ODE, Sammanfattning

Har gått igenom:

För $\begin{cases} y' = f(x,y) & , a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$

- Begynnelsevärdesproblem.
- Olika metoder:
  - Euler framåt, bakåt
  - Trapetsmetoden
  - Heuns metod
  - Runge-Kutta
- Trunkeringsfel:
  - Lokalt, t ex $O(h^2)$ för Euler.
  - Globalt, t ex $O(h)$ för Euler.

Ett steg, fel $\approx c \cdot h^2$, lös från $x=a$ till $x=b$,

$\Rightarrow \frac{b-a}{h}$ stycken steg.

Globalt fel $\approx c \cdot h^2 \left(\frac{b-a}{h} \right) = D \cdot h$.

Richardsonextrapolation

Om en metod har globalt fel $O(h^2)$

$y_h(b)$ är approx till $y(b)$, beräknad med steg h.

Felet i $y_h(b)$ uppskattas med

$$\frac{y_h(b) - y_{2h}(b)}{2^p - 1}$$

Generaliserat till system av ODE

$$Y' = F(x, Y), \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Högre ordningens diff. ekv.

Substituera, gör till första ordn. system.

Stabilitet

Def. genom tillämpning på testekv. $y' = \lambda y$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Implicita metoder

Måste lösa en ickelinjär i ekv. i varje steg.

Har ej nämnt randvärdesproblem.

T ex
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'') , & a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

Gör till första ordningens system genom att sätta $z = y'$.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

"Chansa" med att $z(a) = s$. Lös med ngn metod fram till $x = b$. Vi får då $y_b(s) \approx y(b)$.

Försök nu justera s så att $y_b(s)$ blir $= \beta$

dvs lös

$$g(s) = y_b(s) - \beta = 0$$

Detta kallas shooting.

Tentaproblem

2004-12-8 , F

1 a) Vad kännetecknar en ovillkorligt stabil (A-stabil) metod för ODE?

SVAR: stabilitetsområdet innefattar hela vänstra komplexa halvplanet. (hela negativa reella axeln)

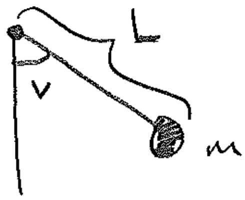
1 d) Implicita metoder har i allmänhet större stabilitetsområde än explicita. Varför inte alltid använda explicita metoder?

SVAR: De är jobbigare, måste lösa en ekvation i varje steg.

1 g) Om en ODE löses med två metoder, båda med steget h, så ger metoden med högre noggranhetsordning alltid mindre fel.

SVAR: Falskt. Detta gäller i limes då $h \to 0$, men inte alltid för ett fixt h.

4) För en dämpad pendel gäller ekv.



$$\begin{cases} v'' + \dfrac{c}{mL} v' + \dfrac{g}{L} \sin v = 0 \\ v(0) = v_0 \\ v'(0) = s_0 \end{cases}$$

a) Skriv om som första ordningens system.

b) Ange hur man löser med Heuns metod.

Lösning

a) Sätt $z = v'$, får då

$$\begin{cases} v' = z \\ z' = -\dfrac{g}{L} \sin v - \dfrac{c}{mL} z \\ v(0) = v_0 \\ z(0) = s_0 \end{cases}$$

b) Uttryck på vektorform

$$V' = F(t, V) \quad , \quad V = \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} z \\ -\frac{g}{L} \sin v - \frac{c}{mL} z \end{bmatrix}$$

Heuns metod, steg h

$t_k, V^{(k)}$ kända. $\tilde{V}^{(k+1)} = V^{(k)} + h \cdot F(t_k, V^{(k)})$

$$V^{(k+1)} = V^{(k)} + \frac{h}{2} \left(F(t_k, V^{(k)}) + F(t_{k+1}, \tilde{V}^{(k+1)}) \right)$$

2007-04-16, F, STS.

5d) Härled lokala trunkeringsfelet för trapetsmetoden.

Diff. ekv. $y'(x) = f(x, y(x))$

Lösning

Trapetsmetoden, $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$.

Lokala trunkeringsfelet,

$$\psi[y, h] = y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{2}\left(f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))\right),$$

dvs differensformeln med insatt exakt lösning och allt i VL.

OBS.

$$f(x_k, y(x_k)) = y'(x_k)$$

Taylorutveckla detta kring $x = x_k$, använd $x_{k+1} = x_k + h$.

$$
\begin{array}{lll}
1 \cdot & y(x_{k+1}) = y(x+h) = & y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \dots \Big|_{x=x_k} \\
-1 \cdot & y(x_k) = & = y \\
-\frac{h}{2} \cdot & y'(x_k) = & = y' \\
-\frac{h}{2} \cdot & y'(x_{k+1}) = y'(x_k+h) = & y' + hy'' + \frac{h^2}{2}y''' + \dots \\
\hline
\text{summera} & \psi[y, h] = & = 0 + 0 + 0 + \left(-\frac{h^3}{12}\right) \cdot y''' + \dots
\end{array}
$$

Lokalt trunkeringsfel $O(h^3)$

$\Rightarrow$ Noggrannhetsordning 2.

Workout 2, Intensiv, nr 7.

Stabilitetsomr. för Heun.

Heun: $\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right)$$

Tillämpa på $y' = \lambda y$, $f(x,y) = \lambda y$

$$\Rightarrow \tilde{y}_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = y_k(1 + h\lambda)$$

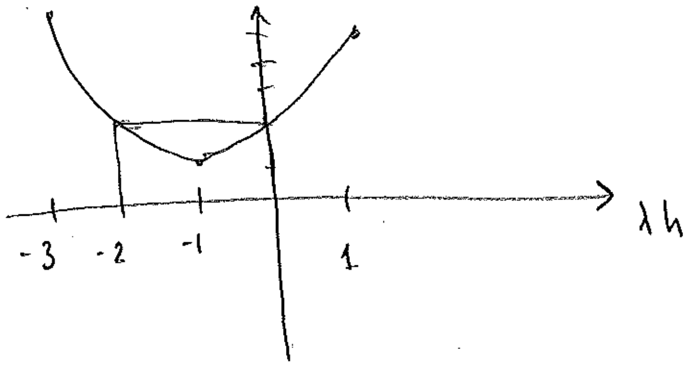
$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\lambda y_k + \lambda y_k(1 + h\lambda)\right)$$

$$= y_k\left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Stabilitetsområdet om $\left|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right| < 1$

dvs $\left|(\lambda h)^2 + 2\lambda h + 2\right| < 2$

Rita upp nära origo



$\Rightarrow$ Stabil om $-2 < \lambda h < 0$.