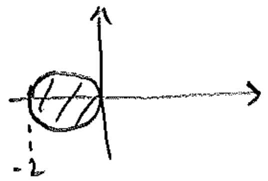
Stabilitetsområde def. mha testekvationen

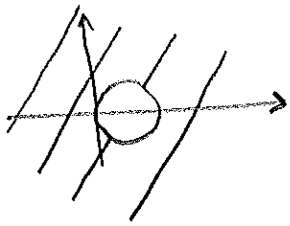
$$y' = \lambda y.$$

Ger krav på λh för stabilitet

Euler framåt:



Euler bakåt:
alla λh med
$\mathrm{Re}(\lambda h) < 0$.



Allmän diff. ekv.

$$y' = f(x,y) \qquad a \leq x \leq b.$$

Mot λ i testekvationen svarar

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Om $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$ så måste $\left(h \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ ligga i stabilitetsområdet.

En <u>adaptiv</u> lösare ändrar steglängden efterhand för att garantera stabilitet (och noggrannhet).

(t.ex. ode45, ode15s i MATLAB)

System av diff. ekvationer.

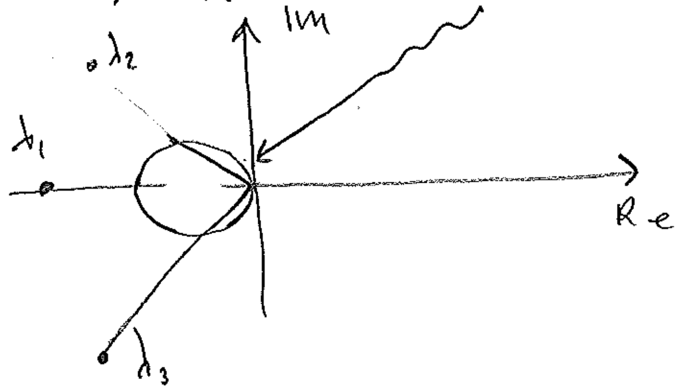
$$Y' = F(x,Y), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Mot $\frac{\partial f}{\partial y}$ för <u>en</u> ekvation svarar Jacobianen

$$J(x,Y) = \frac{\partial F}{\partial Y}, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

Mot λ i stabilitetsanalysen svarar de negativa egenvärderna $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ till $J(x,Y)$. (el. de med negativ realdel)

Kravet är att $(h \cdot \lambda_j)$ ligger i <u>stabilitetsområdet</u> $j = 1, \ldots, s$.



I MATLAB-lösare kan man ange (via odeset) att man har en funktion som beräknar Jacobianen (annars beräknar MATLAB den numeriskt).

Implicita metoder

\+ Har i allmänhet större stabilitetsområde.

\- Man måste lösa en (el. fler) ekvationer i varje steg man gör.

? Vilka ekvationer?

? Hur löses dessa?

ex. Euler bakåt på $y' = f(x,y)$

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$ lös map y_{k+1}

Trapetsmetoden

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$$

Tag som exempel Euler bakåt. Kalla y_{k+1} för z, x_{k+1} för p, y_k för q.

Lös

$$z = q + h f(p, z)$$

el.

$$g(z) = z - h f(p, z) - q = 0$$

i varje steg i diff. ekv. lösaren

Hur löser man en ekvation

$$g(z) = 0$$

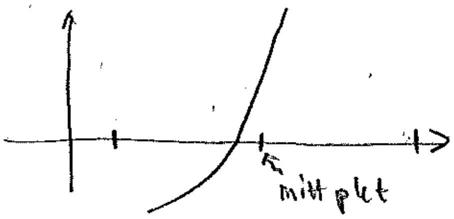
i) Bisektion

ii) Fixpunktsiteration

iii) Newton - Raphson

i) Bisektion

Ekv. på formen $g(z) = 0$. "Hitta ett intervall med teckenväxling. Halvera detta och den halva som har teckenväxling (upprepas)".



För diff.ekv. lösare kan det vara svårt att hitta startintervall. Metoden är också långsam, "ej bra".

ii) Fixpunktsiteration

$g(z) = 0$ skrivs om som $z = G(z)$. Gissa z_0, låt $z_{k+1} = G(z_k)$ $k = 0, 1, 2, \dots$

Följden konvergera om $\left|\frac{dG}{dz}\right| < m < 1$ nära en rot.

Egentligen perfekt diff.ekv.lösare, men h kan behöva vara litet.

iii) Newton-Raphson

$g(z)=0$. Gissa z_0, sätt sedan

$$z_{k+1} = z_k - \frac{g(z_k)}{g'(z_k)}.$$

I diff.ekv.lösare, $g(z) = z - hf(p,z) - q$

$$g(z) = 1 - h\frac{\partial f}{\partial z}(p,z).$$

Konvergerar "alltid" om z_0 är "nära" lösningen.
Konvergerar snabbt (kvadr. konvergens).

Hur hitta z_0?

Bör vara $\approx y_k$, ev. kan approx y_{k+1} beräknas med Euler framåt.

System av diffekvationer

$$Y' = F(x,Y).$$

Euler bakåt blir

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + hF(x_{k+1}, Y^{(k+1)})$$

el. $$Z = Q + hF(p,Z)$$

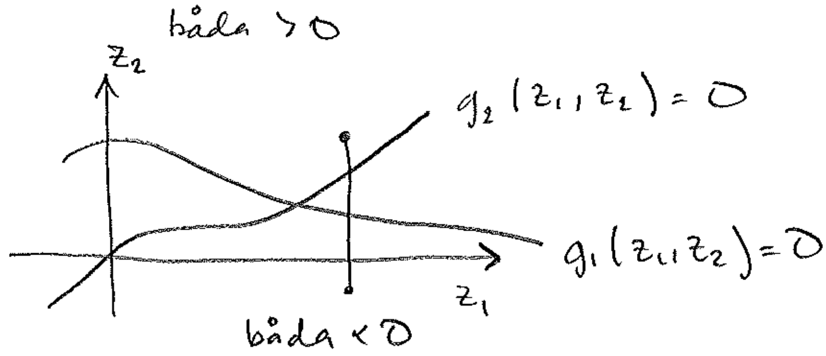
el.

$$G(Z) = Z - hF(p,Z) - Q = 0$$

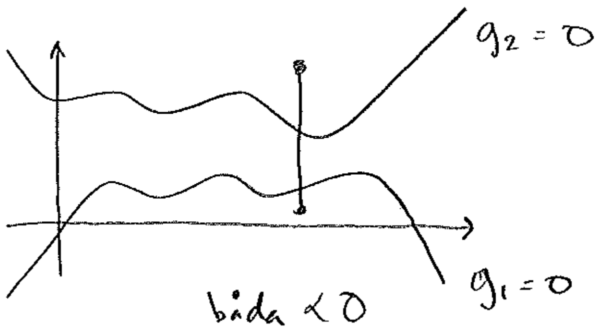
Skall lösa $G(Z)=0$, dvs $\begin{cases} g_1(z_1,\dots,z_n)=0 \\ \vdots \\ g_n(z_1,\dots,z_n)=0 \end{cases}$

i) Bisektion går inte

ex. $\begin{cases} g_1(z_1,z_2)=0 \\ g_2(z_1,z_2)=0 \end{cases}$



Kan se ut



ii) Fixpunktsiteration

$G(Z)$ skrivs om som $Z=H(Z)$, svårt att få konvergens.

iii) Newtons metod för $G(Z)=0$.

(jfr $g(z)=0$, $z_{k+1}=z_k-\dfrac{g(z_k)}{g'(z_k)}$).

Mot derivatan $g'(z)$ motsvarar Jacobianen.

$$J(Z)=\frac{\partial G}{\partial Z}=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

Newtoniteration

$$Z^{(k+1)} = Z^{(k)} - J^{-1}(Z^{(k)}) \cdot G(Z^{(k)})$$

Utförs praktiskt

Lös ekv.syst.

upprepas
$$\begin{cases} J(Z^{(k)})\,\Delta Z^{(k)} = -G(Z^{(k)}) \\ Z^{(k+1)} = Z^{(k)} + \Delta Z^{(k)} \end{cases}$$

Diff.ekv.lösare hade

$$G(Z) = Z - hF(p,Z) - Q = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial Z} = I - h \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}(p,Z)$$