

**Proposition 4.4.1.** *Si  $F: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction quelconque et  $f = \lfloor F \rfloor: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  la fonction plancher associée à  $F$ , alors  $|Jf - JF| < 1$  et  $|D_b D_a f - D_b D_a F| < 2$ .  $J = J_{p,\lambda}$  désigne un opérateur de Jensen.*  $\square$

*Démonstration.* Cela est clair compte tenu des inégalités  $-1 < f - F \leq 0$ .  $\square$

**Proposition 4.4.2.** *Si  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est la restriction d'une fonction affine, c'est-à-dire, de la forme  $F(x) = \alpha \cdot x + c$ ,  $x \in \mathbb{Z}^n$ , pour des  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  et  $c \in \mathbb{R}$ , alors  $f = \lfloor F \rfloor$  satisfait  $|Jf| < 1$  et  $|D_b D_a f| \leq 1$  pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}^n$ .*  $\square$

*Démonstration.* Puisque  $F$  est une fonction affine alors  $JF = 0$  et  $D_b D_a F = 0$ ; aussi de la proposition 4.4.1, on a  $|Jf| < 1$  et  $|D_b D_a f| < 2$ . Cependant,  $D_b D_a f$  prend seulement les valeurs  $\{-1, 0, 1\}$ , par conséquent on a  $|D_b D_a f| \leq 1$ .  $\square$

**Proposition 4.4.3.** *Si  $F: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est la restriction d'une fonction convexe  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $f = \lfloor F \rfloor$  satisfait  $Jf > -1$  et  $D_b D_a f > -1$  pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}^n$  qui sont parallèles.*  $\square$

*Démonstration.* On a  $JF \geq 0$  et  $D_b D_a F \geq 0$  pour tout couple  $a, b$  désigné, on obtient  $Jf > -1$  et  $D_b D_a f > -2$ . Cependant  $D_b D_a f$  prend seulement les valeurs entières, donc on doit avoir  $D_b D_a f \geq -1$ .  $\square$

La condition que  $D_b D_a \geq -1$  pour tous les  $a, b$  parallèles est donc nécessaire pour que  $f$  soit la fonction plancher d'une fonction extensible convexe. Mais cela n'est pas de même avec la condition que  $D_b D_a f \geq -1$  pour tout  $a, b$ . Cela est montré par  $f(x) = |x_1 - 2x_2|$ ,  $x \in \mathbb{Z}^2$ , qui satisfait  $D_{(1,1)} D_{(1,0)} f(0) = -2$

On note que, lorsque  $a$  et  $b$  sont linéairement indépendants, alors  $D_b D_a f$  peut prendre des valeurs arbitraires aussi grandes que possibles aussi bien que des valeurs négatives aussi grandes que possibles pour les fonctions  $f$  extensibles convexes. (Prenons  $f(x) = C|(a_2 - b_2)x_1 - (a_1 - b_1)x_2|$  et  $f(x) = C|(a_2 + b_2)x_1 - (a_1 + b_1)x_2|$ , respectivement.)

Donc on a besoin à priori d'étudier deux fonctions différentes :  $D_b D_a f \geq -1$  pour tous les  $a, b$ ; et les mêmes inégalités sont valides que si  $a$  et  $b$  sont parallèles.

C'est un problème de caractériser les fonctions  $A \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont extensibles convexes; un autre problème de caractériser la classe des fonctions  $A \rightarrow \mathbb{Z}$  des fonctions planchers des fonctions extensibles convexes. Le premier problème n'est pas difficile en utilisant les opérateurs de Jensen; le deuxième est plus subtile (Klette and Rosenfeld (2004)[23], Brimkov et al. (2007) 2-planes in 3-space)[7].

## 4.5 Inverses supérieure et inférieure

Soit  $W$  une famille des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , donc  $W \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ . On définit  $c: W \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  et  $\delta': \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  par

$$c(A) = \mathbf{cvxh}(A), \quad A \in W;$$

$$\delta'(A) = A + U, \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n).$$

Ici,  $U$  est la boule unité ouverte pour la métrique  $l^\infty$ . L'application  $c$  est une restriction de l'enveloppe convexe mais n'est pas une dilatation en général. Par contre  $\delta'$  est toujours une dilatation. En plus,  $\delta'$  est croissante ( Définition 1.3.1 de la page 13), ce qui signifie que

$$\delta'(A) \subset \delta'(C) \implies A \subset C, \quad A, C \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n).$$

Pour l'inverse supérieure et l'inverse inférieure, se référer respectivement de (1.4.1) et (1.4.2) de la page 15.

Comme toujours on a  $\delta'_{[-1]} \circ \delta' \geq \mathbf{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)}$ , mais aussi on a  $\delta'_{[-1]} \circ \delta' = \mathbf{id}_{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)}$  (Kiselman 2010 : Proposition 6.3).

Déterminons les inverses  $c_{[-1]}$  et  $\delta'_{[-1]}$  :

$$c_{[-1]}(B) = \bigcup_{A \in W} (A; \mathbf{cvxh}(A) \subset B) = B \cap W;$$

$$\delta'_{[-1]}(B) = \bigcup_{A \subset \mathbb{Z}^n} (A; A+U \subset B) = \varepsilon_U(B) \cap \mathbb{Z}^n.$$

Maintenant on forme les compositions :

$$\kappa(A) = (c_{[-1]} \circ c)(A) = \mathbf{cvxh}(A) \cap W, \quad A \in W;$$

$$\kappa'(A) = (\delta'_{[-1]} \circ \delta')(A) = \bigcup_{A \subset \mathbb{Z}^n} (A; A+U \subset A+U) \subset A.$$

où  $\kappa$  et  $\kappa'$  sont toutes les deux cleistomorphismes (cleistomorphisme=fermeture et anoiktomorphisme=ouverture) :  $\kappa'$  est obtenue à partir du résultat (Kiselman 2010 : Corollaire 6.14);  $\kappa$  est facile à démontrer à partir des propriétés de l'enveloppe convexe.

## 4.6 $W$ -convexité

Un sous ensemble  $A$  de  $W \subset \mathbb{R}^n$  est par définition  $W$ -convexe si

$$\mathbf{cvxh}(A) \cap W \subset A, \quad A \subset W, \quad (4.6.1)$$

d'après la définition 4.3.14.

On note deux cas particuliers lorsque  $W = \mathbb{Z}^n$  :  $A \subset \mathbb{Z}^n$  est dit  $\mathbb{Z}^n$ -convexe si

$$\mathbf{cvxh}(A) \cap \mathbb{Z}^n \subset A, \quad A \subset \mathbb{Z}^n. \quad (4.6.2)$$

Une autre propriété importante des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^n$  est la *propriété de la corde de Rosenfeld* (1974)[32]. On la déclare comme suit

$$\mathbf{corde}(A) \subset A+U, \quad A \subset \mathbb{Z}^2, \quad (4.6.3)$$

et facilement généralisée en toute dimension par

$$\mathbf{corde}(A) \subset A + U, \quad A \subset \mathbb{Z}^n. \quad (4.6.4)$$

Ici,  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_\infty < 1\}$  est aussi la boule unité ouverte pour la métrique  $l^\infty$ . Cette propriété a initialement été définie pour le cas  $n = 2$  et lorsque  $A$  est un arc dans  $\mathbb{Z}^2$ . Cependant, cette propriété fonctionne bien pour tout sous ensemble de  $\mathbb{Z}^2$ . Finalement, sa généralisation en dimensions supérieures ne pose pas de problème pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{Z}^n$ . C'est un analogue discret de la propriété de la corde d'Euclide c'est-à-dire  $\mathbf{corde}(A) \subset A$ , caractérisant la convexité usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ , et, de concert avec la minceur, la caractérisation des lignes droites dans  $\mathbb{R}^2$ .

Notons que l'application  $A \mapsto \mathbf{corde}(A) \cap \mathbb{Z}^n$  n'est pas idempotente.

Une propriété formellement plus forte est

$$\mathbf{cvxh}(A) \subset A + U, \quad A \subset \mathbb{Z}^n. \quad (4.6.5)$$

Considérons ces propriétés suivantes

$$(b + U) \cap \mathbb{Z}^n \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x_j = b_j, \text{ pour tout } j \in J(b)\} \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad (4.6.6)$$

où  $J(b) = \{j \in [1, n]_{\mathbb{Z}}; b_j \in \mathbb{Z}\}$ . Il résulte de (4.6.6) que

$$(B + U) \cap \mathbb{Z}^n \subset \bigcup_{b \in B} \{x \in \mathbb{R}^n; x_j = b_j, \text{ pour tout } j \in J(b)\} \quad B \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6.7)$$

En particulier,

$$(b + U) \cap \mathbb{Z}^n = \{b\} \quad \text{si } b \in \mathbb{Z}^n. \quad (4.6.8)$$

On peut généraliser (4.6.8) à  $W$ , par

$$(B + U) \cap W = B \quad \text{si } B \in W, \quad (4.6.9)$$

fourni maintenant  $U$  comme étant un ensemble dont (i)  $0 \in U$  et (ii)  $a - b \in U$ ,  $a, b \in W$  implique que  $a = b$ . Cela est possible si deux points différents de  $W$  ont toujours

une distance minimale positive ; autrement, si  $W$  est en général un ensemble discret, on aura à expérimenter avec l'élément structurant qui varie avec le point considéré.

On peut généraliser cela à  $W$  et d'où la proposition suivante.

**Proposition 4.6.1.** *La propriété (4.6.5) implique la propriété de la corde (4.6.4) et la  $\mathbb{Z}^n$ -convexité (4.6.2). Mais la  $\mathbb{Z}^n$ -convexité, (4.6.2), n'implique pas la propriété de la corde (4.6.4).*

*Démonstration.* Il est clair que (4.6.5) implique la propriété (4.6.4) du fait que  $\text{corde}(A)$  est un sous-ensemble de  $\text{cvxh}(A)$ .

Maintenant supposons que (4.6.5) est vérifiée pour un certain sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{Z}^n$ . Alors

$$\text{cvxh}(A) \cap \mathbb{Z}^n \subset (A + U) \cap \mathbb{Z}^n,$$

et l'ensemble à droite est égal l'ensemble  $A$  au vue de (4.6.9). Cela montre que  $A$  est  $\mathbb{Z}^n$ -convexe.

L'ensemble  $\{(0,0), (2,1)\} \subset \mathbb{Z}^2$  est  $\mathbb{Z}^2$ -convexe, mais n'a pas la propriété de la corde. □

Lorsque  $n = 2$ , Kiselman a démontré dans (Kiselman 2011)[21] que la propriété de la corde implique la  $\mathbb{Z}^2$ -convexité. Lorsque  $n = 3$ , il s'avère que cela n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 4.6.2.** *Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^3$  avec 7 éléments*

$$a = (0,0,0), (0,1,0), (1,1,0), \quad b = (0,2,1), (1,2,1), (2,1,1) \quad \text{et} \quad c = (3,1,2).$$

*Le point*

$$t = (1,1,1) = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$$

*appartient à l'enveloppe convexe de  $A$ . Et l'ensemble  $A$  a la propriété de la corde ; on a  $[x,y] \subset A + U$  pour tout  $x,y \in A$ .*

---

Ce qui signifie que la (naïve) généralisation de la propriété de la corde (4.6.4) à partir de  $n = 2$  en dimensions supérieures est mauvaise. De préférence, il est judicieux de remplacer (4.6.4) en dimensions supérieures par (4.6.5). Pour  $n = 0, 1, 2$  les deux propriétés sont équivalentes mais par contre pour  $n \geq 3$ , (4.6.5) définit une propriété plus forte et naturelle.

**Définition 4.6.3.** Etant donné un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , un sous-ensemble  $Y$  de  $\mathbb{R}$ , et un sous-ensemble  $W$  de  $X \times Y$ , on dira qu'une fonction  $f: X \rightarrow Y$  est  $W$ -convexe si son épigraphe fini est un ensemble  $W$ -convexe dans le sens de la définition 4.3.14.  $\square$

Donc  $f$  est  $W$ -convexe si et seulement si  $\mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)) \cap W \subset \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$ ; cf. (4.3.11). On remarque ici que pour  $W = \mathbb{Z}^2$ , la condition  $\mathbf{epi}_{\mathbb{S}}^{\mathbf{F}}(\mathbf{cvxe}(f)) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$  est trop faible pour donner des résultats raisonnables, alors que la condition  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(\mathbf{cvxe}(f)) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$  est trop forte; cf. (4.3.10).

Lorsque  $X$  est l'ensemble  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  est l'ensemble  $\mathbb{R}$  et  $W = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , donc pour la  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ -convexité, on obtient la convexité usuelle pour les fonctions  $F \in \mathbb{R}_1^{\mathbb{R}^n}$ .

Pour des fonctions définies sur  $\mathbb{Z}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_1$ , il existe une simple caractérisation de  $(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ -convexité en termes de prolongement.

**Proposition 4.6.4.** *Une fonction  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}_1$  est  $(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ -convexe si et seulement si elle admet un prolongement  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ -convexe, donc un prolongement  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_1$  qui est convexe dans le sens usuel.*

*Démonstration.* Si  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_1$  est convexe, on montrera que sa restriction  $f = F|_{\mathbb{Z}^n}$  est  $(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ -convexe, c'est-à-dire que  $(x, y) \in \mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)) \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$  implique que  $(x, y) \in \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$ . Puisque  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(F)$  est maintenant convexe, l'enveloppe convexe de  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f) = \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(F) \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$  qui est incluse dans  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(F)$ . Donc si  $(x, y)$  appartient à  $\mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)) \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ , alors il appartient aussi à  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(F) \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}) = \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$ .



Réciproquement, supposons que  $f$  est  $(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ -convexe et notons par  $F = \mathbf{cvxe}(f)$  son enveloppe convexe. Lorsque  $x \in \mathbb{Z}^n$ , (4.3.9) montre que

$$F(x) = \inf\{y; (x, y) \in \mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f))\} = \inf\{y; (x, y) \in \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)\} = f(x).$$

□

Pour la  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -convexité, il n'existe pas de simple caractérisation comme celle de la proposition 4.6.4.

Compte tenu de la proposition 4.6.4, une fonction  $(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R})$ -convexe peut admettre des *prolongements convexes*, cf.[22] (Kiselman & Samieinia 2010). Cependant, on se rappelle du fait que Murota (2003 : 93) a utilisé ce terme dans un autre sens plus étroit comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 4.6.5.** *On définit une fonction  $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$  par  $f(x_1, 0) = 0$  pour tout  $x_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $f(0, 1) = 0$ ,  $f(1, 1) = 1$ , et  $f(x) = +\infty$  pour tout autre point  $x \in \mathbb{Z}^2$ . Cette fonction a un prolongement convexe  $\mathbf{cvxe}(f): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ; elle est donc  $(\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R})$ -convexe. Mais ce n'est pas un prolongement convexe dans le sens de Murota (2003 : 93), pour la fonction  $\bar{f}$  construite dans la définition (3.56) elle satisfait*

$$\bar{f}(1, 1) = 0 < 1 = f(1, 1) = (\mathbf{cvxe}(f))(1, 1).$$

□

Nous devons donc prendre soin de ne pas confondre un prolongement convexe dans le sens de Murota à un prolongement convexe  $\mathbf{cvxe}(f)$ . On a toujours  $\bar{f} \leq \mathbf{cvxe}(f)$  sur  $\mathbb{R}^n$ , et l'inégalité peut être stricte même avec certains points entiers comme nous l'avons vu. La fonction  $\bar{f}$  est toujours semi-continue inférieurement, alors que l'enveloppe convexe de  $\mathbf{cvxe}(f)$  n'a pas besoin de l'être. En fait,  $\bar{f}$  est la seconde transformée de Fenchel de  $f$ .

Notons que  $f > -\infty$ . Si on permet à ce que  $-\infty$  soit une valeur de  $f$ , il existe des exemples simples même à une seule variable : on définit  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_!$  par  $g(0) = -\infty$ ,  $g = +\infty$  in  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Alors  $\bar{g} = -\infty < +\infty = \mathbf{cvxe}(g)$  dans  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Pour toute fonction  $f \in \mathbb{Z}_1^{\mathbb{Z}}$  on associe la fonction  $g \in \mathbb{R}_1^{\mathbb{Z}}$  prenant les mêmes valeurs. Alors  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f) = \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(g) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \subset \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(g)$  avec une inclusion stricte, sauf lorsque les deux épigraphes finis sont vides. Cependant leurs enveloppes convexes sont les mêmes. C'est par ce que, pour chaque  $(p, p') \in \mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$ , le rayon entier  $(p, p') + L$ , lorsque  $L = \{(0, z') \in \mathbb{R}^2; z' \geq 0\}$ , est inclus dans  $\mathbf{cvxh}(\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f))$ , de telle sorte que les enveloppes convexes à la fois peuvent être décrites comme l'enveloppe convexe de l'union de tous les ensembles  $(p, p') + L$  avec  $(p, p')$  variant dans  $\mathbf{epi}^{\mathbf{F}}(f)$ . (Lorsque  $f(p)$  est fini, on peut prendre  $p' = f(p)$ .)

---

---

# CHAPITRE 5

---

## LES HYPERPLANS DIGITAUX

### 5.1 Tranches dans l'espace euclidien

Pour décrire les hyperplans discrets on a besoin de considérer les tranches dans l'espace euclidien : ce sont des hyperplans engraisés. On fixera maintenant quelques uns parmi ces hyperplans.

#### 5.1.1 Tranches dans une position générale

Considérons les tranches sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

$$T = T(\alpha, \beta, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \beta \leq \alpha \cdot x \leq \gamma\},$$

$$T^* = T^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \beta \leq \alpha \cdot x < \gamma\},$$

$$T_* = T_*(\alpha, \beta, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \beta < \alpha \cdot x \leq \gamma\},$$

$$T_*^* = T_*^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \beta < \alpha \cdot x < \gamma\}.$$

On note que  $T^*(\alpha, \beta, \gamma) = T_*(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -T_*(\alpha, -\beta, -\gamma)$ .

On aura aussi besoin de parler des hyperplans réels

$$T(\alpha, \beta, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \alpha \cdot x = \beta\}, \quad T(\alpha, \gamma, \gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \alpha \cdot x = \gamma\}.$$

Si  $\beta \leq \gamma$ , on a  $T(\alpha, \beta, \gamma) = T_*^*(\alpha, \beta, \gamma) \cup T(\alpha, \beta, \beta) \cup T(\alpha, \gamma, \gamma)$ .

On définit l'épaisseur d'une tranche  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \leq \gamma$  par

$$\text{épaisseur}(T) = \frac{\gamma - \beta}{\|\alpha\|_2},$$

et de même pour  $T^*$ ,  $T_*$  et  $T_*^*$ . Tout ensemble fini  $A$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  est inclus dans une ou plusieurs tranches  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  d'épaisseur minimale. Chacune d'entre elles peut être notée par  $T(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2)$ .

On définit aussi, si  $\alpha_k > 0$  et  $\beta \leq \gamma$ , la hauteur de la tranche dans la direction de  $x_k$  par

$$\text{hauteur}_k(T) = \frac{\gamma - \beta}{\alpha_k}.$$

C'est la mesure de la hauteur dans la direction du système de coordonnées telle que  $x_k$  soit la variable verticale.

**Définition 5.1.1.** On entend par un *hyperplan discret* dans le sens de Reveillès (cf. Reveillès 1991 : 45 pour  $n = 1$ ) [31], un ensemble de la forme  $D = \mathbb{Z}^{n+1} \cap T^*(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $\beta < \gamma$ .

Cette définition actuelle est une généralisation de  $n = 1$  de la définition originale de Reveillès. Un hyperplan discret  $D$  dans le sens de Reveillès satisfait

$$(T(\alpha, \beta, \gamma) \cap \mathbb{Z}^{n+1}) \setminus D \subset T(\alpha, \beta, \beta),$$

c'est-à-dire, les points de la grille dans  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  qui ne sont pas dans  $D$  tous appartiennent à un seul hyperplan réel de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .  $\square$

**Définition 5.1.2.** On entend par un *hyperplan discret raffiné* [17] (Kiselman 2004 : 456), un sous-ensemble  $D$  de  $\mathbb{Z}^{n+1}$  tel que  $D = C \cap \mathbb{Z}^{n+1}$  pour un sous-ensemble convexe  $C$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et

$$T_*^*(\alpha, \beta, \gamma) \cap \mathbb{Z}^{n+1} \subset D \subset T(\alpha, \beta, \gamma) \cap \mathbb{Z}^{n+1}$$

pour des choix de  $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  et  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$  et en plus, pour un  $k = 1, \dots, n+1$ , les ensemble  $\pi_k(D \cap T(\alpha, \beta, \beta))$  et  $\pi_k(D \cap T(\alpha, \gamma, \gamma))$  sont disjoints et à la fois satisfont les  $\pi_k((T(\alpha, \beta, \beta) \cup T(\alpha, \gamma, \gamma)) \cap \mathbb{Z}^n)$ . Ici  $\pi_k: \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$  est la projection qui oublie la coordonnée  $x_k$ .  $\square$

### 5.1.2 Tranches dans une position spéciale

Pour pouvoir étudier les tranches contenant le graphe d'une fonction, il est avantageux de choisir une coordonnée  $x_k$  comme étant la coordonnée de la variable verticale et considérer les autres coordonnées comme les variables horizontales. Pour que cela réussisse, on a habituellement besoin de supposer que  $|\alpha_k| \geq |\alpha_j|$  quelque soit  $j$ , impliquant que  $\|\alpha\|_\infty = |\alpha_k|$ . Dans ce cas, on écrira seulement **hauteur**( $T$ ) pour **hauteur** $_k$ ( $T$ ).

On définit donc les tranches  $\mathbb{R}^{n+1}$  de la façon suivante avec  $y = x_{n+1}$  comme variable verticale.

$$S = S(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha \cdot x + \beta \leq y \leq \alpha \cdot x + \gamma\},$$

$$S^* = S^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha \cdot x + \beta \leq y < \alpha \cdot x + \gamma\},$$

$$S_* = S_*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha \cdot x + \beta < y \leq \alpha \cdot x + \gamma\},$$

$$S_*^* = S_*^*(\alpha, \beta, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \alpha \cdot x + \beta < y < \alpha \cdot x + \gamma\}.$$

Donc  $S(\alpha, \beta, \gamma) = T((\alpha, 1), \beta, \gamma)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ . On note que  $S^*(\alpha, \beta, \gamma) = -S_*(\alpha, -\gamma, -\beta)$ .

Souvent, on exige que  $\|\alpha\|_\infty \leq 1$ .

On a besoin aussi des hyperplans

$$S(\alpha, \beta, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; y = \alpha \cdot x + \beta\},$$

$$S(\alpha, \gamma, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; y = \alpha \cdot x + \gamma\}.$$

La hauteur dans la direction de  $y$  d'une tranche  $S = S(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\beta \leq \gamma$  est maintenant :

$$\mathbf{hauteur}(S) = \gamma - \beta.$$

Si  $A$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^{n+1}$  il existe une tranche de hauteur minimale dans la direction de  $y$ . Si l'enveloppe affine de  $A$  est de dimension au moins  $n$ , elle est unique. Si c'est le cas, on notera cela par  $S(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)}, \gamma^{(\infty)})$ . Son hauteur est

$$\gamma^{(\infty)} - \beta^{(\infty)} = \frac{\gamma^{(\infty)} - \beta^{(\infty)}}{\|(-\alpha^{(\infty)}, 1)\|_{\infty}},$$

tandis que son épaisseur est

$$\frac{\gamma^{(\infty)} - \beta^{(\infty)}}{\sqrt{1 + \|\alpha^{(\infty)}\|_2^2}}.$$

**Proposition 5.1.3.** *Soit  $A$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , soit  $T(\alpha^{(2)}, \beta^{(2)}, \gamma^{(2)})$  une tranche d'épaisseur minimale contenant  $A$ , et  $T(\alpha^{(\infty)}, \beta^{(\infty)}, \gamma^{(\infty)})$  une tranche de hauteur minimale dans la direction de  $x_{n+1}$ , en supposant que  $|\alpha_j^{(2)}| \leq |\alpha_{n+1}^{(2)}|$ . Alors cette dernière a moins de pente que le premier dans le sens que*

$$\frac{|\alpha_j^{(\infty)}|}{\|\alpha^{(\infty)}\|_{\infty}} \leq \frac{|\alpha_j^{(2)}|}{\|\alpha^{(2)}\|_{\infty}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

□

Ce résultat implique que l'inégalité  $|\alpha_j^{(2)}| \leq |\alpha_{n+1}^{(2)}|$  que nous avons supposée, est conservée pour  $\alpha^{(\infty)}$ ; aussi, on sait donc que  $|\alpha_j^{(\infty)}| \leq |\alpha_{n+1}^{(\infty)}|$ , ce qui est plus important.

*Démonstration.*  $|\alpha_j^{(\infty)}| \leq |\alpha_j^{(2)}|$ ,  $j = 1, \dots, n$ . □

## 5.2 Graphes contenus dans les tranches : nécessité des inégalités de convolution

Pour des fonctions à variables entières, les exigences sur les hyperplans comme  $D_{e^{(k)}} D_{e^{(k)}} f = 0$  (cf. Proposition 4.3.3) sont trop strictes. On trouve une faible

condition qui s'avère nécessaire pour les hyperplans discrets.

**Théorème 5.2.1.** *Soit  $\mu \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^n}$  ayant un support fini non vide et supposons qu'elle annule toutes les fonctions affines. Soit  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction telle que son graphe est inclus dans une tranche  $S(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\beta \leq \gamma$ . Alors  $|\mu * f| \leq \frac{1}{2}(\gamma - \beta)\|\mu\|_1$ . Si le graphe est inclus dans  $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$ , alors  $|\mu * f| < \frac{1}{2}(\gamma - \beta)\|\mu\|_1$ .*

*Démonstration.* On trouve facilement que

$$\mu^+ * f \leq \mu^+ * (x \mapsto \alpha \cdot x + \gamma) \quad \text{et} \quad \mu^- * f \geq \mu^- * (x \mapsto \alpha \cdot x + \beta). \quad (5.2.1)$$

Par conséquent

$$\mu * f \leq \mu * (x \mapsto \alpha \cdot x + \beta) + \mu^+ * (\gamma - \beta) = (\gamma - \beta)\|\mu^+\|_1 = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)\|\mu\|_1.$$

Si le graphe est inclus dans  $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$ , alors la première inégalité dans (5.2.1) est stricte, et on obtient une inégalité stricte aussi pour  $\mu * f$ . De la même façon,  $\mu * f \geq -\frac{1}{2}(\gamma - \beta)\|\mu\|_1$  avec stricte inégalité dans les cas de  $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$ .

On note deux classes spéciales. □

**Corollaire 5.2.2.** *Pour une fonction  $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$  telle que son graphe est un hyperplan discèt dans le sens de Reveillès, on a*

$$|D_b D_a f| \leq 1, \quad a, b \in \mathbb{Z}^n.$$

□

*Démonstration.* Avec  $\mu * f = D_b D_a f$  on a  $\|\mu\|_1 = 4$  et  $\gamma - \beta = 1$ , donc  $|D_b D_a f| < 2$ . Puisque la fonction  $D_b D_a f$  n'a que des valeurs entières, elle ne peut prendre que des valeurs  $-1, 0, 1$ . □

**Corollaire 5.2.3.** *Pour une fonction  $f \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}^n}$  telle que son graphe est un hyperplan discret dans le sens de Reveillès, on a  $|J_{p,\lambda} f| < 1$  pour tous les opérateurs de Jensen  $J_{p,\lambda}$ .* □

*Démonstration.* Si  $\mu * f = J_{p,\lambda}f$  on a  $\|\mu\|_1 = 2$  et  $\gamma - \beta = 1$ , donc  $|J_{p,\lambda}f| < 1$ .  $\square$

Maintenant on se demande comment généraliser ces deux corollaires à des hyperplans discrets raffinés (Section 5.2) et si leurs réciproques vérifient (Section 5.3).

## Hyperplans discrets raffinés

Lorsque le graphe d'une fonction  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  est un hyperplan discret raffiné, il est inclus dans une tranche  $S(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\gamma - \beta = 1$  mais en général ni dans  $S^*(\alpha, \beta, \gamma)$  et ni  $S_*(\alpha, \beta, \gamma)$  : il pourrait exister des points dans l'hyperplan supérieur et d'autres dans l'hyperplan inférieur.

**Proposition 5.2.4.** *Soit le graphe de  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  un hyperplan discret raffiné. Alors  $|D_b D_a f| \leq 1$  pour tous les  $a, b \in \mathbb{Z}^n$ .*  $\square$

*Démonstration.* Du théorème 5.2.1, on a  $|D_b D_a f| \leq 2$ , et il reste à démontrer que  $D_b D_a f$  est strictement comprise entre  $-2$  et  $2$ .

Notons par  $A_0$  l'ensemble des points  $x \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $(x, f(x))$  appartient à l'hyperplan inférieur  $S(\alpha, \beta, \beta)$  donné par  $y = \alpha \cdot x + \beta$ , et par  $A_1$  l'ensemble correspondant tel que  $(x, f(x))$  appartient à l'hyperplan supérieur  $S(\alpha, \gamma, \gamma)$ . Par hypothèse, il existe des sous ensembles convexes  $C_j$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $A_j = C_j \cap \mathbb{Z}^n$ ,  $j = 0, 1$  et  $A_0 \cup A_1 = \mathbb{Z}^n$ ,  $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ .

Si  $D_b D_a f(x) = 2$ , alors les points  $x$  et  $x + a + b$  doivent appartenir à  $A_1$  et les points  $x + a$  et  $x + b$  à  $A_0$ . Par convexité de  $C_1$ , on doit alors avoir  $x + 2a \notin C_1$ , donc  $x + 2a \in C_0$ , pour  $x + a \notin C_1$  qui est le milieu de  $x \in C_1$ . De la même façon,  $x + 2b \in C_0$  et  $x + 2a$ . Donc, par convexité de  $C_0$ , le milieu de  $x + 2a$  et  $x + 2b$ , qui est  $x + a + b$ , doit appartenir à  $C_0$ . Puisque ce point des coordonnées entières, il doit appartenir à  $A_0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Cette contradiction montre que  $D_b D_a f(x) \leq 1$ . D'une manière similaire, on démontre aussi que,  $D_b D_a f(x) \geq -1$ .  $\square$



**Proposition 5.2.5.** *Soit le graphe de  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  un hyperplan discret raffiné.*

*Alors  $|J_{p,\lambda}f| < 1$  pour tous les opérateurs de Jensen  $J_{p,\lambda}$ .*  $\square$

*Démonstration.* Si  $\gamma - \beta = 1$  on obtient à partir du théorème 5.2.1 que  $|J_{p,\lambda}f| \leq 1$ , et il reste à démontrer que  $J_{p,\lambda}f$  est strictement comprise entre  $-1$  et  $1$ .

On définit deux ensembles  $A_0, A_1$  de la même manière que la démonstration précédente. Si tous les points  $x - p^{(j)}$  appartiennent à  $A_1$ , alors leur barycentre  $x$  appartient aussi à  $A_1$ , de tel sorte que  $J_{p,\lambda}f(x) = 0$ . Autrement, si l'un des points  $x - p^{(j)}$  appartient à  $A_0$ , alors pour cet indice  $j$  on a  $f(x - p^{(j)}) = \alpha \cdot (x - p^{(j)}) + \beta < \alpha \cdot (x - p^{(j)}) + \gamma$ , et on obtient une stricte inégalité  $J_{p,\lambda}f(x) < 1$ .  $\square$

## 5.3 Graphes contenus dans les tranches : suffisance des inégalités de convolution

### 5.3.1 Les hyperplans dans le sens de Reveillès

**Conjecture 5.3.1.** *Soit  $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$  une fonction qui satisfait  $|J_{p,\lambda}f| < 1$  pour tous les  $p \in (\mathbb{Z}^n)^{n+1}$  (ou tout simplement l'un de ces points  $p$  ?). Alors pour tout ensemble fini  $X \subset \mathbb{Z}^n$ , le graphe de  $f|_X$  est inclus dans une tranche  $S(\alpha, \beta, \gamma)$  de hauteur  $\gamma - \beta$  inférieure à 1. Le graphe de  $f$  aussi est inclus dans une tranche  $S(\alpha, \beta, \beta + 1)$  de hauteur 1.*

## 5.4 Mesure de déviation de la convexité

On entend par déviation de la convexité ou la mesure de la non convexité d'un ensemble donné, une méthode permettant de mesurer la distance d'un ensemble de la convexité.

**Définition 5.4.1.** Soit  $S$  un ensemble donné, appelé ensemble structurant, et  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Alors la *déviaton de la convexité de  $A$  mesurée par  $S$*  est

$$\mathbf{devcon}_S(A) = \inf_{t \in \mathbb{R}} (t \geq 0; \mathbf{cvxh}(A) \subset A + tS). \quad (5.4.1)$$

□.

Si  $A$  est convexe et  $S$  non vide, alors  $\mathbf{devcon}_S(A) = 0$ .

Si  $S$  est la boule unité ouverte pour la norme  $l^\infty$ , alors la propriété de la corde de Rosenfeld implique que  $\mathbf{devcon}_S(A) \leq 1$ . En fait il est plus naturel ici de prendre  $S$  comme la boule unité fermée pour la norme  $l^\infty$  et alors la propriété de la corde de Rosenfeld dit que  $\mathbf{devcon}_S(A) < 1$  pourvu que  $A$  soit fini.

## Distance de Hausdorff

Etant donné deux sous-ensembles quelconques  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , on définit la distance de Hausdorff par

$$H(A, B) = \sup \left( \sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} \|a - b\| \right\}, \sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} \|b - a\| \right\} \right), \quad (5.4.2)$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme définie dans  $\mathbb{R}^n$ .

Cependant, nous pouvons considérer que le réel  $t$  dans l'équation (5.4.1) est un cas particulier de la distance de Hausdorff (5.4.2) et défini par

$$t = H(A, \mathbf{cvxh}(A)) = \sup \left( \sup_{b \in \mathbf{cvxh}(A)} \left\{ \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}, 0 \right), \quad (5.4.3)$$

d'où

$$\mathbf{devcon}_S(A) = \inf_{t \in \mathbb{R}} (t \geq 0; \mathbf{cvxh}(A) \subset A + tS) = \sup_{b \in \mathbf{cvxh}(A)} \left\{ \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}. \quad (5.4.4)$$

Le résultat (5.4.4) nous permet d'obtenir un recouvrement optimale de l'enveloppe convexe pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont  $A$  est le graphe d'une fonction

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut exprimer ce recouvrement par

$$\mathbf{cvxh}(A) \subset A + \sup_{b \in \mathbf{cvxh}(A)} \left\{ \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\} S, \quad (5.4.5)$$

Prenons  $S = B_{<}^{\infty}(0,1)$  la boule unité ouverte pour la métrique  $l^{\infty}$  alors  $S \subset U(1,1)$  avec

$$U(r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^2; |x_1| \leq r_1, |x_2| \leq r_2\} = [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2] \subset \mathbb{R}^2.$$

Puisque  $t = \sup_{b \in \mathbf{cvxh}(A)} \{ \inf_{a \in A} \|a - b\| \}$  alors on obtient

$$\mathbf{cvxh}(A) \subset A + tS \subset A + U(t, t). \quad (5.4.6)$$

Pour  $n = 1$ , nous avons deux exemples graphiques qui illustrent ce problème de déviation de la convexité.

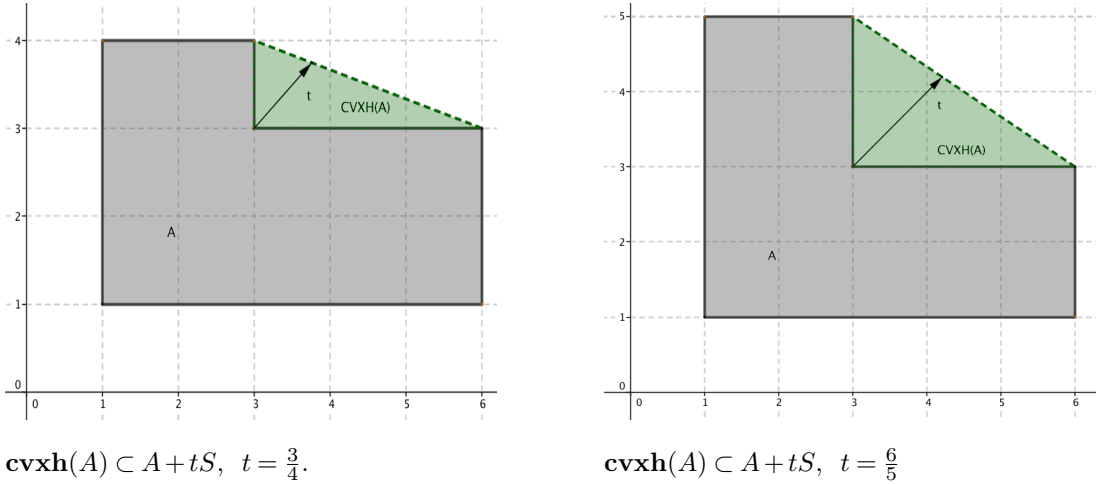


FIGURE 5.1 – La mesure de déviation de la convexité entre l'ensemble  $A$  et son enveloppe convexe  $\mathbf{cvxh}(A)$  est  $t$  et  $S$  est la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^2$  pour la métrique  $l^{\infty}$ .

## 5.5 Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons déterminé deux polygones respectivement à l'aide de la fonction plancher et le nombre entier le plus proche. Ces polygones contiennent les dimensions admissibles de l'élément structurant offrant ainsi deux nouvelles méthode de recouvrement d'une droite euclidienne d'une manière optimale dans le plan. Ces travaux ont été généralisés en dimensions supérieures par la détermination de deux polyèdres respectivement à l'aide de la fonction plancher et le nombre entier le plus proche. Ces polyèdres offrent les dimensions admissibles pour le recouvrement optimal d'un plan euclidien dont l'inclinaison est rationnelle.

Les études de discontinuité des dilatations montrent qu'il existe une forte correction entre la taille des éléments structurants et les pentes de la droite euclidienne ou le plan euclidien considéré. Cela montre l'importance de la prise en compte des caractéristiques locales de la droite ou le plan euclidien afin de proposer une meilleure transcription discrète adéquate. Cependant, ces investigations montrent aussi l'importance des grilles irrégulières dans la transcription et la reconnaissance de l'espaces continu en espace discret.

Une étude détaillée de la convexité définie par le produit des convolutions à l'aide de l'opérateur de différence de second ordre et l'opérateur de Jensen a été faite. De même, une étude détaillée a été faite sur les tranches en position générale et position spéciale ainsi que des hyperplans discrets raffinés.

Des exemples d'applications ont été donnés dans chaque cas étudié, dans le plan et dans l'espace en dimensions trois. A travers ces exemples, nous remarquons que ces méthodes de recouvrement peuvent être très efficaces dans la mesure ou elles conservent toute l'information contenue dans l'espace continu lors de la transcription en espace discrète et offrent en plus des recouvrements optimaux.

## 5.6 Perspectives

Ces études montrent que le besoin d'améliorer les méthodes actuelles de transcription de l'espace continu sous forme discrète est plus que nécessaire. Cependant, les résultats obtenus à travers les méthodes que nous avons proposées demandent par la suite l'interprétation expérimentale de leur applicabilité et adaptabilité aux opérateurs morphologiques pour des problèmes réels rencontrés.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Andres, Eric (1993). Le plan discret. **Dans:** Proc. 3ème colloque *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Strasbourg, France. pp. 45–61.
- [2] Andres, Eric (2008). The supercover of an  $m$ -flat is a discrete analytical object. *Theoretical Computer Science* **406**. pp. 8–14.
- [3] Andres, Eric ; Ph. Nehlig ; J. Françon (1997). Supercover of straight lines, planes and triangles. **Dans:** Proc. 7th Int. Workshop on *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Montpellier, France. **Dans:** Lecture Notes in Computer Science **1347** , pp. 243–253. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [4] Andres, Eric ; Sibata, Claudio ; Acharya, Raj (1996). Supercover 3D Polygon. **Dans:** Proc. 6th Int. Workshop on *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Lyon, France. **Dans:** Lecture Notes in Computer Science **1176**, pp. 237–242. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [5] Andres, Eric ; Acharya, Raj ; Sibata, Claudio (1997). Discrete analytical hyperplanes. *Graphical Models and Image Processing* **59** n° 5, 302–309, September.
- [6] Berthé, Valérie (2009). Discrete geometry and symbolic dynamics. **Dans:** Mikael Passare (Ed.), *Complex Analysis and Digital Geometry*. Proceedings from the Kiselmanfest, 2006, pp. 81–110. Acta Universitatis Upsaliensis, vol. 86. Uppsala: University. 364 pp. ISSN 0502-7454, ISBN 978-91-554-7672-4.
- [7] Brimkov, Valentin ; Coeurjolly, David ; Klette, Reinhard (2007). Digital planarity—A review. *Discrete Appl. Math.* **155**, 468–495.

- [8] Bruckstein, Alfred M. (1991). Self-similarity properties of digitized straight lines. *Vision Geometry* (Hoboken, NJ, 1989), pp. 1–20. Contemporary Mathematics, 119, Amer. Math. Soc., 209 pp. Strasbourg: Université Louis Pasteur.
- [9] Chassery, Jean-Marc ; Sivignon, Isabelle (2013). Optimal covering of a straight line applied to discrete convexity. R. Gonzalez-Diaz, M.-J. Jimenez, B. Medrano (Eds.): *Digital Geometry for Computer Imagery*, LNCS 7749, pp. 1–10. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] Coeurjolly, David (2002). Algorithmes et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces. Human-Computer Interaction. Université Lumière-Lyon II.
- [11] Ćurić, Vladimir (2014). *Distance Functions and Their Use in Adaptive Mathematical Morphology*. PhD thesis in Uppsala University, Digital Comprehensive Summaries of Uppsala Dissertation from the Faculty of Science and Technology 1137.
- [12] Eckhardt, Ulrich (2001). Digital lines and digital convexity. **Dans:** *Digital and Image Geometry*, pp. 209–227.
- [13] Euclid (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Volume I: Introduction and Books I, II. New York: Dover Publications, Inc.
- [14] Hung, S. H. Y. ; Kasvand, T. (1984). On the chord property and its equivalences. **Dans:** *Proceedings of the 7th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 116–119.
- [15] Kim, Chul E. (1983). Three-dimensional digital line segments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **5**, n° 2. pp. 231–234.
- [16] Kim, Chul E. (1984). Three-dimensional digital planes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **6**, n° 5. pp. 639–645.

- [17] Kiselman, Christer O. (2004). Convex function on discrete sets. **Dans:** Computational Image Analysis. 10th International Workshop, IWCIA 2004; Auckland, New Zeland, December 1 – 3, 2004; Proceeding R. Klette; J. Žunić (Eds.), pp. 443–457. Lecture Notes in Computer Science 3322.
- [18] Kiselman, Christer O. (2005). Subharmonic functions on discrete structures. **Dans:** Harmonic Analysis, Signal Processing, and Complexity. Festschrift in Honor of the 60th birthday of Carlos A. Berenstein, pp. 67–80. Progress in Mathematics, Vol. 238. Irene Sabadini, Daniele C. Struppa, David F. Walnut, Eds., xi + 162 pp. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser.
- [19] Kiselman, Christer O. (2010). Local minima, marginal functions, and separating hyperplanes in discrete optimization. **Dans:** Rajendre Bhatia (Ed.), *Abstracts: Short communications; Posters*. International Congress of Mathematicians, Hyderabad, August 19 - 29, 2010, pp. 572–573.
- [20] Kiselman, Christer O. (2010). Inverses and quotients of mappings between ordered sets, *Image and Vision Computing* **28**, 1429–1442.
- [21] Kiselman, Christer O. (2011). Characterizing digital straightness and digital convexity by means of difference operators. *Mathematika* **57**, 355–380.
- [22] Kiselman, Christer O.; Samieinia, Shiva (2010). Convexity of marginal functions in the discrete case. **Dans:** Shiva Samieinia (2010), *Digital Geometry, Combinatorics, and Discrete Optimization*, published on 2010-12-15. PhD Thesis defended at Stockholm University on 2011-01-21.
- [23] Klette, Reinhard; Rosenfeld, Azriel (2004). *Digital geometry. Geometric methods for digital picture analysis*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann publishers; Amsterdam: Elsevier Science B.V. xviii+656pp.
- [24] Klette, Reinhard; Rosenfeld, Azriel (2004). Digital straightness—a review. *Discrete App. Math.* **139**, n° (1-3), 197–230.



- [25] Koné, Adama Arouna (2015). Covering a Euclidean line or hyperplane by dilations of its discretization. *Vietnam Journal of Mathematics*, VJOM-D-15-00058R1.
- [26] Matheron G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry* New York: Wiley.
- [27] Miller, Bruce L. (1971). On minimizing nonseparable functions defined on the integers with an inventory application. *SIAM J. App. Math.* **21**, 166–185.
- [28] Montanvert, Annick ; Chassery, Jean-Marc ; Coeurjolly, David (2007). *Géométrie discrète et images numériques*. Traité IC2, Série signal et Image, Hermès Paris.
- [29] Murota, Kazuo (2003). *Discrete Convex Analysis*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). xxii+389 pp.
- [30] Reveillès, Jean-Pierre ; Debled-Rennesson, Isabelle (1995). A linear algorithm for segmentation of digital curves. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, **9**, n° 6, 635–662.
- [31] Reveillès, Jean-Pierre (1991). *Géométrie discrète, calculs en nombres entiers et algorithmique*. Thèse d'état, Université Louis Pasteur.
- [32] Rosenfeld, Azriel (1974). Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*, **c - 32**, n° 12, 1264–1269.
- [33] Rosenfeld, Azriel ; Kim, Chul E. (1982). How a digital computer can tell whether a line is straight. *Amer. Math. Monthly*, **89**, n° 4, 230–235.
- [34] Rosenfeld, Azriel ; Pfaltz, J. L. (1966). Sequential operators in digital picture processing. *Journal of the ACM*, **13**, n° 4, 471–494.
- [35] Rosenfeld, Azriel ; Pfaltz, J. L. (1968). Distance functions on digital pictures. *Pattern Recognition*, **1**, n° 1, 33–61.
- [36] S. Beucher ; J. Blosseville ; F. Lenoir (1987). Traffic spatial measurements using image video processing, in *Proc. SPIE Intel. Robots Comput Vis.* **848**, 648–655.

## Bibliographie

---

- [37] Serra J. (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. London, U.K.: Academic.

---

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les resultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements : $M_{pl} + U(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset L$ , cf. Figure 2.6, 2.7 et Figure 2.8. . . . .	43
2.2	Les resultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements : $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{17}{15}) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \supset L$ , cf. Figure 2.9, 2.10, 2.11 et 2.12. . . . .	45
2.3	Les resultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements : $M_{pl} + U(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}) \supset L$ , $M_{pp} + U(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, 1) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Figure 2.13, 2.14, 2.15 et 2.16. . . . .	46
2.4	Les resultats obtenus à partir de ce tableau permettent d'obtenir ces recouvrements : $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Figure 2.17, 2.18, 2.19 et 2.20. . . . .	47
3.1	On selectionne les recouvrements $M_{pl} + U(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}) \supset L$ , $M_{pp} + U(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{9}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8}) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}) \supset L$ , cf. Figures 3.4, 3.5, 3.6 et 3.7. . .	65
3.2	On selectionne les recouvrements $M_{pl} + U(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}) \supset L$ , $M_{pp} + U(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}) \supset L$ , $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10}) \supset L$ et $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}) \supset L$ , cf. Figures 3.9, 3.8, 3.11 et 3.10. . .	67

---

## TABLE DES FIGURES

1.1	Grid Intersect Quantization ( <i>GIQ</i> )[10] . . . . .	6
1.2	Object Boundary Quantization ( <i>OBQ</i> )[10] . . . . .	7
1.3	Background Boundary Quantization ( <i>BBQ</i> )[10] . . . . .	7
1.4	Les boules fermées ayant le même rayon pour les différentes fonctions de distance : (a) distance bloc $l^1$ ; (b) distance euclidienne $l^2$ ; (c) distance de Chebyshev (ou de l'échiquier) $l^\infty$ . . . . .	10
1.5	La droite euclidienne définie par $L : x - 3y + \mu = 0$ et l'ensemble $M$ des points discrets associés. . . . .	20
1.6	Recouvrement d'une portion de $L : x - 3y + \mu = 0$ , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $M + B_{\infty}^{\leq}(0, \frac{3}{4})$ . . . . .	21
2.1	La relation entre deux points consécutifs $x$ et $x + 1$ , donnée par $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x + 1 - r_1) +$ $\frac{\mu}{\alpha_2} \leq f(x) + r_2$ , pour tout $(x, f(x)) \in M$ avec $r_1$ le rayons sur l'axe $x$ et $r_2$ le rayons sur l'axe $y$ tels que $(r_1, r_2) \in [\frac{1}{2}; +\infty]^2$ . . . . .	30
2.2	La représentation graphique des différents polygones $P(\alpha)$ selon les valeurs $\alpha_1$ et $\alpha_2$ . Le point ( <i>C&amp;S</i> ) signifie le résultat de Chassery et Sivignon. . . . .	32
2.3	La droite euclidienne définie par $L : x - 3y + \mu = 0$ et l'ensemble $M$ des points discrets associés. . . . .	36

---

2.4	La relations entre deux points consécutifs $x$ et $x+1$ donnée par cette inégalité $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(x+1-r_1) + \frac{\mu}{\alpha_2} \leq f(x) + r_2$ , pour tout $(x, f(x)) \in M$ avec $r_1$ le rayons sur l'axe $x$ et $r_2$ le rayons sur l'axe $y$ . . . . .	37
2.5	La représentation graphique des différents polygones $Q(\alpha)$ selon les valeurs $\alpha_1$ et $\alpha_2$ . . . . .	38
2.6	Exemple de recouvrement $M_{pl} + U(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1 . . . . .	44
2.7	Exemple de recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1 . . . . .	44
2.8	Exemple de recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}) \supset L$ , cf. Tableau 2.1 . . . . .	44
2.9	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2. . . . .	46
2.10	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2. . . . .	46
2.11	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{17}{15}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2. . . . .	46
2.12	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}) \supset L$ , cf. Tableau 2.2. . . . .	46
2.13	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{6}{7}, \frac{6}{7}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3. . . . .	47
2.14	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{4}{7}, \frac{4}{7}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3. . . . .	47
2.15	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, 1) \supset L$ , cf. Tableau 2.3. . . . .	47
2.16	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.3. . . . .	47
2.17	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4. . . . .	48
2.18	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4. . . . .	48
2.19	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{7}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4. . . . .	48
2.20	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 2.4. . . . .	48
2.21	Autre exemple de recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ pour $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$ . . . . .	50
2.22	Autre exemple de recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ pour $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$ . . . . .	50
3.1	Pour $n = 2$ , on obtient une représentation graphique du polyèdre en utilisant la fonction plancher. . . . .	53
3.2	Forme géométrique de l'élément structurant $U(r_1, r_2, r_3)$ en 3-D. . . . .	64
3.3	Plan euclidien défini par $L = \{(x_1, x_2, F(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2) = \frac{-3x_1 + 2x_2 + \mu}{4}\}$ . . . . .	65
3.4	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1 . . . . .	66

---

---

3.5	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{9}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1 . . . . .	66
3.6	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1 . . . . .	66
3.7	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.1 . . . . .	66
3.8	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2 . . . . .	67
3.9	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2 . . . . .	67
3.10	Recouvrement $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{10}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2 . . . . .	68
3.11	Recouvrement $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}) \supset L$ , cf. Tableau 3.2 . . . . .	68
3.12	Autre exemple pour $\alpha_1 = 3$ , $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 4$ on a : $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ . . . . .	69
3.13	Autre exemple pour $\alpha_1 = 3$ , $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 4$ on a : $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ . . . . .	69
3.14	Autre exemple pour $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 5$ on a : $M_{pl} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ . . . . .	69
3.15	Autre exemple pour $\alpha_1 = 1$ , $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 5$ on a : $M_{pp} + U(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \not\supset L$ . . . . .	69
5.1	La mesure de déviation de la convexité entre l'ensemble $A$ et son enveloppe convexe $\mathbf{cvxh}(A)$ est $t$ et $S$ est la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^2$ pour la métrique $l^\infty$ . . . . .	101

## Résumé

Dans cette thèse, le travail que nous présentons est motivé par la recherche des *méthodes optimales* afin de proposer une meilleure configuration discrète des formes continues. Nous proposons quelques méthodes de recouvrement de droites et hyperplans euclidiens par les dilatations de leurs discrétisations. Une telle dilatation est définie en utilisant un élément structurant dont les dimensions dépendent des caractéristiques de l'objet euclidien considéré (droite ou hyperplans) et de sa discrétisation choisie. Ainsi, nous donnons une représentation paramétrique des dimensions admissibles de l'élément structurant et nous montrons que l'ensemble de ces dimensions est un polygone ou un polyèdre selon que l'objet euclidien soit une droite ou un hyperplan.

Nous donnons, en dimensions supérieures, une caractérisation naturelle de la convexité à l'aide de l'opérateur de Jensen et celui de différence de second ordre exprimés sous forme de produit de convolution.

De plus, nous donnons une caractérisation des hyperplans digitaux à l'aide des tranches définies en position générale et une caractérisation digitale des hyperplans discrets raffinés à l'aide des tranches définies en position spéciale en dimension supérieure. Cela nous permet de trouver, en dimensions supérieure, une relation entre l'opérateur de Jensen et celui de différence de second ordre.

**Mots-clés:** Droite euclidienne et discrète, hyperplan euclidien et discrets, discrétisation, dilatation, recouvrement optimal et convexité.

## Abstract

In this thesis, our study was motivated by the search of optimal methods in order to offer a better discrete configuration of continuous shapes. We propose some methods of covering a Euclidean lines and hyperplanes by dilations of their discretizations. Such dilation is defined using a structuring element the dimensions of which depend on the characteristics of the considered Euclidean object (line or hyperplanes) and its chosen discretization. Thus, we provide a parametric representation of the allowable dimensions of the structuring element and show that all these dimensions can be expressed as a polygon or polyhedron, depending on whether the object is a Euclidean straight line or hyperplane.

We give, in higher dimensions, a natural characterization of the convexity using Jensen operator and the second order of difference operator expressed as the convolution product.

In addition, we give a characterization of digital hyperplanes using slices defined in general position and a digital carat risation of refined digital hyperplanes using slices defined in special position into higher dimensions. This characterization allowed us to find, in higher dimensions, a relationship between Jensen operator and second-order of difference operator.

**Keywords:** Euclidean and digital hyperplane and line, discretazation, dilations, optimal covering and convexity.