23/3

Ber.vet II FÖ2

Block. 1 ORDINÄRA DIFF. EKV.

En diff. ekv. skrivs typiskt

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \hat{y} \end{cases}$$

$$\left(\text{eg. } \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)) \right)$$

Detta är ett begynnelsevärdesproblem för en ODE.

Högerledsfunktionen $f(x,y)$ är Lipschitz-kontinuerlig om

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

där L är konstant, $a \leq x \leq b$.

Tillräckligt är att

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

i önskat område.

Picards sats

Om $f(x,y)$ är Lipschitzkontinuerlig i

$a \leq x \leq b \,, \; -\infty < y < \infty$

så har diff. ekv.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \leq x \leq b \\ y(a) = \hat{y} \end{cases}$$

en entydig lösning för $a \leq x \leq b$.

Ex

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} , \quad f(x,y) = y \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = 1$$

Lösningen $y(x) = e^x$ existerar entydigt för $-\infty < x < \infty$.

Ex.

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 & 0 \leq x \leq \,? \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Lösningen är $y(x) = \tan(x)$ existerar i $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$f(x,y) = 1 + y^2$ ej Lipschitzkont.

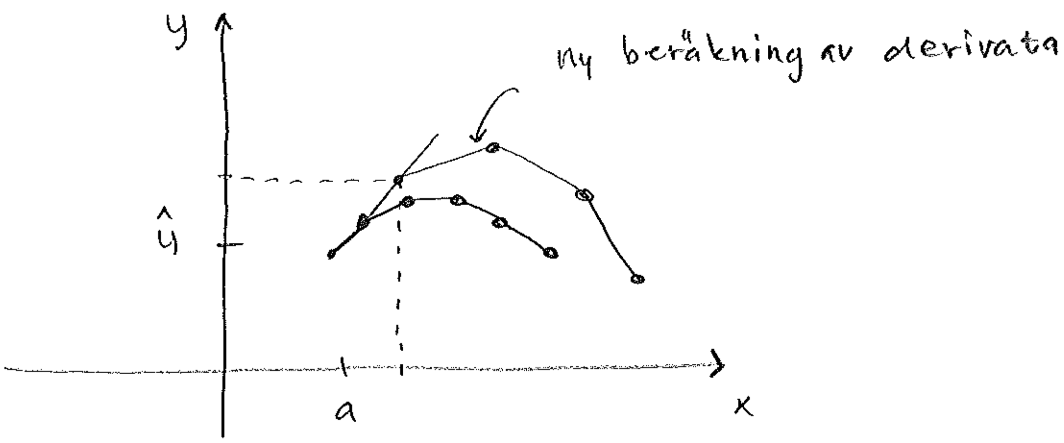
Numerisk lösning av ODE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & a \le x \le b \\ y(a) = \hat{y} \end{cases}$$

Vad vet vi när vi börjar?

$y(a)$ känt
$y'(a)$ känt.

dvs man kan skissa



Mer systematiskt.

Dela in intervallet $a \le x \le b$ i delintervall mha x_j.

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b.$$

I enklaste fallet används konstant steglängd

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_j = a + j \cdot h.$$

Försök sedan beräkna y_j som en approximation till $y(x_j)$ i dess punkter $j = 0, 1, \ldots, n$.

(Obs. notation y_j approx.

$y(x_j)$ exakt)

$y_0 = y(x_0)$ redan känt.

Ett sätt att beräkna y_j är att anta att lösningen $y(x_j)$ lokalt har konstant derivata.
dvs här

$$y'(x) = y'(x_j) \quad \text{för} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

Då blir

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h \cdot f'(x_j, y_j) & j = 0, 1, \ldots, n-1 \\ y_0 = \hat{y} \end{cases}$$

Detta är <u>Eulers metod</u> (el. Euler framåt).

Ex
$$\begin{cases} y' = -y + x^2 = f(x,y) & 0 \leq x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

(exakt lösning $y(x) = x^2 - 2x + 2$)

Euler framåt, $h = 0{,}5$, två steg

(Vet att $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $y_0 = 2$)

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 2 + 0{,}5(-2 + 0^2) = 1$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1 + 0{,}5(-1 + 0{,}5^2) = 0{,}625 \approx y(1)$$

Man får (tyvärr) inte den exakta lösningen då man löser en ODE med Eulers metod.

Man får en skillnad som kallas trunkeringsfel (ev. diskretiseringsfel)

Globala trunkeringsfelet vid Eulers metod

$$e_h(x_j) = \underbrace{y_h(x_j)}_{\text{Approximation till } y(x_j) \text{ erhållen med steg } h} - y(x_j)$$

Lokala trunkeringsfel

Det fel man har gjort när man har gått ett steg.

Spec. skillnaden $e_1 = y_1 - y(x_1)$ då x_0 och y_0 exakt kända.

Analys av lokala trunkeringsfelet för Eulers metod.

Formell definition av lokala trunkeringsfelet i steg j (då y_{j+1} beräknas)

(Obs y_j approx. till lösning i $x = x_j$, $y(x_j)$ exakt lösning i $x = x_j$).

$$\varphi_j[y,h] = y(x_{j+1}) - y(x_j) - h f(x_j, y(x_j))$$

dvs det man får om exakta lösningen sätts in i Eulers metod och allt flyttas till VL.

Obs. att $f(x_j, y(x_j)) = y'(x_j)$ om $y(x)$ exakt lösn.

Analysera lokala trunkeringsfelet mha Taylor-utveckling, tex kring $x = x_j$.

Obs. $y(x_{j+1}) = y(x_j + h)$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot y(x_{j+1}) &= y(x_j + h) = y + hy' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' + \dots \Big|_{x = x_j} \\
-1 \cdot y(x_j) &= \quad y \\
-h \cdot y'(x_j) &= \quad y' \\
\hline
\Psi_j[y, h] &= 0 + 0 + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' + \dots \\
&= \frac{h^2}{2} y''(\xi), \text{ där } x_j \le \xi \le x_{j+1}
\end{aligned}
$$

om y'' kontinuerlig på $[y_j, y_{j+1}]$

$$\left| \frac{h^2}{2} y''(\xi) \right| \le \frac{h^2}{2} c, \quad c = \max_{[\ ]} |y''|.$$

Det globala felet, t. ex. då man löst fram till $x = b$ är (tyvärr) inte summan av de lokala felen (utan även lite "extra" fel).

Dock är det rimligt att det globala felet är minst summan av de lokala (till belopp)

Då vi har löst till $x = b$ (från $x = a$) har vi gjort felen

$$\underbrace{\left(\frac{b-a}{h}\right)}_{\text{antal steg}} \cdot \underbrace{h^2 \frac{c}{2}}_{\text{lok. fel}} = \underbrace{\frac{c\,(b-a)}{2}\, h}_{\approx \text{ globalt fel.}}$$