Eulers metod för

$$y' = f(x,y) \qquad a \le x \le b$$

med steg h var lokala trunkeringsfelet $\approx c \cdot h^2$.

Globala felet var $|y_h(x_j) - y(x_j)| \approx D \cdot h^1$, approximationsordning är 1.

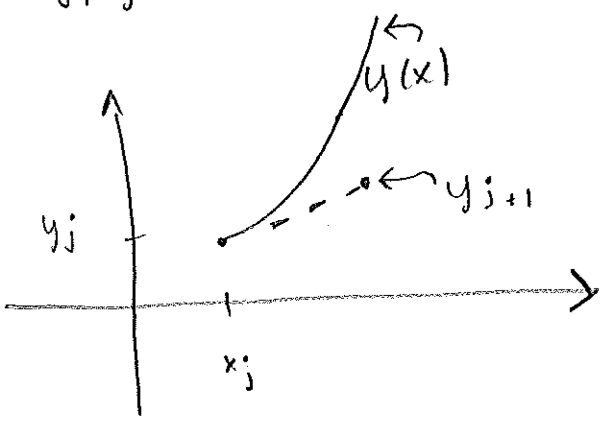
Man kan strikt visa att om lok. trunkeringsfelet $\le C \cdot h^2$, och om f Lipschitzkont. med konst. L

$$|y_h(b) - y(b)| \le h \cdot \frac{C}{L} e^{L(b-a)}$$

(om man har startat i $x = a$)

Princip för Eulers metod för $y' = f(x,y)$.

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j)$$



Eulers metod (Euler framåt)
"tag derivatan i vänster ändpunkt"

- - - -

Metoden Euler bakåt
tar derivatan i höger ändpunkt.

$$y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_{j+1}, y_{j+1})$$

Approximationsordning 1 (globalt fel $O(h)$).

Trapetsmetoden

Använder medelvärdet av derivatorna i ändpunkterna.

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\right)$$

Approximationsordning 2 (globalt fel $O(h^2)$).

Dessa två metoder (Euler bakåt och Trapets) är implicita, dvs. y_{j+1} förekommer i HL.
Man måste lösa en ekvation för att få ut y_{j+1}

(t.ex. lös $y_{j+1} - y_j - hf(x_{j+1}, y_{j+1}) = 0$)

Trapetsmetoden kan "modifieras" så att att man inte behöver lösa en ekvation. I <u>Heuns metod</u> sker detta genom ett "preliminärvärde" på y_{j+1}.

Heuns metod

$$\tilde{y}_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \tilde{y}_{j+1})\right)$$

Approximationsordning 2

Varje steg består av två delsteg.

Vårt exempel

$$\begin{cases} y' = -y + x^2 & 0 \leq x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Ett steg med Heuns metod

$h = 0{,}5$

$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 0{,}5$

$y_0 = 2$

Preliminärvärde

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 2 + 0{,}5(-2 + 0^2) = 1$$

Slutliga värdet

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)\right)$$

$$= 2 + 0{,}25\left(-2 + (-1 + 0{,}5^2)\right) = 1{,}3175 \approx y(0{,}5)$$

(exakt lösning $y(x) = x^2 - 2x + 2$

$\Rightarrow \quad y(0{,}5) = 1{,}25$)

Runge-Kutta-metoder

Idé: Approximera y' i många punkter nära (x_j, y_j) och (x_{j+1}, y_{j+1}).

Tag sedan "listigt" medelvärde.

Klassisk Runge-Kutta

Approx. ordning 4, 4 delsteg.

$$k_1 = f(x_j, y_j)$$

$$k_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_j + h, y_j + h \cdot k_3\right)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

System av ODE

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(a) = \hat{y} \\ z(a) = \hat{z} \end{cases}$$

Skrivs helst om på vektorform

$Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$

$Y' = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = F(x, Y)$ ← vektorvärd funktion

$Y(a) = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$.

Euler framåt

$$Y^{(j+1)} = Y^{(j)} + h \cdot F(x_j, Y^{(j)})$$

Heuns metod

$$\tilde{Y}^{(j+1)} = Y^{(j)} + h \cdot F(x_j, Y^{(j)})$$

$$Y^{(j+1)} = Y^{(j)} + \frac{h}{2}\left(F(x_j, Y^{(j)}) + F(x_{j+1}, \tilde{Y}^{(j+1)}) \right)$$

Högre ordningens diff.ekv.

ex

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y') & a\le x\le b\\ y(a)=\alpha \\ y'(a)=\beta\end{cases}$$

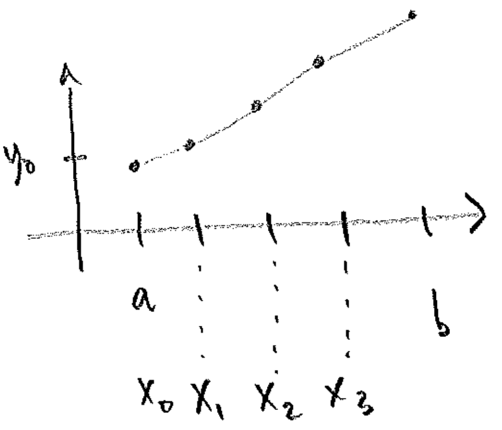
Görs om till första ordningens system.
Sätt $z=y'$. Då blir $z'=y''=f(x,y,\underset{\substack{\uparrow\\ z}}{y'})$

Diff.ekv. systemet

$$\begin{cases} y'=z & = g(x,y,z)\\ z'=f(x,y,z)\\ y(a)=\alpha\\ y'(a)=\beta\end{cases}$$

Vilka datastrukturer erhålles?

a) En ekv. $y'=f(x,y)$ och Euler framåt.



Resultat: En vektor med x-punkter om n delintervall

x:

x_1	x_2	...	x_{n+1}

beräknas

y:

y_1	y_2	y_3	...	y_{n+1}

b) System av diff. ekv.

$$Y' = F(x, Y) \quad , Y \text{ vektor t. ex } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Resultat:

x:	x_1	x_2	...	x_{n+1}

$$Y: \begin{bmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \cdots & y_1^{(n+1)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \cdots & y_2^{(n+1)} \\ y_3^{(1)} & y_3^{(2)} & \cdots & y_3^{(n+1)} \end{bmatrix}$$

i Matlab...

Y(:, j+1) = Euler(x(j), Y(:, j), h)

MATLABs lösare ode45

Diff. ekv.

$$\begin{cases} Y' = F(x, Y) & a \le x \le b \\ Y(a) = \hat{Y} \end{cases}$$

Y vektor.

HL-funk

Begynnelsevärde

Anrop: [x, Y] = ode45(@F, [a b], Yhatt);

Intervall

x:	x_1	...	x_{n+1}

$$Y \begin{bmatrix} Y^{(1)} & \cdots & Y^{(n+1)} \end{bmatrix}$$

F anropas F(x, Y)
ger kolonnvektor som resultat