23/4 — Berret VI

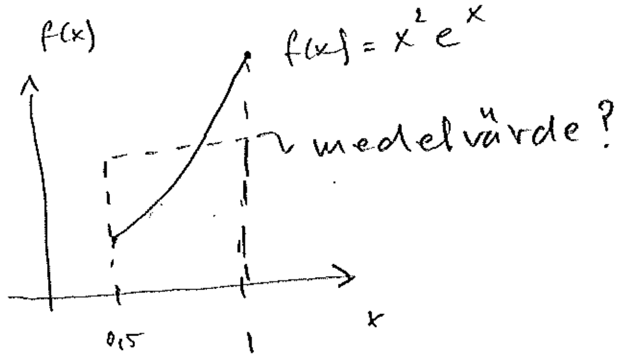
Block 2, Monte Carlo-metoder

Metoder där resultatet beräknas baserat på slumptal.

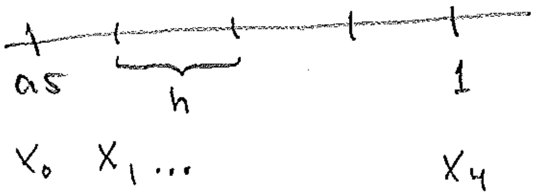
{ Återblick $\int_a^b f(x)\,dx$ numeriskt

t ex $\int_{0,5}^{1} x^2 e^x \, dx$

(exakt 0,65738)



Numeriskt: Använd integrationsformel



Trapetsformeln

$$I = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right) = 0,66531$$

Simpsons formel

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4\right) = 0,65741$$

Trapets. fel $O(h^2)$

Simpson fel $O(h^4)$

Om "medelvärdet" av $f(x)$ på $[a,b]$ def. som höjden av den rektangel som har samma area som arean under kurvan (dvs integralen).
så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)(\text{medelvärdet av } f).$$

Trapetsformeln (i vårt exempel där $h = 0.125$)

$$(b-a) = 4h \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{b-a}{8}$$

Trapets. $(b-a)\left(\frac{\sum 8 \text{ st funktionsvärden}}{8}\right)$

Obs, 8 st "utvalda" funk. värden.

Simpson

$$(b-a) = 4h \Rightarrow \frac{h}{3} = \frac{b-a}{12}$$

Simpson $(b-a)\left(\frac{\sum 12 \text{ st funktionsvärden}}{12}\right)$

OBS: Ev. ännu bättre utvalda värden.

Slumptal $0.5 < x \leq 1$

0.81 0.62
0.73 0.51
0.62 0.83
0.53 0.67

$$0.5 \cdot \frac{\sum \text{vänster funkv.}}{4} = 0{,}4715$$

, bra ?

$$0.5 \cdot \frac{\sum \text{höger funkv.}}{4} = 0{,}4506$$

Man kan dock beräkna integraler som

(b − a)·(medelvärdet av ett antal likformigt fördelade slumpässiga funktionsvärden)

"likformigt fördelade": lika stor chans för alla punkter.

"antal" : ska vara <u>stort</u> antal

Detta bör upprepas många gånger och man skall ta medelvärdet av de värden man fått.

En sådan summering ger en slumpvariabel $X(t)$

Den slumpvariabeln har väntevärdet

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

Om N st punkter används så är förväntat fel

$O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

Att göra detta.
- beräkna med slumpmässiga punkter
- upprepa, och ta medelvärdet av resultaten

kallas att använda en Monte Carlo-metod.

Slumpvariabler

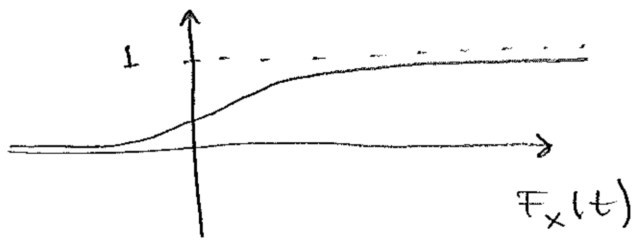
En slumpvariabel X är en en serie av slumpvärden som är fördelade på ett visst sätt.

Den är kontinuerlig om den kan anta "alla" värden. (annars diskret).

Fördelningsfunktion $F_X(t)$

$F_X(t) = P(X \leq t)$, sannolikheten för att värde ur serien är $\leq t$.

ex



$F_x(\infty) = 1$

$F_x(-\infty) = 0$

Sannolikheten att ett slumptal x ur serien ligger i $a < x < b$ är:

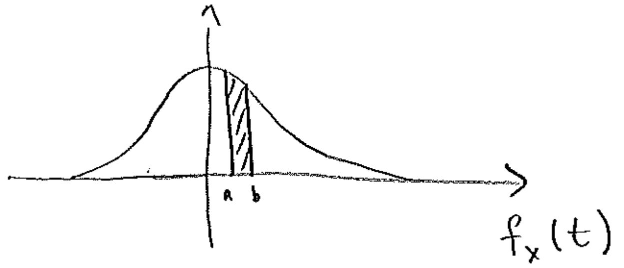
$$F_x(b) - F_x(a).$$

Täthetsfunktion $f_x(t)$ visar mer explicit var talen sannolikt kan hamna.

$$f_x(t) = \frac{dF_x(t)}{dt}$$

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^{T} f_x(t)\,dt.$$

ex



Sannolikheten för att $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f_x(t)\,dt$$

Väntevärde $E(X)$, ($\approx$ medelvärde)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\, dt$$

Varians $V(X)$, förväntad avvikelse från väntevärdet μ.

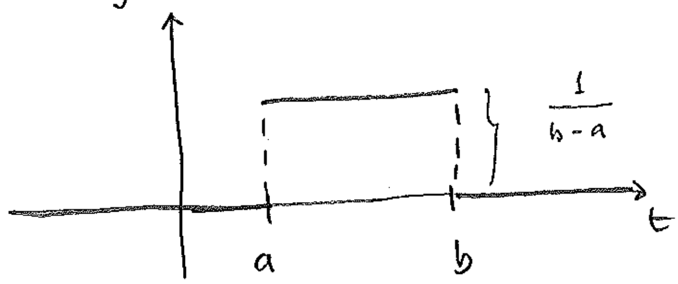
$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mu)^2 f_X(t)\, dt \qquad (\sigma_X^2)$$

Standardavvikelse $D(X)$, (σ_X)

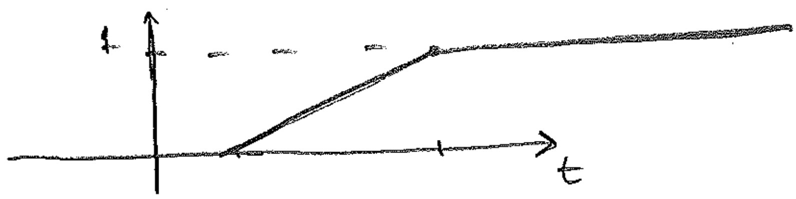
$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

<u>ex</u> Likformig fördelning på $[a, b]$

$f_X(t)$



$F_X(t)$



$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

MATLABs rand

$y = \text{rand}$

ger ett slumptal likformigt fördelat på

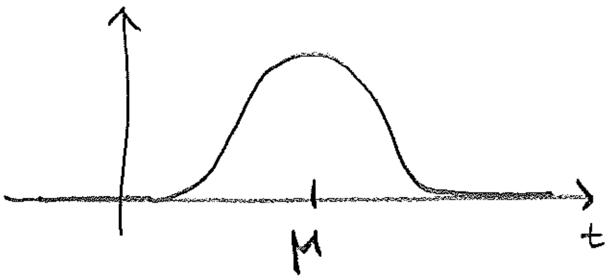
$0 \leq t < 1$.

För att få tal i $a \leq t < b$

$y = a + \text{rand} * (b - a)$

<u>ex</u> Normalfördelning med väntevärde μ och standardavvikelse σ, $N(\mu, \sigma)$.

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Sannolikheten för att ett slumptal x uppfyller $|x - \mu| \leq 1.96\sigma$ är 95%.