Fö 11

Minsta kvadratapproximation

Givet x-punkter: $x_1 \; x_2 \ldots x_n$

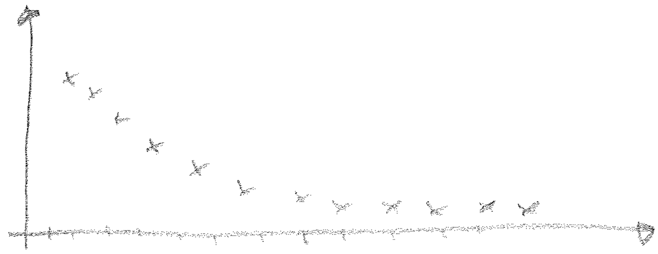
och funktionsvärden: $f_1 \; f_2 \ldots f_n$

(n ofta stort)

Bestäm en funktion $p(x)$ av viss typ som approximerar f.

"Av viss typ" kan vara t.ex.

- förstagradspolynom
- andragradspolynom
- exponentialfunk.



exponentialfunk ?

ae^{bx}

Kan <u>inte</u> vänta sig likhet

$$f_j = p(x_j)$$

i alla punkter

Försöker approximera "så bra som möjligt"

Vid minstakvadratapproximation kräver man att

$$\sum_{j=1}^{n} (f_j - p(x_j))^2$$

ska vara minimal

Ofta är $p(x)$ ett polynom av lågt (måttligt) gradtal.

Beräkning av bästa approximation

Ta som exempel att $p(x)$ förstagradspol.

$f \approx p(x)$ ansätt $p(x) = a + bx$

Kvadratsumman blir

$$\sum_{j=1}^{n} (f_j - (a + bx))^2 = F(a, b)$$

(f_j, x_j kända)

Minimum kan antas endast om

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{j=1}^{n} [2(f_j - (a + bx_j))(-1)] = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{j=1}^{n} [2(f_j - (a + bx_j))(-x_j)] = 0$$

Kkv. syst.

$$\begin{cases} a \sum_{j=1}^{n} 1^2 + b \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} f_j \\ a \sum_{j=1}^{n} x_j + b \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j \end{cases}$$

Linjärt ekv. system

$$\begin{bmatrix} \sum 1^2 & \sum x_j \\ \sum x_j & \sum x_j^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_j \\ \sum f_j x_j \end{bmatrix}$$

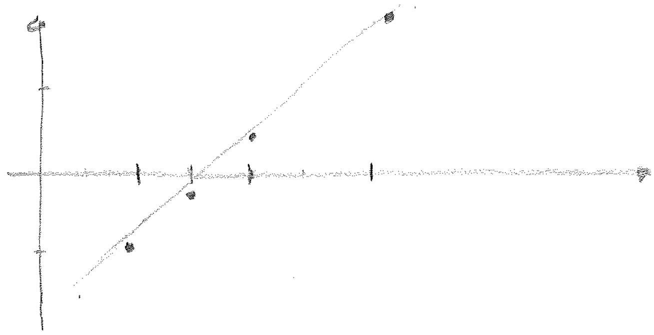
Man kan visa:

- alltid entydig lösning
- ger minimum av kvadratsumman

ex. (Temperaturlab)

månad	t_j	2	3	4	6
temp	f_j	-4,5	-1,9	3,6	14,2

Approximera med förstagradspolynom



Ansätt $p(t) = a + bt$

Beräkna

$$\sum_{j=1}^{4} 1^2 = 4 \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} t_j = 15 \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} t_j^2 = 65$$

$$\sum_{j=1}^{4} f_j = 11,4 \quad , \quad \sum_{j=1}^{4} t_j f_j = 84,9$$

Lös

$$\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,4 \\ 84,9 \end{bmatrix}$$

$b = 4,817 \approx 4,8$

$a = -15,214 \approx -15,2$

$f(t) \approx -15,2 + 4,8t$

Kontrollera gärna $f_j - p(t_j)$

t_j	2	3	4	6
$f_j - p(t_j)$	1,1	-1,1	-0,4	0,6

- både pos. och neg. skillnader
- pos skillnader på båda halvorna

Om vi hade approximerat med andragradspolynom

$$f \sim a + bx + cx^2$$

så hade ekv. systemet blivit

$$\begin{bmatrix} \sum 1^2 & \sum x_j & \sum x_j^2 \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum f_j \\ \sum x_j f_j \\ \sum x_j^2 f_j \end{bmatrix}$$

Annat sätt att se problemet

Ansätt $f \sim a + bt$

Var "envis" och kräv likhet

$$f_j = a + bt_j$$

i alla punkter. Får ekv. system

$$\begin{cases} a + b \cdot 2 = -4{,}5 \\ a + b \cdot 3 = -1{,}9 \\ a + b \cdot 4 = 3{,}6 \\ a + b \cdot 6 = 14{.}2 \end{cases}$$

överbestämt ekv. system (4 ekv 2 obek)
saknar i allmänhet lösning
Får nöja sig med minstakvadratlösningen
dvs där

$$\sum_{j=1}^{n} (HL_j - VL_j)^2$$

är minimal, dvs.

$$\sum_{j=1}^{n} (f_j - (a + bt_j))^2$$

minimal.

Lösningen ges av normalekvationerna

Det överbestämda systemet är

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4{,}5 \\ -1{,}9 \\ 3{,}6 \\ 14{,}2 \end{bmatrix}}_{f}, \quad A \cdot v = f$$

Normalekvationerna fås genom mult. med A^T

$$A^T A v = A^T f$$

dvs.

$$\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,4 \\ 84,9 \end{bmatrix}$$

Obs! Matriserna i överbestämda ekv. systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4,5 \\ -1,9 \\ 3,6 \\ 14,2 \end{bmatrix}}_{f}$$

dvs

$$a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}}_{w} = f$$

Vi försöker framställa en vektor i $\mathbb{R}^4$ (f) som summan av två vektorer i $\mathbb{R}^4$ (u, w). Detta går i allmänhet inte. Nöjer sig med att hitta a och b så att

$$\| f - (au + bw) \|_2^2 \quad \text{minimeras}$$

Residualen dvs $f-(au+bw)=r$

vid den bästa approximationen är

ortogonal mot u, w dvs.

$$(r,u)=0 \quad , \quad (r,w)=0$$

Vi ansatte approximation

$$f \sim a\cdot 1 + b\cdot t$$

dvs. basfunktioner 1 och t

Matrisen A i överbest. system

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Kolonnerna är basfunktionernas värden i de 4 punkterna.

Antag att vi ville approximera

$$f \sim a\cdot 1 + b \sin t$$

Matrisen i överbest. systemet blir

$$\begin{bmatrix} 1 & \sin 2 \\ 1 & \sin 3 \\ 1 & \sin 4 \\ 1 & \sin 6 \end{bmatrix}$$

Då vi approximerade temperaturproblemet med

$$f \sim a + bt$$

fick vi normalekvationer med matris

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 15 & 65 \end{bmatrix} \qquad \text{cond}_2(B) = 817$$

Inte ovanligt med höga konditionstal.
Tänk om vi hade ansatt

$$f \sim \alpha + \beta(t-4)$$

överbestämda ekv. systemet har matris A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Normalekv. $A^T A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T f$

$$C = A^T A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{cond}_2(C) = 2,41$$