Matlab 7.9 på Sun (Ikonen ger vers. 6)

- Öppna terminalfönster (System tools-meny)
- xhost +
- matlab-7.9 &

Diff. ekv. (forts)

Om $\begin{cases} y' = f(x,y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \hat{y} \end{cases}$ löses med differens-

metod så får man ett trunkeringsfel.
Det globala felet vid t ex $x = b$ är

$y(b) - y_h(b)$ där $y(b)$ exakt lösning för $x = b$
$y_h(b)$ numerisk " " ",
då steget h används.

Felet uppför sig som

$e_h(b) = y(b) - y_h(b) \approx C \cdot h^p$, p kallas metodens

noggranhetsordning.

Euler framåt $p = 1$, Runge-Kutta $p = 4$

Konstanten c behövs om felet ska vara helt känt. Den beror på:

- Vilken ekv. det är
- Vilken punkt det gäller (t ex $x = b$)

För Euler framåt kan man visa att

$$|e_h(b)| \leq h \frac{K}{L} e^{L(b-a)} \quad \text{där } K \leq \frac{\max|y''|}{2}$$

och L är Lipschitzkonstanten för $f(x,y)$.

Mer realistisk feluppskattning kan fås med <u>Richardson extrapolation</u>.

Man måste då veta metodens noggrannhetsordning.

T. ex. Heuns metod:

noggranhetsordning 2, globalt fel $\approx c \cdot h^2$

Vi har löst $y' = f(x,y)$ från $x = a$ till $x = b$

med olika steglängder $h, 2h, 4h, 8h$.

Om exakt lösning i $x = b$ är $y(b)$ så borde gälla

	<u>diff</u>
$y(b) \approx y_{8h}(b) + c \cdot 64h^2$	
$y(b) \approx y_{4h}(b) + c \cdot 16h^2$	$c \cdot 48h^2$
$y(b) \approx y_{2h}(b) + c \cdot 4h^2$	$c \cdot 12h^2$
$y(b) \approx y_h(b) + c \cdot h^2$	$c \cdot 3h^2$

Vill uppskatta felet i $y(b)$ (dvs $c \cdot h^2$)

Subtrahera de sista raderna:

$$y(b) - y(b) \approx y_h(b) + c \cdot h^2 - y_{2h}(b) - 4c \cdot h^2$$

$$0 \approx y_h(b) - y_{2h}(b) - 3c \cdot h^2$$

$$\boxed{ch^2 \approx \frac{y_h(b) - y_{2h}(b)}{3}}$$

Kan även förbättra den senaste lösningen.

$$y(b) \approx y_h(b) + \frac{y_h(b) - y_{2h}(b)}{3}$$

är (förmodligen) en bättre approx, detta kallas <u>tredjedelsregeln</u>. $(3 = 2^2 - 1)$

Om metoden vore Runge-Kutta, fel $O(h^4)$

$2^4 - 1 = 15$

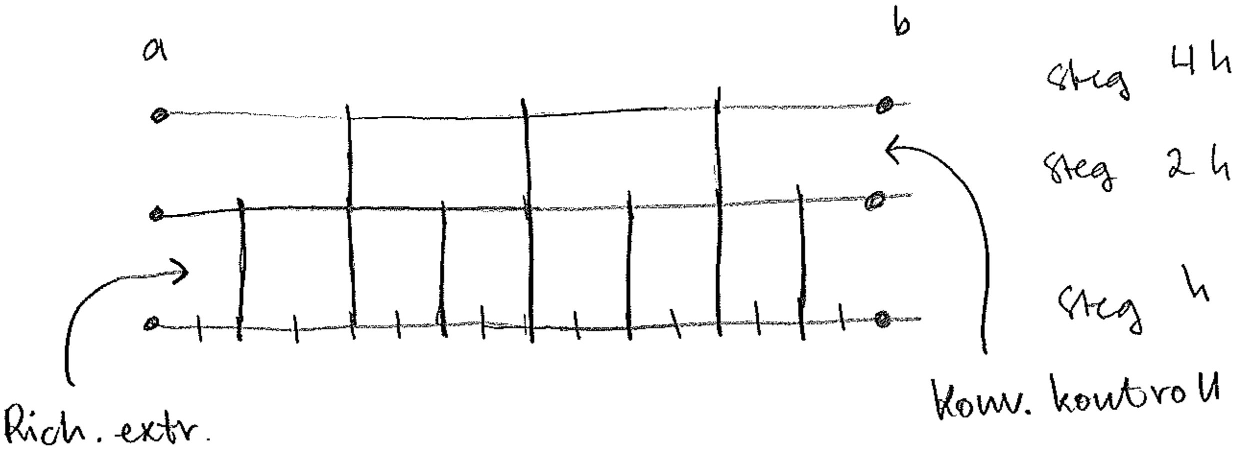
$$y(b) \approx y_h(b) + \frac{y_h(b) - y_{2h}(b)}{15} \quad \text{(femtondelsregeln)}$$

Richardsonextrapolation bör utföras först då konvergensen är "bra" dvs. då skillnaden mellan succesiva numeriska lösningar minskar med rätt faktor (för Heun 4)

Bör kontrollera att

$$\frac{y_{4h}(b) - y_{2h}(b)}{y_{2h}(b) - y_h(b)} \approx 4 \quad (\text{Heun})$$

Kan göras i många punkter



System av ODE

$$Y' = F(x, Y) \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Richardsonextrapolation:

$$E_h(b) = \frac{Y_h(b) - Y_{2h}(b)}{3} \quad (\text{Heun})$$

För konvergenskontroll bör dock allt reduceras till en siffra. Använder då vektornorm.

$$\frac{\| Y_{4h}(b) - Y_{2h}(b) \|}{\| Y_{2h}(b) - Y_h(b) \|} \approx 4 \quad (\text{Heun})$$

t ex 2-norm: $\|Y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |Y_j|^2}$.

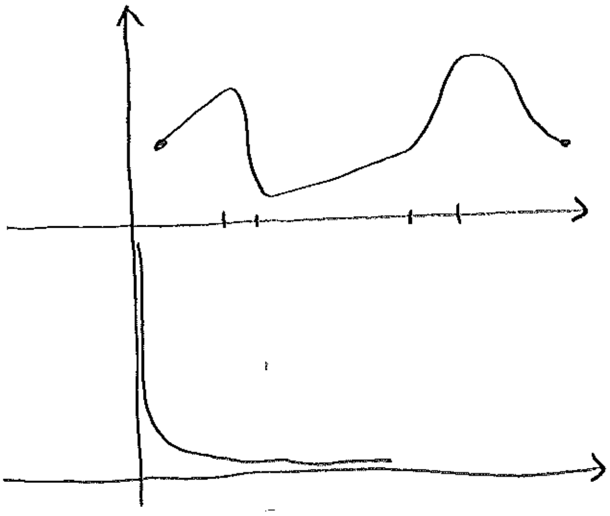
(el. viktad norm: $\|Y\|_W = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j |Y_j|^2}$ $\alpha_j > 0$)

Styra diff. ekvationer

Vissa diff. ekv. har egenskapen att:

- lösningen varierar mycket snabbt i vissa (små) intervall
- lösningen "lugn" för övrigt
- lösningen "suger åt sig" kringliggande lösningar.

Ex Lösning



"Alla" numeriska metoder måste ta små steg i de "besvärliga" intervallen.

En "olämplig" metod måste el. ta små steg överallt

"Lämpligheten" avgörs med den s.k. testekvationen

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

där $\lambda < 0$ (ofta $\lambda << 0$) (ev. $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda << 0$), exakt lösning $y(x) = e^{\lambda x}$.

Stabilitetsområde (för en metod)

Def. En metods stabilitetsområde är de λh (på tallinjen eller komplexa talplanet) där metoden genererar en till beloppet avtagande lösning till testekvationen.

Ex Euler framåt (Explicit Euler)

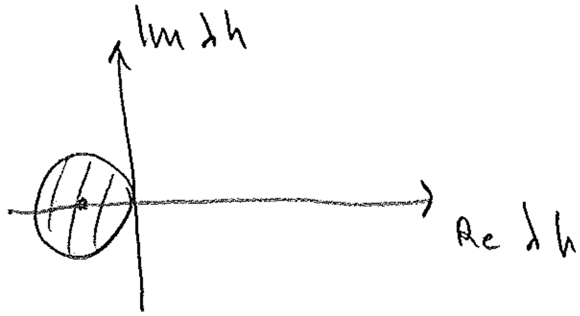
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \quad , \text{nu är } f(x,y) = \lambda y$$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k$$

$$y_{k+1} = y_k(1 + \lambda h)$$

Avtagande lösning om $|1 + \lambda h| < 1$ dvs om $|\lambda h - (-1)| < 1$

Uppfyllt för alla λh i en cirkel med medelpunkt -1 och radie 1.



Litet stab.omr, ställer höga krav på h.

Euler bakåt (Implicit Euler)

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Testekv.

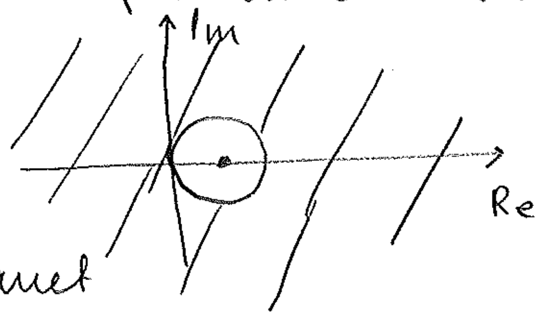
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \lambda \cdot y_{k+1}$$

$$y_{k+1}(1 - \lambda h) = y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - \lambda h}$$, avtagande om $|1 - \lambda h| > 1$

dvs $|\lambda h - 1| > 1$.

Uppfyllt av punkterna utanför en cirkel med medelp. 1 och radie 1.



Hela vänstra komplexa planet ingår om $\lambda < 0$ så duger alla h.

Metoden är A-stabil.