FÖ12

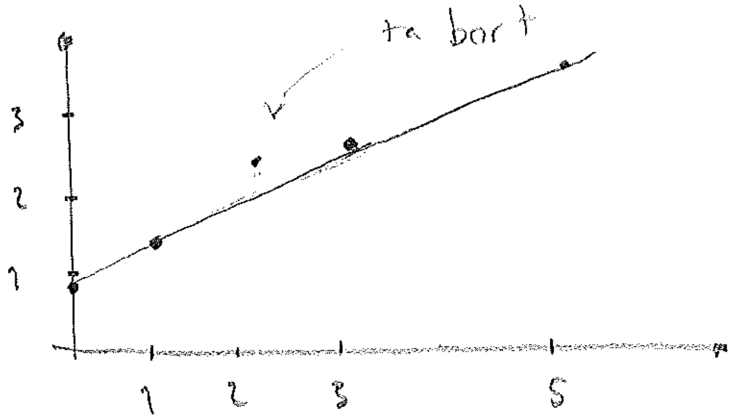
Tentaproblem Bervet I 2005-09-11 nr 3

Givet x- och y-värden

x	0	1	2	3	5
y	0,89	1,35	2,15	2,25	3,05

Ett av y-värdena är en "felmätning"
Eliminera den och approximera resten av data med en rät linje.

Rita upp



Approximera de andra värdena
(dvs $x = 0, 1, 3, 5$) med förstagradspolynom

Ansätt

$$p(x) = a + bx$$

Sätt upp överbestämt ekv. system

$$\begin{cases} a + b \cdot 0 = 0{,}89 \\ a + b \cdot 1 = 1{,}35 \\ a + b \cdot 3 = 2{,}25 \\ a + b \cdot 5 = 3{,}05 \end{cases}$$

$Av = y$, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$y = \begin{bmatrix} 0{,}89 \\ 1{,}35 \\ 2{,}25 \\ 3{,}05 \end{bmatrix}$$

Normalekvationerna är

$$A^T A v = A^T y$$

dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 9 & 35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}54 \\ 25{,}35 \end{bmatrix}$$

$a = 0{,}911$, $b = 0{,}433$

Kan göra rimlighetskontroll

x	0	1	3	5
y	0,89	1,35	2,25	3,05
$p(x)$	0,911	1,344	2,210	3,076
$y - p(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

rimlig fördelning av + och −

Ortogonalitet

Har egentligen försökt

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,89\\1,35\\2,25\\3,05\end{bmatrix}$$

u_1 u_2 y

Normalekv. $A^TAv = A^Ty$

$$A^TA = \begin{bmatrix} - u_1^T - \\ - u_2^T - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(u_1,u_1) & (u_1,u_2)\\ (u_2,u_1) & (u_2,u_2)\end{bmatrix}$$

Om vi hade valt en annan ansats

$$p(x) = \alpha + \beta(x-s)$$

så kunde vi fått ortogonala kolonnvektorer

Om $s = 2,25$ dvs

$$p(x) = \alpha + \beta(x-2,25)$$

Matrisen A

$$A = \begin{bmatrix}1 & -2,25\\1 & -1,25\\1 & 0,75\\1 & 2,75\end{bmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 14,75\end{bmatrix}$$

$$A^Ty = \begin{bmatrix}7,54\\6,385\end{bmatrix}$$

Normalekv.

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 14,75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7,54\\6,385\end{bmatrix}$$

diagonalt ekv. system

$\alpha = 1{,}885 \quad , \quad \beta = 0{,}433$

$p(x) = 1{,}885 + 0{,}433(x - 2{,}25)$

För vissa punktmängder (och även intervall) är det redan förut beräknat vilka polynom man ska välja (av grad 0, 1, 2, ..) för att få ortogonalitet.

Vi har använt "vanliga" skalärprodukten

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \qquad \|u\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} u_j^2$$

Finns även andra t.ex.

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} w_j u_j \cdot v_j \quad , \quad w_j > 0$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

Approximation med andra funktioner

$x_j \quad y_j$ givna

Approximera t.ex.

$$y \approx a + b \cdot \sin x$$

$$y \approx a + b \cdot e^x$$

Inte svårare än polynom
I överbestämda ekv. systemet kommer värdena av andra basfunktioner att bilda kolomn 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sin x_1 \\ 1 & \sin x_2 \\ 1 & \vdots \\ \vdots & \\ 1 & \sin x_n \end{bmatrix}$$

Ibland kan det se svårare ut, men kan transformeras till ett "lätt" problem

ex.

$$y \approx a e^{bx}$$

kan logaritmeras

$$\ln y = \ln a + bx$$

ex.

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	1,8	0,8	0,4	0,25	0,15

Approximera $y \approx a e^{bx}$ i minstakvadratmening

Logaritmera $\ln y \approx \ln a + bx = \alpha + \beta x$

Värdeserien

$\alpha = \ln a$

$\beta = b$

ln y	0,588	-0,223	-0,916	-1,386	-1,897

Överbestämt system $Av = z$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1,5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,588 \\ -0,223 \\ -0,916 \\ -1,386 \\ -1,897 \end{bmatrix}$$

Normalekvationerna $A^T A v = A^T z$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7,5 \\ 7,5 & 13,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,844 \\ -8,827 \end{bmatrix}$$

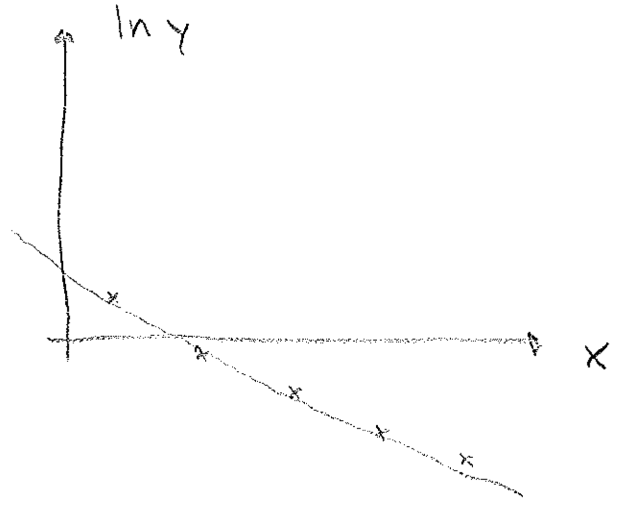
$$\alpha = 1,067 \qquad \beta = -1,224$$

$$\Rightarrow \quad a = e^{\alpha} = 2,906 \qquad b = \beta = -1,224$$

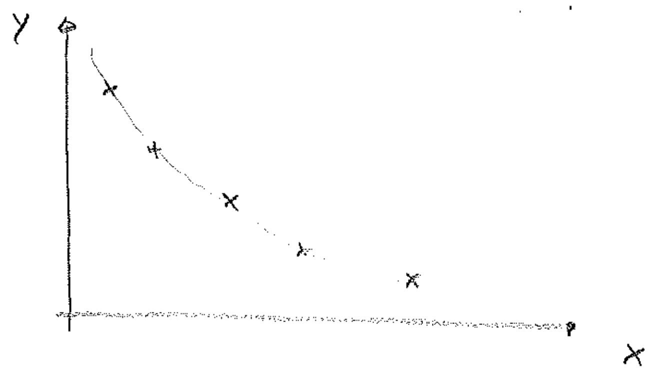
$$\ln y \approx 1,067 - 1,224x$$

$$y \approx 2,906\, e^{-1,224x}$$

Har inte löst exakt det givna problemet utan $\ln y = \alpha + \beta x$



Beräknad linje ligger (förmodligen) "lika nära" alla punkter i det ursprungliga problemet



För stora värden på y motsvarar en liten skillnad i logaritm en stor skillnad i värde.

Ännu mer generellt problem t.ex.

$$y \approx a + b e^{cx}$$

Kan ej logaritmera. Vill söka minimum av

$$F(a,b,c) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - (a + b e^{c x_j}) \right)^2$$

Derivera m.a.p a, b, c och lös det ickelinjära system som uppstår.

Ev kan man göra så här om c ungefärligt känt. Sätt $c = c_1$ och approximera

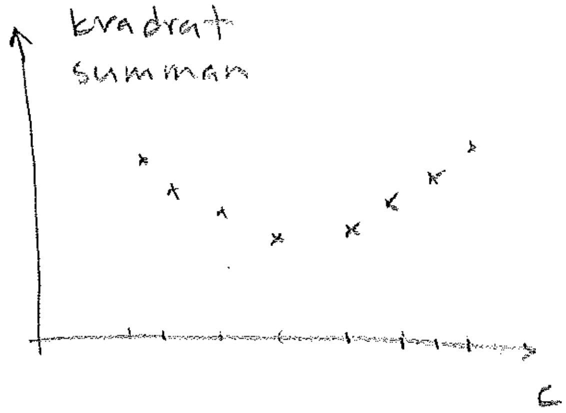
$$y \approx a + b e^{c_1 x}$$ "vanligt problem"

sätt $c = c_2$ $\quad y \approx a + b e^{c_2 x}$

$\vdots$

$c = c_m$ $\quad y \approx a + b e^{c_m x}$

studera kvadratsumman för varje c_k



Kan genom interpolation hitta bästa c-värde.

Interpolationsexempel

Givet

x	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
y	0,82	0,76	0,73	0,74	0,79

Finn y:s minimumvärde genom interpolation med andragradspolynom.

Välj helst punkterna x = 1,8 , 1.9 , 2,0

Newtons interpolationspolynom

$$p(x) = A_0 + A_1(x-1{,}8) + A_2(x-1{,}8)(x-1{,}9)$$

$p(1{,}8) = 0{,}76 \Rightarrow \underline{A_0 = 0{,}76}$

$p(1{,}9) = 0{,}73 \Rightarrow A_0 + A_1 \cdot 0{,}1 = 0{,}73 \Rightarrow \underline{A_1 = -0{,}3}$

$p(2) = 0{,}74 \Rightarrow A_0 + A_1 \cdot 0{,}2 + A_2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}74$

$\Rightarrow \underline{A_2 = 2}$

$$p(x) = 0{,}76 - 0{,}3(x-1{,}8) + 2(x-1{,}8)(x-1{,}9)$$

$$p'(x) = -0{,}3 + 2(x-1{,}9+x-1{,}8) =$$
$$= 4x - 7{,}7$$

$p'(x) = 0$ för $x = 1{,}925$

$p(1{,}925) = 0{,}72875$

Beräkning av polynom t.ex

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 7$$
$$= \big((4x-2)x+5\big)x - 7$$

(Horners schema)